Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 16

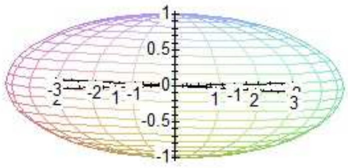
Alberto Albano

Esercizio 1. do Carmo, Esercizio 2-5.1

Soluzione.

a. $\mathbf{x}(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$: ellissoide di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u =$ costante sono ellissi orizzontali di semiassi $a \sin u$ e $b \sin u$, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v =$ costante sono semiellissi che hanno un asse lungo l'asse z e semiassi $\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}$ (sul piano xy) e c (sull'asse z).

I parametri (u, v) variano in $0 < u < \pi$, $0 < v < 2\pi$. Le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u) \\
\mathbf{x}_v &= (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0)
\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (bc \sin^2 u \cos v, ac \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u) \\
&= \sin u (bc \sin u \cos v, ac \sin u \sin v, ab \cos u)
\end{aligned}$$

che si annulla solo per $\sin u = 0$ e cioè $u = 0, \pi$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è sempre regolare (naturalmente, non copre tutto l'ellissoide).

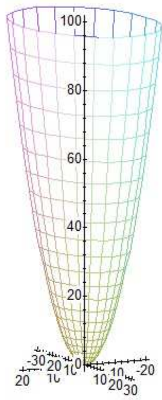
La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 - a^2) \cos u \cos v \sin u \sin v \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \sin^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)
\end{aligned}$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

b. $\mathbf{x}(u,v) = (au\cos v, bu\sin v, u^2)$: paraboloide ellittico di equazione cartesiana

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u =$ costante sono ellissi orizzontali di semiassi au e bu, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v =$ costante sono semiparabole con l'asse lungo l'asse z. Le due semiparabole per v e $v + \pi$ si uniscono e formano una parabola sul piano di equazione $(\sin v)x - (\cos v)y = 0$, con vertice nell'origine e asse l'asse delle z.

I parametri (u, v) variano in $u > 0$, $0 < v < 2\pi$. In questo modo la parametrizzazione non copre la semiparabola $v = 0$ e cioè la semiparabola sul semipiano xz con $x \geq 0$ (l'origine non è coperta). Si potrebbe pensare di mettere $-\infty < u < +\infty$, $0 < v < \pi$. In questo modo le curve $v =$ costante sono delle parabole intere, ma la funzione non risulta iniettiva, in quanto il punto $(0, v)$ ha sempre immagine l'origine.

Le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (a\cos v, b\sin v, 2u) \\ \mathbf{x}_v &= (-au\sin v, bu\cos v, 0) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-2bu^2\cos v, -2au^2\sin v, abu) \\ &= u(-2bu\cos v, -2au\sin v, ab) \end{aligned}$$

che si annulla solo per $u = 0$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è sempre regolare.

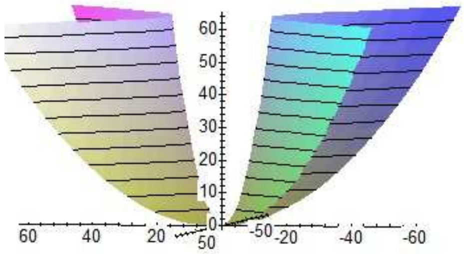
La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v + 4u^2 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 - a^2)u\cos v\sin v \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v) \end{aligned}$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

c. $\mathbf{x}(u,v) = (au\cosh v, bu\sinh v, u^2)$: paraboloide iperbolico di equazione cartesiana

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u =$ costante sono iperboli orizzontali, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v =$ costante sono semiparabole con l'asse lungo l'asse z. Osserviamo che poiché la coordinata $z = u^2$ è sempre positiva, la parametrizzazione copre solo la parte del paraboloide che sta sopra il piano xy.

I parametri (u,v) variano in $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, però in questo modo l'origine non è un punto regolare in quanto la funzione non risulta iniettiva: il punto $(0,v)$ ha sempre immagine l'origine.

Le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (a\cosh v, b\sinh v, 2u)\\ \mathbf{x}_v &= (au\sinh v, bu\cosh v, 0)\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-2bu^2\cosh v, 2au^2\sinh v, abu)\\ &= u(-2bu\cosh v, 2au\sinh v, ab)\end{aligned}$$

che si annulla solo per $u = 0$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è regolare tranne che nell'origine.

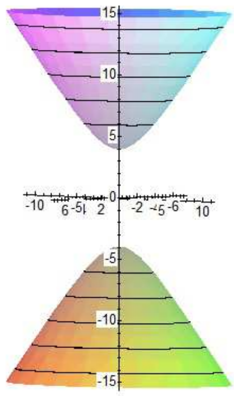
La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2\cosh^2 v + b^2\sinh^2 v + 4u^2\\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 + a^2)u\cosh v\sinh v\\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2(a^2\sinh^2 v + b^2\cosh^2 v)\end{aligned}$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

d. $\mathbf{x}(u,v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$: iperboloide a due falde di equazione cartesiana

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u =$ costante sono ellissi orizzontali, di semiassi $a \sinh u$ e $b \sinh u$, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v =$ costante sono rami di iperbole che giacciono su piani verticali (passanti per l'asse z). Osserviamo che poiché la coordinata $z = c \cosh u$ è sempre positiva, la parametrizzazione copre solo la falda dell'iperboloide che sta sopra il piano xy. L'altra falda si ottiene ponendo $z = -c \cosh u$, ottenendo in questo modo gli altri rami di iperbole.

I parametri (u,v) variano in $u > 0$, $0 < v < 2\pi$. In questo modo la parametrizzazione non copre il ramo di iperbole $v = 0$ e cioè quello sul piano xz (anche il minimo $(0,0,1)$, che si ottiene per $u = 0$, non è coperto). Le derivate parziali sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u) \\ \mathbf{x}_v &= (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-bc \sinh^2 u \cos v, -ac \sinh^2 u \sin v, ab \sinh u \cosh u) \\ &= \sinh u (bc \sinh u \cos v, ac \sinh u \sin v, ab \cosh u) \end{aligned}$$

che si annulla solo per $\sinh u = 0$ e cioè $u = 0, \pi$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è sempre regolare.

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 - a^2) \cosh u \cos v \sinh u \sin v \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \sinh^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) \end{aligned}$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

Esercizio 2. do Carmo, Esercizio 2-5.2

Soluzione. Riscriviamo il testo per fissare le notazioni: la sfera S^2 è parametrizzata da

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

e quindi φ è la *longitudine* (angolo nel piano xy misurato a partire dal semiasse positivo x) e θ è la *colatitudine* (angolo sul piano xz misurato a partire dal semiasse positivo z).

Il piano P_α ha di equazione $x = z\cot\alpha$. Possiamo riscrivere l'equazione come $(\sin\alpha)x - (\cos\alpha)z = 0$. Al variare di α si ottiene il fascio di piani di asse l'asse y. Il piano P_α è generato dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha), \qquad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$$

che ne formano una base ortonormale. La curva $P_\alpha = S^2$ è quindi la circonferenza C_α di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2 = (\cos\alpha\cos t, \sin t, \sin\alpha\cos t)$$

Osserviamo che questa parametrizzazione è per arcolunghezza. Il meridiano M_{φ_0} ha equazione parametrica

$$\delta(\theta) = (\sin\theta\cos\varphi_0, \sin\theta\sin\varphi_0, \cos\theta)$$

dove $0 < \theta < \pi$. Anche questa parametrizzazione è per arcolunghezza. Dobbiamo dunque trovare il punto di intersezione fra queste due curve e calcolare l'angolo β fra i vettori tangenti. Questi sono facili da calcolare

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-\cos\alpha\sin t, \cos t, -\sin\alpha\sin t)\\ \delta'(\theta) &= (\cos\theta\cos\varphi_0, \cos\theta\sin\varphi_0, -\sin\theta)\end{aligned}$$

e ricordando che $\|\gamma'(t)\| = \|\delta'(\theta)\| \equiv 1$, abbiamo

$$\cos\beta = \gamma'(t)\cdot\delta'(\theta)$$

Il prodotto scalare vale

$$\gamma'(t)\cdot\delta'(\theta) = -\cos\alpha\cos\varphi_0\sin t\cos\theta + \sin\varphi_0\cos t\cos\theta + \sin\alpha\sin t\sin\theta$$

e dobbiamo valutare questa espressione sostituendo al posto di t e θ il valore che hanno nel punto di intersezione. Denotiamo con t_0 e θ_0 i valori dei parametri per cui $\gamma(t_0) = \delta(\theta_0)$. Ci sono varie relazioni soddisfatte da t_0 e θ_0: per prima cosa sostituiamo l'equazione parametrica di $\delta(\theta)$ nell'equazione cartesiana di P_α ottenendo

$$\sin\alpha\sin\theta_0\cos\varphi_0 = \cos\alpha\cos\theta_0$$

e sostituendo $\cos\alpha\cos\theta_0$ nel primo termine della somma del prodotto scalare si ha

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0)\cdot\delta'(\theta_0) &= -\underline{\cos\alpha}\cos\varphi_0\sin t_0\,\underline{\cos\theta_0} + \sin\varphi_0\cos t_0\cos\theta_0 + \sin\alpha\sin t_0\sin\theta_0\\ &= -\cos\varphi_0\,\underline{\sin t_0\sin\alpha\sin\theta_0}\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos t_0\cos\theta_0 + \underline{\sin\alpha\sin t_0\sin\theta_0}\\ &= \sin\alpha\sin t_0\sin\theta_0\left[-\cos^2\varphi_0 + 1\right] + \sin\varphi_0\cos t_0\cos\theta_0\\ &= \sin\alpha\sin t_0\sin\theta_0\sin^2\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos t_0\cos\theta_0\\ &= \sin\varphi_0\left[\sin\alpha\sin t_0\sin\theta_0\sin\varphi_0 + \cos t_0\cos\theta_0\right]\end{aligned}$$

Ora, eguagliando le componenti y e z delle curve γ e δ, si ha che nel punto di intersezione vale

$$\sin\theta_0 \sin\varphi_0 = \sin t_0, \qquad \cos\theta_0 = \sin\alpha\cos t_0$$

e quindi

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0)\cdot\delta'(\theta_0) &= \sin\varphi_0\left[\sin\alpha\sin t_0\,\underline{\sin\theta_0\sin\varphi_0} + \cos t_0\,\underline{\cos\theta_0}\right]\\ &= \sin\varphi_0[\sin\alpha\sin^2 t_0 + \sin\alpha\cos^2 t_0]\\ &= \sin\varphi_0\sin\alpha\end{aligned}$$

Otteniamo dunque che per l'angolo β fra le due curve si ha

$$\cos\beta = \sin\varphi_0\sin\alpha$$

Esercizio 3. do Carmo, Esercizio 2-5.5

Soluzione. Una parametrizzazione regolare della superficie S è

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

La proiezione $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ è una inversa differenziabile di $\mathbf{x}(u,v)$ e quindi, se $\pi(R) = Q$ allora $\mathbf{x}(Q) = R$. La fomula dell'area è

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

Calcoliamo perciò la prima forma. Le derivate parziali sono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1, 0, f_u)\\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, f_v)\end{aligned}$$

e quindi la prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u = 1 + f_u^2\\ F &= \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = f_u f_v\\ G &= \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v = 1 + f_v^2\end{aligned}$$

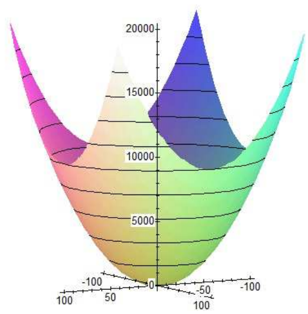
Il determinante $EG - F^2 = (1+f_u^2)(1+f_v^2) - (f_u f_v)^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2$ e si ha quindi la tesi (osserviamo che $f_u = f_x$, $f_v = f_y$, cambiando i nomi delle variabili).

Esercizio 4. do Carmo, Esercizio 3-2.8

Soluzione.
a. $S : z = x^2 + y^2$ *paraboloide di rotazione*. Poiché la superficie è un grafico, possiamo usare come parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

sul dominio $U = \mathbb{R}^2$.



La mappa di Gauss è $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$. Le derivate parziali sono

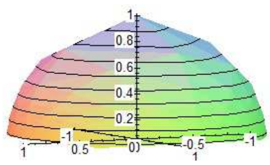
$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$$
$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 2v)$$

il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2u, -2v, 1)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, -2v, 1)$$



La componente z è sempre positiva e quindi l'immagine è contenuta nella semisfera aperta superiore. Per dimostrare che l'immagine è tutta la *semisfera superiore* prendiamo (x, y, z) nella semisfera superiore. La mappa di Gauss in componenti è:

$$x = -\frac{2u}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \qquad y = -\frac{2v}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}$$

e si possono ricavare u e v

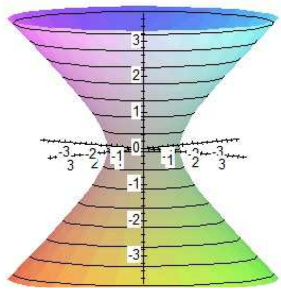
$$u = -\frac{x}{2z}, \qquad v = -\frac{y}{2z}$$

Quindi tutti i punti della semisfera superiore sono immagine del dominio U.

b. $S: x^2+y^2-z^2=1$ *iperboloide di rotazione.* Poiché la superficie è una superficie di rotazione, abbiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u,v)=(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,\sinh u)$$

sul dominio $U=\mathbb{R}\times(0,2\pi)$.



La mappa di Gauss è $\mathbf{N}=\dfrac{\mathbf{x}_u\wedge\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\wedge\mathbf{x}_v\|}$. Le derivate parziali sono

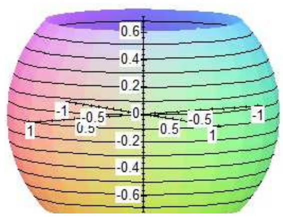
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u&=(\sinh u\cos v,\sinh u\sin v,\cosh u)\\ \mathbf{x}_v&=(-\cosh u\sin v,\cosh u\cos v,0)\end{aligned}$$

il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u\wedge\mathbf{x}_v=(-\cosh^2 u\cos v,-\cosh^2 u\sin v,\cosh u\sinh u)$$

e quindi

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u+\sinh^2 u}}(-\cosh u\cos v,-\cosh u\sin v,\sinh u)$$



L'immagine è quindi la parte della sfera contenuta fra due paralleli. Per trovare la coordinata z di questi paralleli, basta calcolare il limite della componente z del vettore $\mathbf{N}$:

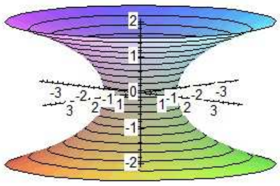
$$\lim_{u\to\pm\infty}\frac{\sinh u}{\sqrt{\cosh^2 u+\sinh^2 u}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il limite è immediato scrivendo $\sinh u$ e $\cosh u$ in termini di funzioni esponenziali.

c. $S : x^2 + y^2 = \cosh^2 z$ *catenoide.* Anche la catenoide è una superficie di rotazione e abbiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

sul dominio $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.



La mappa di Gauss è $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$. Le derivate parziali sono

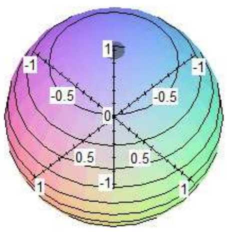
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)\\ \mathbf{x}_v &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)\end{aligned}$$

il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \cosh u \sinh u) = \cosh u(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\cosh u}(-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u)$$



La mappa sembra non essere suriettiva (nel disegno, c'è un piccolo buco intorno al polo Nord). Calcoliamo come prima il limite della componente z del vettore $\mathbf{N}$:

$$\lim_{u \to \pm\infty} \frac{\sinh u}{\cosh u} = \pm 1$$

e quindi l'immagine è la sfera meno i poli Nord e Sud.

Esercizio 5. do Carmo, Esercizio 3-2.16

Soluzione. Ricordiamo che per definizione, una linea di curvatura è una curva tracciata su una superficie che ha direzione tangente, in ogni punto, uguale ad una direzione principale di curvatura (do Carmo, cap. 3-2, definizione 5).

In realtà, l'enunciato da dimostrare per questo esercizio è un caso particolare di un fatto più generale

Proposizione (do Carmo, cap. 3-3, Esempio 4). *Se S è una superficie di rotazione, allora i meridiani e i paralleli sono linee di curvatura.*

Dimostrazione. Sia S parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)$$

dove $\alpha(u) = (\varphi(u), 0, \psi(u))$ è la curva nel piano xz che viene ruotata intorno all'asse z. La curva non incontra l'asse z e quindi $\varphi(u) > 0$. Inoltre possiamo supporre che $\alpha(u)$ sia parametrizzata per arcolunghezza e quindi $\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 \equiv 1$.

I vettori tangenti ai meridiani e ai paralleli sono, rispettivamente, $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. Dobbiamo perciò verificare che la matrice di $d\mathbf{N}_p$ è diagonale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

Calcoliamo (senza scrivere la variabile u per brevità):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\varphi' \cos v, \varphi' \sin v, \psi') \\ \mathbf{x}_v &= (-\varphi \sin v, \varphi \cos v, 0) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-\varphi\psi' \cos v, -\varphi\psi' \sin v, \varphi\varphi') \\ &= \varphi(-\psi' \cos v, -\psi' \sin v, \varphi') \end{aligned}$$

Dividendo per φ, osserviamo che il vettore è di norma costante 1 e quindi

$$\mathbf{N} = (-\psi' \cos v, -\psi' \sin v, \varphi')$$

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \varphi^2 \end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (\varphi'' \cos v, \varphi'' \sin v, \psi'') \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\varphi' \sin v, \varphi' \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-\varphi \cos v, -\varphi \sin v, 0) \end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -\varphi''\psi' + \varphi'\psi'' \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0 \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \varphi\psi' \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p = -I_p^{-1} \cdot II_p &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varphi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi''\psi' + \varphi'\psi'' & 0 \\ 0 & \varphi\psi' \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -\varphi''\psi' + \varphi'\psi'' & 0 \\ 0 & \psi'/\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è diagonale come richiesto. □

Esercizio 6. do Carmo, Esercizio 3-3.1

Soluzione. La superficie è un grafico e usiamo la parametrizziazione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, auv)$$

sul dominio $U = \mathbb{R}^2$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1, 0, av)\\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, au)\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-av, -au, 1)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2(u^2 + v^2)}}(-av, -au, 1)$$

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + a^2v^2\\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = a^2uv\\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + a^2u^2\end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, 0)\\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, a)\\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0\\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2(u^2 + v^2)}}\\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0\end{aligned}$$

Nell'origine, $u = v = 0$ e quindi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$-d\mathbf{N}_p = I_p^{-1} \cdot II_p = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

perciò $K = \det(-d\mathbf{N}_p) = -a^2$ e $H = \operatorname{tr}(-d\mathbf{N}_p) = 0$.

Esercizio 7. do Carmo, Esercizio 3-3.2

Soluzione. Per semplicità, facciamo solo il caso $c = 1$. La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = u \end{cases}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-v \sin u, v \cos u, 1) \\ \mathbf{x}_v &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\sin u, \cos u, -v)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}(-\sin u, \cos u, -v)$$

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + v^2 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 \end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (-v \cos u, -v \sin u, 0) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0 \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0 \end{aligned}$$

Scriviamo il differenziale della mappa di Gauss:

$$I = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$-d\mathbf{N}_p = I_p^{-1} \cdot II_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1 + v^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

perciò $H = \mathrm{tr}(-d\mathbf{N}_p) = 0$ (si può anche usare la formula per H nel formulario).

Le *direzioni asintotiche* sono le direzioni in cui la curvatura normale è 0 e cioè: se $\mathbf{u} = (a, b)$ deve essere

$$k_n(\mathbf{u}) = II_p(\mathbf{u}) = 0$$

In questo caso

$$II_p(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{1+v^2}} ab$$

che si annulla per $a = 0$ opppure $b = 0$. Dunque le *direzioni asintotiche* sono date da $\mathbf{x}_u$ $(b = 0)$ e $\mathbf{x}_v$ $(a = 0)$.

Le *curve asintotiche* sono curve che hanno come tangenti le direzioni asintotiche e sono quindi $v =$ costante (che ha vettore tangente $\mathbf{x}_u$) e $u =$ costante (che ha vettore tangente $\mathbf{x}_v$).

Le *linee di curvatura* sono le curve che hanno come tangenti le direzioni principali di curvatura e cioè gli autovettori di $-d\mathbf{N}_p$. Poniamo

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

e osserviamo che $\alpha \neq 0$ sempre. Allora possiamo scrivere

$$-d\mathbf{N}_p = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

da cui è immediato calcolare che gli autovalori sono $\pm\alpha^2$ e gli autovettori sono

$$\mathbf{e}_1 = (\alpha, 1), \qquad \mathbf{e}_2 = (-\alpha, 1)$$

Nota: calcolare il prodotto scalare $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ e verificare che i due autovettori sono ortogonali.

Per trovare le linee di curvatura, occorre risolvere un'equazione differenziale. Per maggiori dettagli, vedere do Carmo, pagg. 162-163.

Esercizio 8. do Carmo, Esercizio 3-3.3

Soluzione. Ripetiamo i calcoli come nell'esercizio precedente. La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{cases} x = \cosh v\, \cos u \\ y = \cosh v\, \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Calcoliamo, ricordando che $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, 0)\\ \mathbf{x}_v &= (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \cosh v(\cos u, \sin u, -\sinh v)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 v}}(\cos u, \sin u, -\sinh v)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 v}}(\cos u, \sin u, -\sinh v)\\ &= \frac{1}{\cosh v}(\cos u, \sin u, -\sinh v)\end{aligned}$$

senza valore assoluto perché $\cosh v > 0$ sempre.

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \cosh^2 v\\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0\\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \cosh^2 v\end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-\cosh v \cos u, -\cosh v \sin u, 0)\\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sinh v \sin u, \sinh v \cos u, 0)\\ \mathbf{x}_{vv} &= (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, 0)\end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -1\\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0\\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 1\end{aligned}$$

Scriviamo il differenziale della mappa di Gauss:

$$I = \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$-d\mathbf{N}_p = I_p^{-1} \cdot II_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 v} 0 & \\ 0 & -\frac{1}{\cosh^2 v} \end{pmatrix}$$

perciò $H = \mathrm{tr}(-d\mathbf{N}_p) = 0$ (si può anche usare la formula per H nel formulario).

Le *direzioni asintotiche* sono le direzioni in cui la curvatura normale è 0 e cioè: se $\mathbf{u} = (a, b)$ deve essere

$$k_n(\mathbf{u}) = II_p(\mathbf{u}) = 0$$

In questo caso

$$II_p(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -a^2 + b^2$$

che si annulla per $a + b = 0$ opppure $a - b = 0$. Dunque le *direzioni asintotiche* sono date da $\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$ $(a + b = 0)$ e $\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v$ $(a - b = 0)$.

Le *curve asintotiche* sono curve che hanno come tangenti le direzioni asintotiche. Le curve che hanno vettore tangente $\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$ sono del

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(t, c - t)$$

dove c è costante, e cioè l'immagine in S delle rette $u + v = c$ nel dominio U della parametrizzazione della catenoide.

Allo stesso modo, le curve che hanno vettore tangente $\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v$ sono del

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(t, c + t)$$

dove c è costante, e cioè l'immagine in S della retta $u - v = -c$ nel dominio U della parametrizzazione della catenoide.

Esercizio 9. do Carmo, Esercizio 3-3.5

Soluzione. La superficie di Enneper da studiare ha parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$$

sul dominio $U = \mathbb{R}^2$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)\\ \mathbf{x}_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2u(1 + u^2 + v^2), 2v(1 + u^2 + v^2), 1 - (u^2 + v^2)^2)$$

La prima forma fondamentale è (dopo aver raccolto):

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1 + u^2 + v^2)^2\\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0\\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (1 + u^2 + v^2)^2\end{aligned}$$

e quindi

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = (1 + u^2 + v^2)^2$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-2u, 2v, 2)\\ \mathbf{x}_{uv} &= (2v, 2u, 0)\\ \mathbf{x}_{vv} &= (2u, -2v, -2)\end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 2\\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0\\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = -2\end{aligned}$$

Calcolando K e H si ha:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(1 + u^2 + v^2)^4}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0$$

e le curvature principali sono le soluzioni di $t^2 - Ht + K = 0$ e si ottiene perciò

$$k_{1,2} = \pm\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

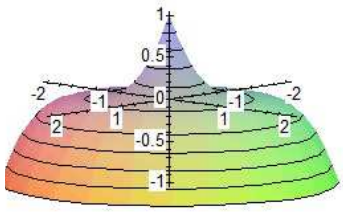
Poiché le matrici della prima e della seconda forma sono diagonali ($F = f = 0$), anche il differenziale della mappa di Gauss è diagonale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e quindi le linee coordinate sono linee di curvatura.

Esercizio 10. do Carmo, Esercizio 3-3.14

Soluzione. Conviene pensare la curva nel piano xz (invece che xy) e poi traslarla in $\alpha(u) = (u, 0, (u+1)^3)$, così la stiamo ruotando intorno all'asse z.

La curva non è parametrizzata per arcolunghezza e quindi rifacciamo i calcoli come nell'esercizio 5. La superficie S è parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, (u+1)^3)$$



Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\cos v, \sin v, 3(u+1)^2) \\ \mathbf{x}_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-3u(u+1)^2 \cos v, - - 3u(u+1)^2 \sin v, u\varphi\varphi') \\ &= u(-3(u+1)^2 \cos v, -3(u+1)^2 \sin v, 1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+9(u+1)^4}}(-3(u+1)^2 \cos v, -3(u+1)^2 \sin v, 1)$$

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + 9(u+1)^4 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2 \end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, 6(u+1)) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{6(u+1)}{\sqrt{1+9(u+1)^4}} \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0 \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{3u(u+1)^2}{\sqrt{1+9(u+1)^4}} \end{aligned}$$

Nei punti che ci interessano si ha $u = -1$ e quindi

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p = -I_p^{-1} \cdot II_p = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi i punti sono planari.