Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 17

Alberto Albano

Cominciamo oggi a parlare di forme differenziali, riprendendo la definizione data nel corso di ANALISI DUE per le 1-forme.

Avremo bisogno di ricordare le definizioni di spazio tangente e di fibrato tangente viste nella lezione 8, pagg. 3-5. Per quasi tutta questa parte, parleremo solo di spazio tangente ad $\mathbb{R}^n$ in un punto p o meglio in tutti i punti di un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nella Lezione 8 abbiamo scritto $\mathbb{R}^n_a$ per indicare la struttura di spazio affine e $\mathbb{R}^n_v$ per indicare lo spazio vettoriale. Come abbiamo visto, il fibrato tangente $T\mathbb{R}^n$ è banale e cioè

$$T\mathbb{R}^n_a = \mathbb{R}^n_a \times \mathbb{R}^n_v$$

e quindi possiamo identificare fra loro tutti gli spazi tangenti nei vari punti in modo canonico. Per questo motivo, e anche perché di solito è chiaro quello di cui si sta parlando, spesso d'ora in poi scriveremo solo $\mathbb{R}^n$, senza distinguere nella notazione tra spazio affine e spazio vettoriale.

1 Forme differenziali su un aperto U di $\mathbb{R}^n$

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Denotiamo

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ di classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

$\mathcal{C}^\infty(U)$ è un anello con le solite operazioni di somma e prodotto di funzioni (somma e prodotto di funzioni differenziabili sono ancora differenziabili) ed è anche uno spazio vettoriale reale e dunque è una $\mathbb{R}$-algebra.

1.1 L'algebra delle forme differenziali

Sia $\mathbb{R}^n$ considerato come spazio vettoriale. Fissiamo come base la *base canonica* data da $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dove $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Consideriamo ora $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ un *punto* e cioè stiamo considerando $\mathbb{R}^n$ come spazio *affine*. In p possiamo definire lo *spazio tangente* $T_p\mathbb{R}^n$ e il suo duale, lo *spazio cotangente* $T^*_p\mathbb{R}^n$.

Ricordiamo la definizione di spazio tangente: gli elementi dello spazio tangente sono i vettori tangenti e cioè i vettori tangenti alle curve che passano per p. Se parametrizziamo $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\mathbf{x}(u_1, \ldots, u_n) = p + u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$$

i vettori tangenti alle curve coordinate $\gamma_i(t) = p + t\mathbf{e}_i$ in $t = 0$ formano una base di $T_p\mathbb{R}^n$. Poiché questi vettori tangenti sono proprio $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ questo dà l'isomorfismo canonico di $\mathbb{R}^n$ (come spazio vettoriale) con $T_p\mathbb{R}^n$. Notiamo che questa parametrizzazione corrisponde a scegliere un sistema di riferimento affine con origine nel punto p e assi dati dalla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Notiamo anche che le curve $\gamma_i(t)$ sono semplicemente le *rette* passanti per p e parallele ai vettori della base canonica.

Lo spazio $T_p\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale e quindi possiamo considerare lo spazio *duale*. Questo spazio duale ha un nome: si chiama *spazio cotangente* e si denota con il simbolo $T_p^*\mathbb{R}^n$. L'asterisco indica che è uno spazio duale e si mette vicino alla lettera T, per ricordare che è il duale del *tangente*.

Chi sono gli elementi dello spazio cotangente? Sono le forme lineari su $T_p\mathbb{R}^n$ e quindi sono le funzioni lineari che ad un vettore tangente associano un numero. Abbiamo già visto esempi di tali funzioni lineari.

Esempio 1.1. Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia df_p il differenziale in p. Sappiamo che il differenziale è una funzione lineare

$$df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

e quindi $df_p \in T_p^*\mathbb{R}^n$ è un elemento dello spazio cotangente (si dice che df_p è un *vettore cotangente*).

Ricordiamo come è definito il differenziale di una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ (Lezione 8, Definizione 3.1). Se $\mathbf{w} \in T_p\mathbb{R}^n$, si considera una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Allora

$$df_p(\mathbf{w}) = (f \circ \alpha)'(0)$$

Usando questa definizione, si può trovare una base per lo spazio cotangente. Il riferimento affine considerato sopra determina delle funzioni coordinate, che indichiamo con $x_1, \ldots, x_n$, definite nel modo solito: se $q \in \mathbb{R}^n$, si può esprimere il vettore $q - p$ in termini della base canonica. I coefficienti della combinazione lineare sono le coordinate del punto q e cioè

$$q - p = x_1(q)\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n(q)\mathbf{e}_n$$

In particolare, vediamo che le coordinate di p sono $(0, \ldots, 0)$ che è corretto in quanto questo sistema di riferimento affine ha l'origine in p.

Le funzioni coordinate sono funzioni differenziabili $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e determiniamo il loro differenziale. Abbiamo già osservato che una base di $T_p\mathbb{R}^n$ è data dai vettori tangenti alle curve γ_i e scriviamo

$$\{\mathbf{e}_1|_p, \ldots, \mathbf{e}_n|_p\} = \{\gamma_1'(0), \ldots, \gamma_n'(0)\}$$

La notazione $\mathbf{e}_j|_p$ vuole ricordare che stiamo considerando vettori tangenti *applicati* in p.

La base duale di questa base è data proprio dai differenziali delle funzioni coordinate in p. Infatti la composizione $(x_i \circ \gamma_j)(t)$ è la coordinata i-esima dei punti sulla retta parallela all'asse $\mathbf{e}_j$ e quindi vale

$$(x_i \circ \gamma_j)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ t & \text{se } i = j \end{cases}$$

e perciò

$$dx_{i,p}\left(\gamma_j'(0)\right) = \frac{d}{dt}\left(x_i \circ \gamma_j\right)_{|t=0} = \delta_{ij}$$

Dunque i differenziali delle funzioni coordinate danno una base dello spazio cotangente, che indichiamo con $\{dx_{1,p}, \ldots, dx_{n,p}\}$ per indicare che è la base nel punto p.

Con la terminologia appena introdotta, possiamo adesso definire i *campi vettoriali* e le 1-*forme differenziali*. Naturalmente questi concetti sono gli stessi già noti dall'Analisi.

Definizione 1.2. Un *campo vettoriale* (tangente) X definito su un aperto U è una famiglia di vettori $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ che varia differenziabilmente in funzione di p.

Quindi un campo vettoriale può essere scritto come

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\,\mathbf{e}_i|_p$$

dove le funzioni $f_i(p)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ su U e i vettori $\mathbf{e}_i|_p$ sono i vettori tangenti alle curve coordinate nel punto $p \in \mathbb{R}^n$. In questa scrittura, le variabili indipendenti sono le coordinate del punto p.

Esempio 1.3. Sia $U = \mathbb{R}^n$, con coordinate $x_1, \ldots, x_n$. Usando in tutti gli spazi tangenti la stessa base canonica $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, un campo vettoriale X è semplicemente una funzione

$$X(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$$

In ogni punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, il valore del campo è il vettore

$$X(p) = f_1(x)\,\mathbf{e}_1 + \cdots + f_n(x)\,\mathbf{e}_n$$

e il campo vettoriale può essere interpretato come una funzione $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Se vogliamo essere più precisi, il campo X è una funzione $X : \mathbb{R}^n_a \to \mathbb{R}^n_v$, cioè una funzione che ad un *punto* (dello spazio affine $\mathbb{R}^n_a$) assegna un *vettore* (dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n_v$).

Osservazione. Se vogliamo essere veramente precisi, un campo vettoriale X è una funzione $X : \mathbb{R}^n_a \to T\mathbb{R}^n_a$, perché ad un punto $p \in \mathbb{R}^3_a$ associa un vettore $X(p) \in T_p\mathbb{R}^n_a$. Ricordiamo che c'è una proiezione canonica $\pi : T\mathbb{R}^n_a \to \mathbb{R}^n_a$ data da $\pi(p, \mathbf{v}) = p$ che associa ad ogni vettore tangente il suo punto di applicazione. Allora un campo vettoriale ha la proprietà:

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_a}$$

perché ad ogni punto p viene associato un vettore tangente *nel punto stesso* p. Questa proprietà si esprime con la frase

un campo vettoriale X è una *sezione* del fibrato tangente

Passiamo alle forme differenziali

Definizione 1.4. Una 1-*forma differenziale* è una famiglia di elementi dello spazio cotangente e quindi si può scrivere

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, dx_i$$

Osservazione. Questa scrittura è leggermente ambigua, ma è quella tradizionale e la useremo sempre. La notazione dx_i significa il differenziale della funzione coordinata x_i, ma in effetti per avere il differenziale occorre specificare anche il punto p del dominio in cui si calcola questo differenziale. Nella notazione precedente, è sottointeso che il differenziale è calcolato nel punto di cordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la variabile indipendente dei coefficienti $g_i(x)$.

Osservazione. Riprendendo l'Osservazione fatta a proposito dei campi vettoriali, si può definire il *fibrato cotangente* come l'unione di tutti gli spazi cotangenti

$$T^*\mathbb{R}^n_a = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n_a} T^*_p\mathbb{R}^n_a$$

Anche in questo caso c'è una proiezione canonica $\pi : T^*\mathbb{R}^n_a \to \mathbb{R}^n_a$ che associa ad ogni vettore cotangente in p (= forma lineare sullo spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n_a$) il "punto di applicazione" p.

Il fibrato tangente a $\mathbb{R}^n_a$ è banale e cioè tutti gli spazi tangenti nei vari punti sono canonicamente isomorfi a uno spazio vettoriale fissato $V = \mathbb{R}^n_v$. Questo ci dice che anche tutti gli spazi cotangenti sono canonicamente isomorfi allo spazio vettoriale fissato $V^* = (\mathbb{R}^n_v)^*$ e quindi possiamo usare la stessa notazione per i differenziali nei punti diversi.

Come nel caso dei campi vettoriali, una 1-forma differenziale ω è una funzione $\omega : \mathbb{R}^n_a \to T^*\mathbb{R}^n_a$, perché ad ogni punto $p \in \mathbb{R}^n_a$ associa una forma lineare $\omega_p \in T^*_p\mathbb{R}^n_a$ e, come nel caso dei campi, anche una 1-forma differenziale ha la proprietà:

$$\pi \circ \omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_a}$$

perché ad ogni punto p viene associata una forma lineare sullo spazio tangente *nel punto stesso* p. Questa proprietà si esprime con la frase

una 1-forma differenziale è una *sezione* del fibrato cotangente

Esempio 1.5. Sia $U = \mathbb{R}^3$ con coordinate x_1, x_2, x_3. Esempi di 1-forme differenziali sono

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_1\, dx_1 + (x_1x_2 + x_3)\, dx_2 - 4\, dx_3\\
\omega_2 &= x_2x_3\, dx_1 + x_1x_3\, dx_2 + x_1x_2\, dx_3\\
\omega_3 &= (x_1 + x_2^3)\, dx_1
\end{aligned}$$

Ponendo $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ si può osservare che $\omega_2 = df$ e quindi questa forma differenziale è il differenziale di una funzione. Si può dimostrare (lo faremo presto) che le forme ω_1 e ω_3 non sono il differenziale di nessuna funzione. Dunque i differenziali delle funzioni non esauriscono lo spazio vettoriale delle 1-forme differenziali.

A questo punto sfruttiamo l'algebra lineare vista nella scorsa lezione. Lo spazio cotangente in un punto $T_p^*\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale duale e quindi possiamo costruire le sue potenze esterne. La costruzione che facciamo, apparentemente astratta, avrà invece molte applicazioni in Analisi e in Geometria.

Definizione 1.6. Una *k-forma differenziale* è una famiglia di elementi delle potenze esterne k-esime dello spazio cotangente:

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} g_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

dove i coefficienti $g_{i_1 \ldots i_k}(x)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su U.

Esempio 1.7. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z). Esempi di k-forme differenziali sono

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x\, dx \wedge dy + y\, dy \wedge dz \\
\omega_2 &= (x^2 + 1)\, dx \wedge dy \wedge dz \\
\omega_3 &= z\, dx \wedge dy - y\, dx \wedge dz + x\ \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Le forme ω_1 e ω_3 sono 2-forme, invece ω_2 è una 3-forma.

Esercizio 1.8. Ci sono 4-forme differenziali su $\mathbb{R}^3$?

Osservazione. Anche le k-forme sono sezioni di opportuni fibrati, costruiti a partire dal fibrato cotangente in modo algebrico. Vedrete queste costruzioni in corsi più avanzati, per esempio Istituzioni di Geometria o in corsi di Fisica Matematica nella Laurea Magistrale

L'insieme delle k-forme differenziali su U si denota con $\Omega^k(U)$ ed è uno spazio vettoriale reale (di dimensione infinita) in quanto somma di forme differenziali e multipli scalari di forme differenziali sono ancora forme differenziali. In particolare $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ indica lo spazio vettoriale delle forme differenziali definite su tutto $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.9. Per vedere che $\Omega^1(\mathbb{R})$ ha dimensione infinita, si possono considerare le 1-forme (usiamo la coordinata x su $\mathbb{R}$)

$$\omega_1 = x\, dx, \qquad \omega_2 = x^2\, dx, \qquad \ldots, \qquad \omega_n = x^n\, dx, \ldots$$

da cui si capisce che la dimensione infinita è causata dal fatto che possiamo usare *coefficienti* presi in uno spazio vettoriale di dimensione infinita (lo spazio delle funzioni differenziabili su un aperto U).

Definizione 1.10. Sia A un anello (commutativo con unità). Un *A-modulo* M (o *modulo sull'anello* A) è un gruppo abeliano con una operazione di moltiplicazione per elementi di A che soddisfa le usuali proprietà di associatività e distributività.

Un modulo è la generalizzazione del concetto di spazio vettoriale quando gli scalari appartengono ad un anello. Naturalmente uno spazio vettoriale è un esempio di modulo.

Poiché ha senso moltiplicare una funzione $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ per una k-forma differenziale, ottenendo ancora una k-forma, $\Omega^k(U)$ è un modulo sull'anello $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Osservazione (**solo per chi conosce i prodotti tensoriali**). Si ha

$$\Omega^k(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^k T_p^*\mathbb{R}^n$$

dove $p \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato. Questo isomorfismo vale perché il fibrato cotangente di $\mathbb{R}^n$ è triviale.

Osservazione. Per definizione una k-forma differenziale è una combinazione lineare a coefficienti funzioni differenziabili di k-forme ottenute mediante il prodotto wedge dei differenziali delle funzioni coordinate. Allora la Proposizione 2.9 della Lezione 15 implica che per un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ il modulo $\Omega^k(U)$ è un *modulo libero di rango* $\binom{n}{k}$ sull'anello $\mathcal{C}^\infty(U)$. Ritroviamo quindi una sorta di dimensionalità finita.

Possiamo definire un prodotto di forme differenziali, estendendo la definizione data in precedenza: se $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\eta \in \Omega^k(U)$ scriviamo

$$\omega = \sum_I a_I(x)\, dx_I, \qquad \eta = \sum_J b_J(x)\, dx_J$$

dove usiamo la notazione con multi-indici come prima e poniamo

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I(x) b_J(x)\, dx_I \wedge dx_J$$

La Proposizione 2.10 della Lezione 15 vale con lo stesso enunciato e la stessa dimostrazione:

Proposizione 1.11. *Siano $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^s(U)$, $\theta \in \Omega^r(U)$.*

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
2. $(\omega \wedge \eta) = (-1)^{ks}(\eta \wedge \omega)$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Definiamo quindi, in analogia a quanto fatto prima

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$$

dove, per convenzione, $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$. La moltiplicazione esterna di forme rende $\Omega^*(U)$ un anello (anti)commutativo graduato. $\Omega^*(U)$ è una $\mathbb{R}$-algebra di dimensione infinita come spazio vettoriale e non finitamente generata come algebra.

$\Omega^*(U)$ ha anche una struttura di $\mathcal{C}^\infty(U)$-algebra (lasciamo al lettore studioso il compito di formulare la definizione di A-algebra, dove A è un anello): è un $\mathcal{C}^\infty(U)$-modulo di rango 2^n (una base è data dagli elementi dx_I) e come $\mathcal{C}^\infty(U)$-algebra è finitamente generata: un insieme di generatori è dato da $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.

2 Il pullback di forme differenziali

Sulle forme differenziali sono definite due importanti funzioni: il *pullback* e la *derivazione esterna*. Vediamo prima il pullback. Ricordiamo che U indica sempre un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sia $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile (ricordiamo che significa di classe $\mathcal{C}^\infty$). f induce una funzione $f^* : \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ definita da

$$f^*(g) = g \circ f$$

Notiamo che il verso di f^* è opposto a quello di f. f^* è un omomorfismo di anelli (esercizio!) e poiché $\mathcal{C}^\infty(V) = \Omega^0(V)$ possiamo interpretare questa funzione come $f^* : \Omega^0(V) \to \Omega^0(U)$. Vogliamo estendere questo omomorfismo all'algebra delle forme.

Definizione 2.1. Sia ω una k-forma su $\mathbb{R}^m$. Il *pullback* $f^*\omega$ è la k-forma su $\mathbb{R}^n$ data da

$$f^*\omega_{|p}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \ldots, df_p(\mathbf{v}_k))$$

dove $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in T_p\mathbb{R}^n$ e $df : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ è il differenziale della funzione f nel punto p.

Il significato della definizione è che il valore della forma $f^*\omega$ nel punto p applicata a certi vettori è uguale al valore della forma ω nel punto $f(p)$ applicata ad altri vettori.

La definizione appare misteriosa e perciò vediamo un esempio esplicito. Faremo tutti i calcoli in dettaglio. Vedremo però che con un po' più di teoria, molti di questi calcoli si possono semplificare notevolmente.

Esempio 2.2. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x_1, x_2) e $\mathbb{R}^3$ con coordinate (y_1, y_2, y_3). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_1 + \cos x_2, e^{x_1})$$

Consideriamo una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = y_1\, dy_1 \wedge dy_2 - y_3^2\, dy_1 \wedge dy_3$$

Prendiamo $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ l'origine e quindi $f(p) = (0, 1, 1)$. Per chiarezza, diamo un nome al pullback

$$\eta = f^*\omega$$

La forma η è una 2-forma su $\mathbb{R}^2$. Nel punto p, per definizione, η_p è una forma bilineare alternante sullo spazio $T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$, che ha per base la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Poiché η_p è una forma *bi*lineare, opera su *coppie* di vettori. Siano dunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_p\mathbb{R}^2$. Dobbiamo quindi calcolare il *numero*

$$\eta_p(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Per la multilinearità di η_p basta calcolare per i vettori di una base e poiché è alternante si ha

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \eta_p(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$$

e dunque l'unico numero da calcolare è $\eta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Per la definizione appena data

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{e}_1), df_p(\mathbf{e}_2))$$

Per prima cosa, calcoliamo $\omega_{|f(p)}$. Dobbiamo semplicemente sostituire le coordinate di $f(p) = (0, 1, 1)$ nei *coefficienti* di ω e otteniamo

$$\omega_{(0,1,1)} = -dy_1 \wedge dy_3$$

Adesso dobbiamo calcolare le immagini $df_p(\mathbf{e}_1)$ e $df_p(\mathbf{e}_2)$. Questi vettori appartengono allo spazio tangente $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$, che ha come base la base canonica $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. I vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ della base di $T_p\mathbb{R}^2$ sono i vettori tangenti alle curve coordinate per l'origine in $\mathbb{R}^2$. Queste curve hanno equazioni parametriche $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$. Si hanno le composizioni

$$(f \circ \gamma_1)(t) = (t, \sin t, e^t), \qquad (f \circ \gamma_1)(t) = (t, \cos t, 1)$$

e perciò, usando la definizione di differenziale

$$\begin{aligned} df_p(\mathbf{e}_1) = df_p\left(\gamma_1'(0)\right) &= \frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma_1\right)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(t, \sin t, e^t\right)_{|t=0} = \\ &= (1, \cos t, e^t)_{|t=0} \\ &= (1, 1, 1) \\ &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} df_p(\mathbf{e}_2) = df_p\left(\gamma_2'(0)\right) &= \frac{d}{dt}\left(f \circ \gamma_2\right)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(t, \cos t, 1\right)_{|t=0} = \\ &= (1, -\sin t, 0)_{|t=0} \\ &= (1, 0, 0) \\ &= \mathbf{f}_1 \end{aligned}$$

Dunque

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -(dy_1 \wedge dy_3)(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1)$$

Dalla definizione di prodotto esterno di forme si ha (Esempio 2.5 della Lezione 15)

$$-(dy_1 \wedge dy_3)(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1) = -\det\begin{pmatrix} dy_1(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_1(\mathbf{f}_1) \\ dy_3(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_3(\mathbf{f}_1) \end{pmatrix}$$

Ora ricordiamo che $dy_i(\mathbf{f}_j) = \delta_{ij}$ perché i differenziali $\{dy_i\}$ delle funzioni coordinate sono la base duale della base canonica $\{\mathbf{f}_i\}$. Dunque

$$-\det\begin{pmatrix} dy_1(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_1(\mathbf{f}_1) \\ dy_3(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_3(\mathbf{f}_1) \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Osserviamo che η_p è una 2-forma bilineare alternante su $\mathbb{R}^2$ e cioè $\eta_p \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^2)^*$ che ha dimensione 1. Una base è data da $dx_1 \wedge dx_2$ e quindi η_p è un multiplo scalare di $dx_1 \wedge dx_2$. Poiché

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 = (dx_1 \wedge dx_2)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

si ha $\eta_p = dx_1 \wedge dx_2$ nel punto $p = (0, 0)$

Osservazione. Tutto il calcolo precedente vale nel punto $p = (0, 0)$. Se cambiamo punto, cosa succede? Dobbiamo rifare tutti i calcoli oppure una parte non dipende dal punto?

La questione è che non abbiamo calcolato la 2-forma differenziale $\eta = f^*\omega$ ma solo η_p, la forma bilineare alternante in un punto. Negli altri punti la forma bilineare cambia e vorremmo ricavare subito un'espressione che valga in tutti i punti.

Per fare questo, studiamo le proprietà algebriche della funzione f^*. Queste proprietà semplificheranno i calcoli.

Proposizione 2.3. *Sia $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile, ω, η delle k-forme differenziali, $g \in \Omega^0(V)$ una 0-forma (cioè una funzione differenziabile).*

1. $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$
2. $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$
3. *se $\omega_1, \dots, \omega_k$ sono 1-forme, allora*

$$f^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = f^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega_k)$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono semplicemente dei calcoli, applicando la definizione:

1.

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \eta)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (\omega + \eta)_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= \omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) + \eta_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= f^*(\omega)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) + f^*(\eta)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &= (f^*\omega + f^*\eta)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f^*(g\omega)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (g\omega)_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= (g(f(p)) \cdot \omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= f^*(g)f^*\omega_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

3. omettendo per semplicità l'indicazione del punto p si ha:

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(df(\mathbf{v}_1), \dots, df(\mathbf{v}_k)) \\ &= \det(\omega_i(df(\mathbf{v}_j))) \\ &= \det(f^*\omega_i(\mathbf{v}_j)) \\ &= f^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

□

Da queste proprietà si può ottenere una descrizione molto semplice del pullback: è la *formula di sostituzione*, ben nota dalla regola di integrazione. Per vedere ciò, fissiamo le coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ e $(y_1, \dots, y_m)$ in $\mathbb{R}^m$. La funzione $f : U \to V$ si scrive in componenti

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

Sia ora $\omega = \sum a_I dy_I$ una k-forma su V. Usando la proposizione appena dimostrata possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^* \left(\sum a_I dy_I \right) \\ &= \sum f^* \left(a_I dy_I \right) && \text{per la 1.} \\ &= \sum f^* \left(a_I \right) f^* \left(dy_I \right) && \text{per la 2.} \\ &= \sum f^*(a_I) \left(f^* dy_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(f^* dy_{i_k} \right) && \text{per la 3.} \end{aligned}$$

e poiché

$$f^*(dy_i)(\mathbf{v}) = dy_i(df(\mathbf{v})) = d(y_i \circ f)(\mathbf{v}) = df_i(\mathbf{v})$$

otteniamo

$$f^*\omega = \sum a_I(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

e cioè per calcolare $f^*\omega$ si effettua in ω la "sostituzione" $y_i = f_i$ e $dy_i = df_i$, proprio come nella regola di integrazione per sostituzione. Questo perché, come suggerisce la notazione di Leibniz per gli integrali, l'integrando è una forma differenziale!

Esempio 2.4. Ricalcoliamo l'esempio precedente: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_1 + \cos x_2, e^{x_1})$$

e $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ data da

$$\omega = y_1 \, dy_1 \wedge dy_2 - y_3^2 \, dy_1 \wedge dy_3$$

Le componenti di f sono

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = e^{x_1}$$

I differenziali sono (usando la definizione usuale dell'analisi)

$$\begin{aligned} df_1 &= dx_1 + dx_2 \\ df_2 &= \cos x_1 \, dx_1 - \sin x_2 \, dx_2 \\ df_3 &= e^{x_1} \, dx_1 \end{aligned}$$

e quindi "sostituendo"

$$\begin{aligned} \eta &= f^*\omega \\ &= f_1 \, df_1 \wedge df_2 - f_3^2 \, df_1 \wedge df_3 \\ &= (x_1 + x_2) \, (dx_1 + dx_2) \wedge (\cos x_1 \, dx_1 - \sin x_2 \, dx_2) - e^{2x_1} \, (dx_1 + dx_2) \wedge e^{x_1} \, dx_1 \\ &= -(x_1 + x_2) \sin x_2 \, dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 + x_2) \cos x_1 \, dx_2 \wedge dx_1 - e^{3x_1} \, dx_2 \wedge dx_1 \\ &= -[(x_1 + x_2)(\sin x_2 + \cos x_1) - e^{3x_1}] \, dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Osserviamo che per calcolare η nel punto $p = (0, 0)$ basta sostituire le coordinate di p

$$\eta_{(0,0)} = dx_1 \wedge dx_2$$

proprio come ottenuto prima. Però adesso abbiamo l'espressione generale e quindi per ottenere η_p per un qualunque altro punto p, basta sostituire le coordinate senza dover rifare tutti i calcoli.

Il punto 1. della Proposizione 2.3 dice che $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ è un omomorfismo di gruppi abeliani. Vediamo adesso che è anche un omomorfismo di anelli e cioè rispetta il prodotto di forme:

Proposizione 2.5. *Sia $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile, ω, η due forme differenziali (qualunque) su V. Allora*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$$

Dimostrazione. Come prima poniamo $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$ e siano $\omega = \sum a_I \, dy_I$, $\eta = \sum b_J \, dy_J$. Si ha

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta) &= f^* \left(\sum_{I,J} a_I b_J \, dy_I \wedge dy_J \right) \\ &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \ldots, f_m) \, b_J(f_1, \ldots, f_m) \, df_I \wedge df_J \\ &= \sum_I a_I(f_1, \ldots, f_m) \, df_I \wedge \sum_J b_J(f_1, \ldots, f_m) \, df_J \\ &= f^*\omega \wedge f^*\eta \end{aligned}$$

□

Il pullback ha ancora una importante proprietà: è *funtoriale*, cioè rispetta la composizione di applicazioni:

Proposizione 2.6. *Se $f : U \to V$ e $g : V \to W$ sono due funzioni differenziabili, allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Omega^*(W)$. Allora

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*\omega &= \sum_I a_I((g \circ f)_1, \ldots, (g \circ f)_n) \, d(g \circ f)_I \\ &= \sum_I a_I(g_1(f_1, \ldots, f_m), \ldots, g_n(f_1, \ldots, f_m)) \, dg_I(df_1, \ldots, df_m) \\ &= f^*(g^*\omega) = (f^* \circ g^*)(\omega) \end{aligned}$$

□