Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 18

Alberto Albano

Nella Lezione scorsa abbiamo introdotto le forme differenziali e definito il pullback, come generalizzazione della composizione di funzioni. In questa lezione vediamo un'altra funzione definita sullo spazio delle forme, la *derivata esterna*, che è la generalizzazione del differenziale.

Studieremo le prime proprietà della derivazione esterna, parlando di forme *chiuse* e forme *esatte*, concetti già noti nel caso delle 1-forme dal corso di ANALISI DUE.

Concludiamo questa lezione con una relazione importante fra il pullback e la derivazione esterna.

1 La derivazione esterna

Passiamo ora alla derivazione esterna, che generalizza alle k-forme il differenziale di una funzione (cioè di una 0-forma).

Abbiamo visto nell'esempio 1.1 della Lezione 17 che data $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, il suo differenziale in un punto $p \in U$ è un'applicazione lineare $T_pU \to T_{g(p)}\mathbb{R}$, e cioè un elemento dello spazio cotangente T_p^*U.

Se facciamo variare il punto p otteniamo una 1-forma differenziale. Usando la base data dai differenziali delle funzioni coordinate dx_i, questa forma si scrive

$$dg = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, dx_i$$

con opportune funzioni coefficienti $g_i(x)$. Chi sono queste funzioni? Per capirlo, valutiamo dg sui vettori di una base: nello spazio tangente T_pU, una base è data dai vettori $\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\}$ (i vettori della base canonica "applicati" in p). Calcoliamo allora

$$dg_p(\mathbf{e}_j|_p) = \sum_{i=1}^{n} g_i(p)\, dx_i(\mathbf{e}_j|_p) = g_j(p)$$

perché $dx_i(\mathbf{e}_j|_p) = \delta_{ij}$. D'altra parte, il vettore $\mathbf{e}_j|_p$ è il vettore tangente alla curva $\gamma_j(t) = p + t\mathbf{e}_j$ e quindi, per definizione di differenziale

$$dg_p(\mathbf{e}_j|_p) = \frac{d}{dt}\,(g \circ \gamma_j)_{|t=0} = \frac{\partial g}{\partial x_j}(p)$$

Confrontando le due espressioni vediamo che i coefficienti $g_j(x)$ non sono altro che le derivate parziali rispetto alle variabili $(x_1, \ldots, x_n)$ e quindi possiamo scrivere

$$dg_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)\, dx_i$$

che è la scrittura usuale del differenziale di una funzione. Poiché il differenziale di una funzione è una 1-forma, otteniamo una funzione

$$d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$$

Per le proprietà solite della derivazione

$$d(f+g) = df + dg, \qquad d(\lambda f) = \lambda\, df$$

d è un'applicazione lineare fra spazi vettoriali e inoltre d ha un comportamento speciale rispetto al prodotto: soddisfa la regola di Leibniz, cioè

$$d(fg) = g\, df + f\, dg$$

Definiamo adesso un operatore che trasforma k-forme in $(k+1)$-forme con proprietà analoghe.

Definizione 1.1. Sia $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$ una k-forma su $U \subseteq \mathbb{R}^n$. La *derivata esterna* $d\omega$ di ω è

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

La derivata esterna si ottiene dunque prendendo il *differenziale dei coefficienti*, e dunque delle 1-forme, e moltiplicandoli per i termini dx_I. In questo modo il grado della forma sale di 1.

Esempio 1.2. Facciamo un esempio per forme in $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Se $\omega = x_2\, dx_1 + \sin(x_1x_3)\, dx_2 + x_1^2\, dx_3$ è una 1-forma si ha

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(x_2) \wedge dx_1 + d\sin(x_1x_3) \wedge dx_2 + d(x_1^2) \wedge dx_3 \\
&= -dx_1 \wedge dx_2 + (x_3 \cos(x_1x_3)\, dx_1 + x_1 \cos(x_1x_3)\, dx_3) \wedge dx_2 + 2x_1\, dx_1 \wedge dx_3 \\
&= -dx_1 \wedge dx_2 + x_3 \cos(x_1x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 \cos(x_1x_3)\, dx_3 \wedge dx_2 + 2x_1\, dx_1 \wedge dx_3 \\
&= (x_3 \cos(x_1x_3) - 1)\, dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1\, dx_1 \wedge dx_3 - x_1 \cos(x_1x_3)\, dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

che esprime la 2-forma $d\omega$ come combinazione lineare (a coefficienti funzioni) delle tre forme di base $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_1 \wedge dx_3$ e $dx_2 \wedge dx_3$.

Esempio 1.3. Vediamo adesso un esempio che dovrebbe essere familiare dal corso di ANALISI DUE. Consideriamo una 1-forma su $\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y)

$$\omega = P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

La derivata esterna è:

$$\begin{aligned}
d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\
&= (P_x\, dx + P_y\, dy) \wedge dx + (Q_x\, dx + Q_y\, dy) \wedge dy \\
&= (Q_x - P_y)\, dx \wedge dy
\end{aligned}$$

e riconosciamo in ω e $d\omega$ i due integrandi della formula di Gauss-Green nel piano, vedi per esempio Pagani-Salsa, Teorema 3.2 a pag. 492.

I domini di integrazione sono rispettivamente il bordo orientato ∂D e il dominio D e quindi possiamo scrivere la formula di Gauss-Green come

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

Il teorema di Stokes che vedremo alla fine del corso sarà la generalizzazione di questo enunciato per forme di grado qualunque.

Esempio 1.4. Sia $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ una n-forma su $\mathbb{R}^n$. Allora $d\omega = 0$ senza bisogno di fare calcoli, perché non ci sono forme non nullo di grado superiore alla dimensione dello spazio.

In effetti si avrebbe

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e in ogni addendo della somma c'è un dx_i ripetuto e dunque tutti gli addendi sono nulli.

Cominciamo a studiare le proprietà della derivazione esterna.

Proposizione 1.5. *Siano ω, η due forme differenziali su $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ *e* $d(c\omega) = c\, d\omega$*, per* $c \in \mathbb{R}$
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$*, per* ω *una* k*-forma*

Dimostrazione.

1. Chiaro dalla definizione.
2. Scriviamo $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$, $\eta = \sum b_J\, dx_J$. Allora:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J)\, dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J\, da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I\, db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{I,J} a_I\, dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

□

Ricordiamo che con $\Omega^*(U)$ abbiamo indicato l'algebra (graduata) delle forme differenziali su U di ogni grado. $\Omega^*(U)$ è uno spazio vettoriale reale e un anello, con la moltiplicazione data dal prodotto esterno.

La derivazione esterna è dunque una funzione $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$. Allora la 1. dice che d è $\mathbb{R}$-lineare (cioè d è un'applicazione lineare) e la 2. dice che soddisfa la regola di Leibniz, con una correzione di segno poiché la moltiplicazione in

$\Omega^*(U)$ è anticommutativa graduata. Una funzione con queste proprietà viene detta una *derivazione.*

Poiché d è un endomorfismo di $\Omega^*(U)$, possiamo comporlo con se stesso e cioè possiamo fare la *derivata della derivata*, come si fa con le funzioni con la derivata seconda e quelle di ordine superiore. Però la derivazione esterna ha una proprietà molto caratteristica, le cui conseguenze sono di estrema importanza nello studio della geometria e dell'analisi.

Proposizione 1.6. *Sia $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ la derivazione esterna. Allora:*

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

Dimostrazione. Cominciamo con dimostrare l'enunciato nel caso ω una 0-forma, cioè una funzione $f : U \to \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j\right) \end{aligned}$$

I termini con $i = j$ si annullano perché $dx_i \wedge dx_i = 0$. Inoltre, la funzione f è differenziabile (ricordiamo che vuol dire di classe $\mathcal{C}^\infty$) e quindi le derivate seconde miste sono uguali mentre $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ e si ottiene

$$d(df) = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Sia ora $\omega = \sum a_I\, dx_I$ una forma qualunque. Per la linearità di d possiamo supporre $\omega = a_I\, dx_I$ e allora, dalla definizione di d e dalla regola del prodotto si ha

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I)$$

Il coefficiente a_I è una funzione e quindi, per quello che abbiamo appena dimostrato, $d(da_I) = 0$. Inoltre, dx_I ha coefficiente costante 1 e quindi

$$d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0.$$

Dunque, $d(d\omega) = 0$. $\square$

2 La coomologia di de Rham

L'enunciato della Proposizione 1.6 si ricorda, a parole, con la frase

$$\boxed{\quad d \text{ quadro è uguale a zero} \quad}$$

ed ha un'interpretazione algebrica importante. Poiché d porta k-forme in $(k+1)$-forme, possiamo considerare la seguente successione di spazi vettoriali e applicazioni lineari:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U) \xrightarrow{d} \dots$$

La Proposizione 1.6 dice che comporre due applicazioni lineari consecutive dà 0 e cioè che l'*immagine* di un'applicazione è contenuta nel *nucleo* di quella successiva. Definiamo allora:

$$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) = k\text{-forme su } U \text{ } \textit{chiuse}$$

$$B^k(U) = \operatorname{Im} d : \Omega^{k-1}(U) \to \Omega^k(U) = k\text{-forme su } U \text{ } \textit{esatte}$$

Per definizione, le forme *chiuse* sono quelle la cui derivata esterna è nulla, mentre le forme *esatte* sono quelle che sono la derivata esterna di una forma di grado inferiore.

La terminologia è la stessa di quella imparata in Analisi per le 1-forme: se ω è una 1-forma, allora ω *chiusa* significa che $d\omega = 0$ mentre ω *esatta* significa che esiste una funzione f tale che $\omega = df$.

$Z^k(U)$ e $B^k(U)$ sono entrambi sottospazi vettoriali di $\Omega^k(U)$ e la Proposizione 1.6 dice

$$B^k(U) \subseteq Z^k(U)$$

e cioè *tutte le forme esatte sono chiuse* o anche *condizione* ***necessaria*** *perché una forma sia esatta è che sia chiusa.*

Osserviamo che verificare se una forma ω è chiusa o no è semplice, perché basta calcolare delle derivate e poi un'espressione algebrica, mentre decidere se una forma ω è esatta è di solito difficile perché significa trovare una *primitiva* e cioè una forma η per cui $\omega = d\eta$. Dunque una condizione necessaria è utile, perché evita di cercare primitive che possiamo facilmente stabilire non esistono.

Vista l'inclusione dei sottospazi, possiamo formare il quoziente:

Definizione 2.1. Lo spazio vettoriale quoziente

$$H^k_{dR}(U) = Z^k(U)/B^k(U)$$

viene detto il *k-esimo gruppo di coomologia di de Rham* dell'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Osservazione. $H^k_{dR}(U)$ è in realtà uno spazio vettoriale reale, ma il nome "gruppo" è tradizionale e quindi lo useremo anche noi. Certamente una spazio vettoriale è un gruppo rispetto alla somma. Quando parliamo di "gruppi di coomologia", ci interessa solo la struttura di somma.

Osserviamo il prefisso "co"-omologia, che ci ricorda che stiamo usando lo spazio "co"-tangente e più in generale, che stiamo usando spazi vettoriali "duali": il prefisso "co" si usa per indicare il duale a qualcosa di già definito. Quindi la coomologia dovrebbe essere il duale di un'altra teoria, l'*omologia*. Vedremo un esempio molto speciale di teoria omologica nelle prossime lezioni.

$H^k_{dR}(U)$ è detto "k-esimo" perché si ottiene usando le forme differenziali di grado k. Quindi, per un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abbiamo $n+1$ gruppi che possiamo considerare

$$H^0_{dR}(U), \quad H^1_{dR}(U), \quad \dots, \quad H^n_{dR}(U)$$

Ultima osservazione: questi gruppi sono nominati in onore del matematico svizzero Georges de Rham (1903-1990). Come al solito, trovate dettagli sulla vita e le opere matematiche di de Rham su MacTutor, all'indirizzo

`http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Rham.html`

Questi gruppi sono definiti usando la struttura differenziabile di $\mathbb{R}^n$ e dei suoi aperti e esprimono proprietà delle funzioni e forme differenziali. Per esempio, dire che $H^k_{dR}(U) = 0$ significa dire che *tutte le k-forme chiuse su U sono esatte*: se $dw = 0$ allora esiste η tale che $\omega = d\eta$ e cioè esiste su U una primitiva di ω. Questo non è sempre vero: se $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ conosciamo (dai corsi di Analisi) una 1-forma chiusa ma non esatta

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

e dunque $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$. Notiamo che la forma ω non è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi non definisce un elemento in $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2)$ (che invece è nullo).

In realtà questi gruppi hanno un significato puramente topologico: se U, V sono due aperti *omeomorfi* di $\mathbb{R}^n$ allora $H^k_{dR}(U) \cong H^k_{dR}(V)$ per ogni k. Questo è un caso particolare di un importante teorema, il *teorema di de Rham*, di cui vedremo in seguito l'enunciato preciso ma non la dimostrazione, che è troppo avanzata per il livello di questo corso. Come introduzione a questa teoria, in una prossima lezione calcoleremo $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n)$ e vedremo sotto quali ipotesi *topologiche* su U si può affermare che la coomologia di de Rham è nulla.

Questo enunciato garantirà quindi la possibilità di trovare delle primitive (e quindi di risolvere un problema di integrazione) non appena siano soddisfatte semplici condizioni necessarie (la chiusura della forma).

La coomologia di de Rham, compresa la dimostrazione del teorema di de Rham, fa parte del programma del corso di "Geometria Superiore" della Laurea Magistrale, mentre una esposizione (abbastanza) completa di teorie omologiche e coomologiche viene fatta nel corso di "Topologia Algebrica".

3 Derivazione esterna e pullack

Concludiamo questa lezione con un'importante proprietà di compatibilità fra il pullback e la derivazione esterna.

Proposizione 3.1. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile e sia $\omega \in \Omega^k(V)$ una k-forma differenziale su V. Allora:*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Dimostrazione. Anche in questo caso dimostriamo prima l'enunciato per ω una 0-forma. Sia dunque $\omega = g : V \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile data da $(y_1, \dots, y_m) \mapsto g(y_1, \dots, y_m)$ e siano $(x_1, \dots, x_n)$ le coordinate su $\mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^*\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i}\,dy_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x_j}\,dx_j = d(g\circ f) \\ &= d(f^*g) \end{aligned}$$

Sia ora $\omega = \sum_I a_I \, dx_I$. Usando il fatto che f^* è un omomorfismo di anelli, e cioè commuta le somme e il prodotto esterno, e il caso appena dimostrato si ha

$$\begin{aligned} f^*(dw) &= f^*\left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right) = \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge f^*(dx_I) = d\left(\sum_I f^*(a_I)\, f^*(dx_I)\right) \\ &= d(f^*\omega). \end{aligned}$$

□

Questa Proposizione esprime la commutatività di d e f^*, fatto che sarà spesso usato nel seguito: dice che la definizione della derivata esterna è "indipendente dalle coordinate", cioè possiamo prima derivare e poi sostituire oppure prima effettuare la sostituzione e poi derivare ottenendo lo stesso risultato.

Il risultato è particolarmente importante se consideriamo funzioni, campi vettoriali e forme differenziali definite su una superficie regolare (o più in generale su una varietà differenziabile, come vedrete nei corsi della Magistrale) e consente di definire la derivazione esterna anche in questo caso. Vedremo alcuni esempi dell'uso di questa proposizione più avanti nel corso.