Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 20

Alberto Albano

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e ω una forma differenziale su U. La proprietà "*ω è chiusa*" è semplice da verificare (basta calcolare la derivata esterna) e come abbiamo visto è una condizione necessaria per la proprietà "*ω è esatta*" e cioè ω ammette (su U) una primitiva. Questa proprietà è importante, per esempio è esattamente la definizione di *campo conservativo*, per cui la primitiva è il potenziale.

Con il nome di *Lemma di Poincaré* si indicano enunciati che affermano che, sotto opportune ipotesi topologiche sull'aperto U, tutte le forme chiuse su U sono esatte. Abbiamo quindi, sotto queste ipotesi, un metodo semplice per determinare l'integrabilità di una forma.

In questa lezione vediamo vari esempi di Lemmi di Poincaré, per forme di grado 1 e per k-forme e con differenti ipotesi topologiche. Il caso delle 1-forme su un aperto stellato è noto dal corso di ANALISI DUE e lo ripetiamo qui all'inizio della lezione, più che altro per fissare le notazioni ed estendere la dimostrazione vista in Analisi da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$ (la dimostrazione è identica).

Il caso del dominio U semplicemente connesso è stato visto in ANALISI DUE, ma senza dimostrazione. In questa lezione vedremo una dimostrazione completa, che dipende dal fatto di poter definire l'integrale di 1-forme differenziali *chiuse* anche su cammini continui e non solo regolari a tratti.

Per le k-forme c'è un risultato molto generale, il Teorema 3.4 che riguarda gli aperti U *contraibili* e non solo semplicemente connessi. L'enunciato del Teorema 3.4 e la discussione sulla coomologia di de Rham che segue FANNO PARTE del programma d'esame.

Invece il Lemma 3.5, il Teorema 3.6 e la dimostrazione del Teorema 3.4 NON FANNO PARTE DEL PROGRAMMA D'ESAME. Siete naturalmente invitati a leggere queste pagine, ma non obbligati.

Alla fine della lezione, ci sono alcuni esercizi, in parte svolti, sulle forme differenziali.

1 Il caso U stellato

Cominciamo con un enunciato che vale per le 1-forme, sotto ipotesi "geometriche" sull'aperto U, piuttosto che topologiche.

Definizione 1.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $P \in U$. U si dice *stellato rispetto a* P se per ogni $Q \in U$ il segmento PQ è contenuto in U.

Per esempio, se U è convesso allora U è stellato rispetto ad ogni suo punto. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è stellato.

Proposizione 1.2 (Lemma di Poincaré per le 1-forme)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto stellato e sia $\omega \in \Omega^1(U)$ una 1-forma. Se ω è chiusa allora ω è esatta, cioè esiste $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre, a meno di un cambiamento di coordinate mediante traslazione, che il punto P rispetto a cui U è stellato sia l'origine. La forma ω si scrive

$$\omega = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$$

e l'ipotesi che sia chiusa significa che per $1 \le i, j \le n$ si ha

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

Definiamo $f : U \to \mathbb{R}$ come

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i \right) dt$$

Dall'ipotesi U stellato rispetto all'origine si ha che i termini sotto il segno di integrale sono definiti e l'integrando è continuo rispetto a t e dunque l'integrale esiste. Dimostriamo adesso che $df = \omega$. Per fare ciò, dobbiamo verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$$

Poiché la funzione integranda è differenziabile, possiamo usare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_j \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_j(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_j \right) dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_j \right) t + a_i(tx_1, \ldots, tx_n) \right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_j \right) t + a_i(tx_1, \ldots, tx_n) \right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(a_i(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot t) = \big[a_i(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot t\big]_0^1 \\
&= a_i(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

□

Questa dimostrazione è la stessa vista nel corso di ANALISI DUE e il passaggio fondamentale è il quarto uguale, dove usiamo l'ipotesi di chiusura per riscrivere l'integrando.

2 Il caso U semplicemente connesso

L'ipotesi che U sia stellato è piuttosto forte ed è interessante chiedersi se sotto ipotesi più deboli si possa comunque affermare qualcosa sull'esattezza delle 1-forme usando una condizione di natura topologica.

Per prima cosa stabiliamo una relazione fra esattezza e integrale di una 1-forma su cammini. Cominciamo con il caso in cui il cammino α sia differenziabile:

Definizione 2.1. Sia $\alpha : [a, b] \to U$ una mappa differenziabile e sia $\omega \in \Omega^1(U)$. Poniamo

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \alpha^* \omega$$

dove α^* è il pullback di forme.

Questa definizione è la stessa della Definizione 2.2, pag. 41 del Pagani-Salsa (integrale curvilineo di seconda specie). L'uso della nozione di pullback rende la definizione di integrale e la notazione molto più semplice.

Notiamo che se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è un cambiamento di parametro (cioè $\varphi'(s) \neq 0 \forall s$), allora

$$\int_\alpha \omega = \int_{\alpha \circ \varphi} \omega$$

se e solo se $\varphi'(s) > 0 \forall s$ e cioè se φ mantiene l'orientazione. Se invece $\varphi'(s) < 0 \forall s$ allora l'integrale cambia segno.

Osserviamo anche che basta che il cammino sia differenziabile a tratti. L'integrale sarà allora la somma degli integrali sugli intervalli su cui α è differenziabile. In termini di integrali, è facile caratterizzare le 1-forme esatte.

Proposizione 2.2. *Sia $\omega \in \Omega^1(U)$, con U aperto* connesso. *Sono equivalenti:*

1. *ω è esatta in U;*
2. *$\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi del cammino α, per ogni cammino α in U;*
3. *$\int_\alpha \omega = 0$, per tutte le curve* chiuse *α in U.*

Dimostrazione.
1. $\implies$ 2. Se $\omega = df$ è esatta, allora

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \alpha^*(df) = \int_a^b d(\alpha^*(f)) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

e quindi l'integrale dipende solo dagli estremi del cammino. La commutatività fra il pullback e la derivazione esterna (Proposizione 3.1, Lezione 18) rende questa dimostrazione immediata.
2. $\iff$ 3. Immediato dalla definizione di integrale e dal suo comportamento cambiando l'orientazione.
2. $\implies$ 1. Fissiamo un punto $p \in U$ e per ogni $x \in U$ sia α un cammino che congiunge p e x. Definiamo

$$f(x) = \int_\alpha \omega$$

dove poniamo $\omega = \sum_i a_i dx_i$. Per ipotesi la funzione $f(x)$ è ben definita e vogliamo dimostrare che $\omega = df$. Basta dunque calcolare le derivate parziali di f. Sia $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ e consideriamo la curva $c_{i,t}(s) = x + s\mathbf{e}_i$, per $0 \le s \le t$. La curva $c_{i,t}$ è un segmento parallelo all'asse i-esimo che congiunge il punto x e il punto $x + t\mathbf{e}_i$ e, per ogni t sufficientemente piccolo, è tutto contenuto nell'aperto U. Dunque:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{f(x + t\mathbf{e}_i) - f(x)\} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{\alpha + c_{i,t}} \omega - \int_\alpha \omega \right\} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{c_{i,t}} \omega && \text{per l'additività dell'integrale} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t a_i(x + s\mathbf{e}_i)\, ds && \text{pullback di } \omega \text{ lungo } c_{i,t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{a_i(x + \bar{s}\mathbf{e}_i) \cdot t}{t} && 0 < \bar{s} < t \text{ per il teorema del valor medio} \\
&= a_i(x)
\end{aligned}$$

□

Osservazione. L'ipotesi è che U sia *connesso*, però nell'implicazione 2. $\Longrightarrow$ 1. usiamo il fatto che sia possibile trovare un cammino che congiunge p e x, cioè serve che U sia *connesso per archi*.

È un fatto non (troppo) difficile da dimostrare che tutti gli *aperti connessi* di $\mathbb{R}^n$ sono connessi per archi. Provate a dimostrare questo fatto per esercizio. Se non riuscite, leggete il Manetti, Definizione 10.4 e Proposizione 10.5.

Poiché faremo un'ipotesi *topologica* su U, abbiamo bisogno di considerare tutti i cammini e non solo i cammini differenziabili. Un uso interessante del Lemma di Poincaré per aperti stellati permette di estendere la definizione di integrale di una forma *chiusa* su cammini continui.

Definizione 2.3. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k-forma. ω si dice *localmente esatta* se per ogni $p \in U$ esiste un intorno $p \in V_p \subseteq U$ e una $(k-1)$-forma $\eta \in \Omega^{k-1}(V_p)$ tale che $\omega = d\eta$ su V_p.

Per calcolare $d\omega$ in p dobbiamo calcolare le derivate parziali dei coefficienti e dunque "localmente esatta $\Longrightarrow$ chiusa", poiché basta conoscere ω in un intorno di p. D'altra parte, per ogni $p \in U$ esiste una palla di centro p e raggio ε contenuta in U e poiché le palle sono aperti stellati, dal Lemma di Poincaré per gli aperti stellati si ottiene che per le 1-forme "chiusa $\Longrightarrow$ localmente esatta".

Sia $\alpha : [a, b] \to U$ una curva differenziabile e ω una 1-forma chiusa. Poiché ω è localmente esatta, per ogni punto $p \in U$ esiste una palla aperta $B_p \subseteq U$ su cui ω è esatta. Gli aperti $\{\alpha^{-1}(B_p)\}$ formano un ricoprimento aperto di $[a, b]$ e questo ricoprimento ha un numero di Lebesgue d (l'intervallo $[a, b]$ è metrico compatto). Possiamo dunque trovare una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$$

(basta che $t_{i+1} - t_i < d$) tale che $\alpha_i = \alpha_{|[t_i, t_{i+i}]}$ ha immagine contenuta in una palla B_i su cui ω è esatta e cioè $\omega = df_i$ su B_i. Allora

$$\int_\alpha \omega = \sum_i \int_{\alpha_i} \omega = \sum_i [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

Osserviamo che per trovare la partizione abbiamo usato solo la *continuità* della funzione α e quindi possiamo fare lo stesso ragionamento per un cammino continuo e *definire* l'integrale con la sommatoria a destra e cioè:

Definizione 2.4. Sia $\omega \in \Omega^1(U)$ una 1-forma *chiusa* e sia $\alpha : [a, b] \to U$ un cammino *continuo*. Consideriamo una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$$

tale che $\alpha_i = \alpha_{|[t_i, t_{i+i}]}$ ha immagine contenuta in una palla B_i su cui ω è esatta e cioè $\omega = df_i$ su B_i. Allora definiamo

$$\int_\alpha \omega = \sum_i [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

Poiché ω è una 1-forma chiusa, è anche localmente esatta e quindi possiamo trovare una partizione come nella Definizione, usando il ragionamento precedente. Per avere una buona definizione di integrale, dobbiamo adesso dimostrare che la somma è indipendente dalla partizione scelta.

Sia $\mathcal{P}$ una partizione e sia $\mathcal{P}'$ il raffinamento che si ottiene aggiungendo un punto $t' \in (t_i, t_{i+1})$. Poiché questo punto ha immagine $\alpha(t') \in B_i$ possiamo usare due volte la primitiva locale f_i ottenendo

$$[f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t'))] + [f_i(\alpha(t')) - f_i(\alpha(t_i))] = [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

e cioè la somma non cambia raffinando la partizione. Se ora $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due partizioni qualunque, possiamo considerare $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Questo è un raffinamento comune e la somma su $\mathcal{R}$ è la stessa che su $\mathcal{P}$ e su $\mathcal{Q}$, e quindi la somma è indipendente dalla partizione.

Abbiamo dunque ottenuto un concetto di integrale di una 1-forma chiusa su un cammino continuo. Analizziamo adesso l'ipotesi topologica che vogliamo mettere su U. Per comodità, ripetiamo qui le definizioni standard di omotopia di cammini e di spazio semplicemente connesso.

Definizione 2.5. Uno spazio topologico X connesso per archi si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso α in X è omotopo ad un cammino costante.

Si può dare una definizione equivalente di semplicemente connesso utilizzando l'omotopia a estremi fissi. Sia X uno spazio topologico e $\alpha : [0, 1] \to X$ e $\beta : [0, 1] \to X$ due cammini continui con gli stessi estremi, cioè $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$.

Definizione 2.6. I cammini α e β si dicono *omotopi a estremi fissi* se esiste una funzione continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ tale che

1. $H(s, 0) = \alpha(s),\ H(s, 1) = \beta(s) \qquad \forall s \in [0, 1]$
2. $H(0, t) = x_0,\ H(1, t) = x_1 \qquad \forall t \in [0, 1]$

La 1. dice che H è un'omotopia fra α e β e la 2. dice che durante l'omotopia gli estremi dei cammini rimangono fissati.

Si dimostra facilmente che l'omotopia ad estremi fissi è una relazione di equivalenza e si ha

Proposizione 2.7. *Uno spazio topologico X è semplicemente connesso se e solo se tutti i cammini con gli stessi estremi sono omotopi ad estremi fissi.*

Dimostrazione. Esercizio (di GEOMETRIA DUE). □

Esempio 2.8. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso. Invece $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso.

Possiamo adesso dimostrare il teorema centrale di questo paragrafo:

Teorema 2.9. *Sia ω una 1-forma chiusa su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e siano α, β due cammini in U omotopi ad estremi fissi. Allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

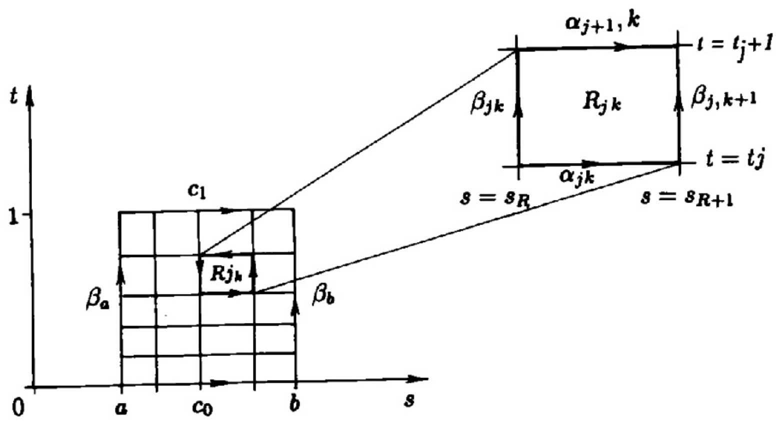
Dimostrazione. Sia H un'omotopia a estremi fissi fra α e β. La funzione H ha dominio $R = [a, b] \times [0, 1]$.

Poiché ω è chiusa, è localmente esatta. Come in precedenza per ogni punto $p \in U$ esiste una palla aperta B_p su cui ω è esatta. La famiglia di aperti $\{H^{-1}(B_p)\}$ è un ricoprimento aperto di R e come prima questo ricoprimento ha un numero di Lebesgue d, perché R è metrico compatto.

Dividiamo R in rettangoli R_{jk} con lati paralleli agli assi, in modo che ogni rettangolo abbia diametro minore di d (il diametro di un rettangolo è la lunghezza della sua diagonale) e quindi ogni $H(R_{jk})$ è contenuto in uno degli aperti B_p su cui ω è esatta. Allora

$$\int_{\partial R_{jk}} \omega = 0$$

dove ∂R_{jk} è il bordo del rettangolo R_{jk} perché il bordo è una curva chiusa contenuta in un aperto su cui ω è esatta. In effetti per avere una curva in U dovremmo scrivere $H(\partial R_{jk})$. Per semplicità di notazione, tralasciamo l'indicazione di H qui e nella scrittura dei singoli lati di cui è composto il bordo.



Indichiamo dunque i lati del bordo con a_{jk}, $b_{j,k+1}$, $a_{j+1,k}$, b_{jk}, dove i lati a sono orizzontali orientati da sinistra a destra e i lati b sono verticali orientati dal basso verso l'alto. Sommando gli integrali su tutti questi bordi, si ottiene

$$0 = \sum_{jk} \int_{\partial R_{jk}} \omega = \sum_{jk} \left\{ \int_{a_{jk}} \omega + \int_{b_{j,k+1}} \omega - \int_{a_{j+1,k}} \omega - \int_{b_{jk}} \omega \right\}$$

I termini che corrispondono ai lati interni al rettangolo R compaiono due volte (perché sono lati di rettangoli adiacenti) con segni opposti (perché hanno orientazioni opposte) e quindi si cancellano a due a due. Nella somma rimangono solo i lati esterni del rettangoli, con la stessa orientazione di prima e cioè

$$0 = \int_\alpha \omega + \int_{c_b} \omega - \int_\beta \omega - \int_{c_a} \omega$$

dove $c_a = H(a,t)$ e $c_b = H(b,t)$ sono i lati verticali. Ma poiché l'omotopia è a estremi fissi, queste curve sono costanti e quindi questi integrali sono nulli. Si ottiene finalmente

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

□

Quindi per una 1-forma *chiusa*, l'integrale dipende solo dalla classe di omotopia (a estremi fissi) del cammino di integrazione.

Se quindi U è semplicemente connesso e ω è una 1-forma chiusa, tutti i cammini con gli stessi estremi sono omotopi e l'integrale $\displaystyle\int_a^b \omega$ non dipende dal cammino di integrazione ma solo dagli estremi e quindi dalla Proposizione 2.2 si ottiene il

Teorema 2.10 (Lemma di Poincaré per gli aperti semplicemente connessi)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e sia ω una 1-forma. Allora ω è chiusa se e solo se è esatta.*

3 Il caso U contraibile

Se il dominio U è stellato, la dimostrazione della Proposizione 1.2 può essere estesa alle k-forme chiuse, definendo in modo opportuno la $(k-1)$-forma primitiva. È però più semplice seguire un'altra strada, dimostrando un fatto più generale.

Definizione 3.1. Uno spazio topologico (connesso) X si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè se esiste una funzione continua $H : X \times [0,1] \to X$ tale che

$$\begin{cases} H(x,0) = x_0 & \forall\, x \in X \\ H(x,1) = x & \forall\, x \in X \end{cases}$$

H è un'omotopia fra una funzione costante e la funzione identità di X.

Notiamo che possiamo estendere H ad una funzione continua $H : X\times\mathbb{R} \to X$ ponendo

$$\begin{cases} H(x,t) = x_0 & \forall\, x \in X, \quad \forall\, t < 0 \\ H(x,t) = x & \forall\, x \in X, \quad \forall\, t > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.2. Dimostrare che se X è contraibile allora X è connesso.

Esempio 3.3. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato rispetto all'origine, allora

$$H(x_1, \ldots, x_n, t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$$

è un'omotopia fra la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ e l'identità di U. In particolare, $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Possiamo adesso enunciare il risultato principale di questo paragrafo:

Teorema 3.4 (Lemma di Poincaré)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contraibile e sia ω una k-forma differenziale chiusa definita su U, cioè $d\omega = 0$, con $k \geq 1$. Allora ω è esatta, cioè esiste una $(k-1)$-forma differenziale α definita su U tale che $d\alpha = \omega$.*

Usando la coomologia di de Rham introdotta nella Definizione 2.1, Lezione 18, possiamo enunciare il Lemma di Poincaré come: se U è contraibile (in particolare se $U = \mathbb{R}^n$), allora $H^k_{dR}(U) = 0$ per ogni $k \geq 1$, e in particolare $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Il caso $k = 0$ è diverso (e più semplice): per U un aperto qualunque, se $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che $df = 0$ allora f è localmente costante, cioè costante sulle componenti connesse di U (questa è una conseguenza immediata del teorema di Lagrange). Viceversa, se f è (localmente) costante allora chiaramente $df = 0$.

Scrivendo $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, dove gli U_i sono le componenti connesse di U, si ha dunque

$$H^0_{dR}(U) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$$

(un addendo per ogni componente connessa). Poiché U contraibile implica U connesso, concludiamo che per U contraibile si ha $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}$.

Osserviamo anche che se U e V sono omeomorfi, allora le loro componenti connesse sono in corrispondenza biunivoca e quindi $H^0_{dR}(U) \cong H^0_{dR}(V)$, come previsto dal fatto che la coomologia di de Rham dipende solo dalla *topologia* di U e non dalla sua struttura differenziabile.

ATTENZIONE. Gli argomenti da questo punto fino alla fine del paragrafo 3 NON FANNO PARTE DEL PROGRAMMA D'ESAME.

Prima di iniziare la dimostrazione, c'è un importante commento da fare: l'ipotesi su U è topologica ma la dimostrazione utilizza il pullback di forme e per definire H^* serve che l'omotopia $H : U \times \mathbb{R} \to U$ sia differenziabile. Ci sono due modi per risolvere questo problema: uno è rafforzare l'ipotesi richiedendo che U sia *differenziabilimente contraibile*, e cioè che l'omotopia H sia una mappa differenziabile. In questo modo si ottiene un teorema più debole.

L'altro è dimostrare il seguente

Lemma 3.5. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se U è contraibile come spazio topologico, allora è differenziabilmente contraibile.*

Questo Lemma è conseguenza immediata del famoso

Teorema 3.6 (Teorema di approssimazione di Whitney)**.** *Siano M e N varietà differenziabili e sia $f : M \to N$ una funzione continua. Allora f è omotopa ad una funzione differenziabile $\tilde{f} : M \to N$. Se f è differenziabile su un sottoinsieme chiuso $A \subseteq M$, allora l'omotopia può essere presa relativa ad A.*

Per una dimostrazione del teorema (che è molto al di là del livello di questo corso), si può vedere John Lee, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Theorem 6.19.

Per ottenere il Lemma 3.5, basta porre $M = U \times \mathbb{R}$, $N = U$ e $f = H$ l'omotopia fra l'identità di U e una funzione costante. In questo caso, sul sottoinsieme $A = U \times \{0\} \cup U \times \{1\}$ la funzione $f = H$ è già differenziabile, perché è l'identità oppure una costante e quindi otteniamo una funzione differenziabile $\tilde{H} : U \times \mathbb{R} \to U$ (omotopa ad H) che coincide con H su A ed è quindi una omotopia differenziabile fra l'identità e la funzione costante.

Il lemma verrà usato solo nella parte finale della dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 3.4. Siano $(x_1, \ldots, x_n)$ le coordinate su U e t la coordinata su $\mathbb{R}$. Raccogliendo i termini che hanno un differenziale dt, ogni k-forma $\overline{\omega} \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ si può scrivere in modo unico come

$$\overline{\omega} = \sum a_I \, dx_I + dt \wedge \sum b_J \, dx_J = \omega_1 + dt \wedge \eta$$

dove ω_1 è una k-forma e η una $(k-1)$-forma. Osserviamo che i coefficienti a_I, b_J sono funzioni delle variabili $(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Definiamo una funzione $I : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(U)$ come segue: se

$$\overline{\omega} = \sum a_I \, dx_I + dt \wedge \sum b_J \, dx_J$$

allora

$$I\overline{\omega} = \sum_J \left(\int_0^1 b_J(x_1, \ldots, x_n, t) \, dt \right) dx_J$$

Il nome I si riferisce al fatto che la mappa è "integrazione rispetto alla variabile t". Poiché la decomposizione è unica, è chiaro dalle proprietà dell'integrale che I è una funzione lineare.

Consideriamo ora la famiglia di funzioni differenziabili $i_t : U \to U \times \mathbb{R}$ date da $i_t(x) = (x, t)$. La funzione i_t è semplicemente l'inclusione di U nel prodotto a livello t. Le funzioni i_t inducono i pullback $i_t^* : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^k(U)$ fra forme differenziali. Il punto principale della dimostrazione è la formula

$$i_1^*\overline{\omega} - i_0^*\overline{\omega} = d(I\overline{\omega}) + I(d\overline{\omega}) \tag{1}$$

valida per ogni k-forma $\overline{\omega} \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$.

Per la linearità di I e la decomposizione $\overline{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta$, basta dimostrare la formula (1) per le forme del tipo

a) $\overline{\omega} = f(x_1, \ldots, x_n, t) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$

b) $\overline{\omega} = f(x_1, \ldots, x_n, t)\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$

Nel caso a), si ha che

$$d\overline{\omega} = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \text{ termini senza } dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} I(d\overline{\omega}) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\, dt\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= [f(x_1, \ldots, x_n, 1) - f(x_1, \ldots, x_n, 0)]\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= i_1^*\overline{\omega} - i_0^*\overline{\omega} \end{aligned}$$

Poiché $I\overline{\omega} = 0$ in quanto non ci sono termini con dt, anche $d(I\overline{\omega}) = 0$ e la formula è dimostrata.

Nel caso b), $i_1^*\overline{\omega} = i_0^*\overline{\omega} = 0$, in quanto le mappe i_0^* e i_1^* operano mediante la sostituzione $t = 0$ e $t = 1$ rispettivamente. In entrambi i casi, t è costante e quindi dt diventa 0. Calcolando, si ha

$$d\overline{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

e quindi

$$I(d\overline{\omega}) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dt\right) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

(il segno meno viene dallo scambio di ordine fra dx_α e dt prima di integrare). D'altra parte

$$\begin{aligned} d(I\overline{\omega}) &= d\left\{\left(\int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n, t)\, dt\right)\right\} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dt\right) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

derivando sotto il segno di integrale e notando che il coefficiente di $I\overline{\omega}$ non dipende da t e quindi il differenziale non contiene termini con dt. Dunque $d(I\overline{\omega}) + I(d\overline{\omega}) = 0$ e la formula vale anche in questo caso.

Notiamo che fino ad ora non abbiamo usato l'ipotesi che U sia contraibile e quindi la formula (1) vale per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia ora U un aperto contraibile e $H : U \times \mathbb{R} \to U$ un'omotopia fra l'identità di U e una funzione costante, che esiste per l'ipotesi di contraibilità. Osserviamo che

$$H \circ i_1 = \mathrm{id}_U = \text{ identità di } U, \qquad H \circ i_0 = x_0 = \text{ funzione costante}$$

Per il Lemma 3.5 possiamo supporre che H sia differenziabile e quindi c'è una mappa indotta fra forme differenziali

$$H^* : \Omega^k(U) \to \Omega^k(U \times \mathbb{R})$$

Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k-forma e poniamo

$$\overline{\omega} = H^*\omega \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$$

Poiché il pullback commuta con la composizione (Proposizione 2.6, Lezione 17)

$$i_1^*(\overline{\omega}) = i_1^*(H^*\omega) = (H \circ i_1)^*(\omega) = \mathrm{id}_U^* \,\omega = \omega$$

$$i_0^*(\overline{\omega}) = i_0^*(H^*\omega) = (H \circ i_0)^*(\omega) = \mathrm{cost}^*\omega = 0$$

perché il pullback rispetto a una mappa costante annulla tutti i dx_i. La formula (1) diventa

$$\omega = d(I\overline{\omega}) + I(d\overline{\omega})$$

Se ora supponiamo che ω sia chiusa, abbiamo

$$d\overline{\omega} = d(H^*\omega) = H^*(d\omega) = H^*(0) = 0$$

per la commutatività del pullback con la derivazione esterna (Proposizione 3.1, Lezione 18) e quindi $I(d\overline{\omega}) = I(0) = 0$. Otteniamo perciò che per una forma chiusa ω si ha

$$\omega = d(I\overline{\omega})$$

e quindi ω è esatta. Osserviamo che la dimostrazione dà anche una formula per una primitiva di ω, calcolabile esplicitamente se si conosce l'omotopia H in modo esplicito e si sanno calcolare gli integrali nella formula di I. $\square$

Esercizio 3.7. Sia U stellato rispetto all'origine. Possiamo allora usare

$$H(x_1, \ldots, x_n, t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$$

come omotopia (vedi Esempio 3.3), osservando che H è differenziabile. Se ω è una 1-forma su U, determinare $I(\overline{\omega})$ e osservare che è la stessa primitiva usata nella dimostrazione della Proposizione 1.2.

Anche in questo caso semplice, l'espressione esplicita di $I(\overline{\omega})$ per una k-forma è piuttosto complicata e questo è il motivo per cui abbiamo preferito una dimostrazione più astratta ma con meno calcoli.

4 Esercizi

Esercizio 4.1. Per ognuna delle seguenti 1-forme differenziali

$$\omega_1 = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \qquad \text{su } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\omega_2 = \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] dx + \frac{x}{x+y}\, dy \qquad \text{su } \{x + y > 0\}$$

dire se si tratta di una 1-forma differenziale esatta e, in caso affermativo, determinare una funzione $f_i(x, y)$ tale che $\omega_i = df_i$.

Soluzione. Calcoliamo la derivata esterna per vedere se le forme sono chiuse (condizione necessaria).

$$d\omega_1 = -2\frac{y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\, dy \wedge dx + 2\frac{y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\, dx \wedge dy = 0$$

La forma è chiusa, ma il dominio non è semplicemente connesso e quindi non sappiamo ancora se è esatta o no. Se $\omega_1 = df$, allora f è tale che

$$f_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ e } f_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Integrando si ottiene

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx = -\frac{x}{x^2+y^2} + c(y)$$

$$\int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy = -\frac{x}{x^2+y^2} + d(x)$$

possiamo scegliere $c(y) = d(x) = 0$ e dunque ω_1 è esatta e

$$\omega_1 = d\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per ω_2:

$$d\omega_2 = \frac{y}{(x+y)^2}\, dy \wedge dx + \frac{y}{(x+y)^2}\, dx \wedge dy = 0$$

La forma è chiusa e in questo caso il dominio è semplicemente connesso e quindi la forma è esatta. Se $\omega_2 = df$, allora f è tale che

$$f_x = \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] \text{ e } f_y = \frac{x}{x+y}$$

Integrando si ottiene

$$\int \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] dx = \log(x+y)x - y + c(y)$$

e derivando rispetto a y si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x+y)x - y + c(y)\right) = \frac{x}{x+y} - 1 + c'(y)$$

e imponendo

$$\frac{x}{x+y} - 1 + c'(y) = \frac{x}{x+y}$$

si ottiene $c'(y) = 1$ e cioè $c(y) = y$. Dunque una primitiva per ω_2 è

$$f = \log(x+y)x$$

Esercizio 4.2. Dato il campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$

$$X(x,y,z) = \Big(\sin(e^{z+x}),\ e^{y^2+z^2},\ \cos(x+z)\Big)$$

(1) se ne calcoli il rotore $\mathrm{rot}(X)$. La 2-forma differenziale $\mathrm{rot}(X) \lrcorner\, dV$ è esatta?

(2) se ne calcoli la divergenza $\mathrm{div}(X)$. La 3-forma differenziale $\mathrm{div}(X)\, dV$ è esatta?

Soluzione.
(1) Ricordiamo la definizione di rotore:

$$\mathrm{rot}\, X = *(dX^\flat)$$

Si ha

$$X^\flat = \sin(e^{z+x})\, dx + e^{y^2+z^2}\, dy + \cos(x+z)\, dz$$

e allora

$$\begin{aligned} dX^\flat &= \cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x}\, dz \wedge dx + 2ze^{y^2+z^2}\, dz \wedge dy - \sin(x+z)\, dx \wedge dz \\ &= -\big(\cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} + \sin(x+z)\big)\, dx \wedge dz - 2ze^{y^2+z^2}\, dy \wedge dz \end{aligned}$$

Per definizione di $*$ di Hodge

$$*(dx \wedge dz) = -dy \qquad *\,(dy \wedge dz) = dx$$

e quindi si ha

$$\mathrm{rot}\, X = -2ze^{y^2+z^2}\, dx + \big(\cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} + \sin(x+z)\big)\, dy$$

Poiché siamo su $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{rot}\, X$ è una 1-forma e la seconda parte della domanda rende chiaro che vogliamo considerare $\mathrm{rot}\, X$ come un campo vettoriale e cioè scriviamo

$$Y = (\mathrm{rot}\, X)^\sharp = -2ze^{y^2+z^2}\mathbf{e}_1 + \big(\cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} + \sin(x+z)\big)\, \mathbf{e}_2$$

Invece di fare i calcoli per determinare $Y \lrcorner\, dV$, osserviamo adesso che nell'Esercizio 3.2 della Lezione 19 abbiamo visto varie formule che legano i diversi operatori differenziali, in particolare la formula (4) dice che, per un campo vettoriale Y vale

$$Y \lrcorner\, dV = *Y^b$$

e dunque

$$\begin{aligned} Y \lrcorner\, dV &= *\Big(\big[(\mathrm{rot}\, X)^\sharp\big]^\flat\Big) \\ &= *\,\mathrm{rot}\, X && \text{perché } \flat \text{ e } \sharp \text{ sono inversi l'uno dell'altro} \\ &= *\Big(*dX^\flat\Big) && \text{per la definizione di rotore} \\ &= dX^b && \text{perché } ** = (-1)^{k(n-k)} = 1 \end{aligned}$$

e quindi è esatta. Questo è un utile esercizio nel vedere come il formalismo con lo $*$ di Hodge aiuta a risolvere i problemi senza fare i calcoli.

(2) Ricordiamo la definizione di divergenza: per un campo vettoriale $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la divergenza è la funzione a valori reali

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(dX)_p$$

Usando le coordinate standard di $\mathbb{R}^n$ date dalla base canonica, si ha

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)$$

e dunque

$$\operatorname{div} X = \cos(e^{x+z}) \cdot e^{x+z} + 2ye^{y^2+z^2} - \sin(x+z)$$

Anche in questo caso, usando la formula vista nell'Esercizio 3.1 si ha

$$(\operatorname{div} X)\, dV = d(*X^b)$$

e quindi la forma $(\operatorname{div} X)\, dV$ è esatta.