

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

CORSO DI STUDI IN MATEMATICA

GEOMETRIA 3 – A.A. 2019/20

Lezione 21

Alberto Albano

I tre classici teoremi di Gauss-Green, della divergenza e del rotore (o teorema di Stokes) costituiscono la base di molte applicazioni del calcolo differenziale in più variabili alla Fisica e hanno importanti conseguenze anche in Matematica.

Il teorema di Stokes appare per la prima volta in una lettera, datata 2 luglio 1850, scritta da Stokes, professore a Cambridge, a William Thomson (Lord Kelvin). Fu poi proposto come problema in una gara di matematica per gli studenti di Cambridge nel 1854. Nell'arco di alcuni anni vennero pubblicate tre diverse dimostrazioni, una da Thomson, un'altra da Thomson-Tait e una terza da Maxwell.

I teoremi classici riguardano in vario modo l'uguaglianza di certi integrali di opportune espressioni su domini di dimensione 1 (integrali di linea), di dimensione 2 (integrali di superficie) e dimensione 3 (integrali di volume) e sono apparentemente indipendenti l'uno dall'altro.

Le dimostrazioni classiche sono piuttosto complicate, ma i teoremi sono immediate conseguenze di un teorema molto più generale, che vale in dimensione arbitraria e che oggi viene chiamato semplicemente Teorema di Stokes. I casi di dimensione bassa sono esattamente i teoremi classici.

Si potrebbe pensare che la difficoltà della dimostrazione del teorema generale sia perlomeno uguale (se non superiore) alla difficoltà delle dimostrazioni nei casi di dimensione bassa. In realtà la dimostrazione dell'enunciato generale è semplice e consiste nel calcolo diretto dei due integrali presenti nell'enunciato.

Se la dimostrazione del teorema è facile, la comprensione dell'enunciato è piuttosto difficile e richiede la comprensione preliminare di una serie di definizioni astratte e di natura algebrica, piuttosto che analitica. Per definire un integrale occorre specificare il *dominio di integrazione*, l'*integrando* e poi qual è il numero risultato dell'*integrazione*.

Abbiamo già svolto parte di questo lavoro, con la teoria delle forme differenziali che sono gli *integrandi* che compaiono nell'enunciato. In questa lezione lo concludiamo, definendo nel primo paragrafo i domini di integrazione e nel secondo il significato dell'operazione di integrazione. La dimostrazione del teorema di Stokes, come detto, sarà poi solo un calcolo diretto che svolgiamo nel terzo paragrafo.

Per maggiori dettagli e ulteriori approfondimenti, il testo di riferimento è il libro di Michael Spivak *Calculus on Manifolds*, seconda parte del Capitolo 4 (la prima parte sviluppa la teoria delle forme differenziali).

La lezione di oggi si conclude con la dimostrazione del teorema di Stokes e non contiene nessun calcolo esplicito di integrali. Le prossime due lezioni saranno invece dedicate a esempi, esercizi e alla discussione degli enunciati classici.

1 Catene singolari

Sia $[0, 1]$ l'intervallo chiuso e limitato standard in \mathbb{R} . Con la notazione $[0, 1]^k$ intendiamo il prodotto cartesiano dell'intervallo $[0, 1]$ con se stesso k -volte e cioè un cubo k -dimensionale di lato 1. Possiamo naturalmente pensare $[0, 1]^k \subseteq \mathbb{R}^k$ come l'insieme

$$[0, 1]^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq x_i \leq 1, \forall i\}$$

Definizione 1.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto fissato. Un k -cubo singolare in U è una funzione continua $c : [0, 1]^k \rightarrow U$.

Per $k = 0$ poniamo $[0, 1]^0 = \{0\}$ un solo punto. Quindi uno 0-cubo singolare è una funzione $f : \{0\} \rightarrow U$ e cioè semplicemente un punto di U . Una curva è un esempio di 1-cubo singolare, così come una superficie parametrizzata è un esempio di 2-cubo singolare.

Esempio 1.2. Il disco in \mathbb{R}^2 . Sia

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

il disco di centro l'origine e raggio R . La funzione $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$c(\rho, \theta) = (\rho R \cos(2\pi\theta), \rho R \sin(2\pi\theta))$$

ha come immagine il disco D_R , che quindi è un 2-cubo singolare.

Osserviamo che la funzione c non è iniettiva e in particolare tutto il segmento $\rho = 0$ viene mandato in un punto (il centro). Usando le coordinate polari in \mathbb{R}^n si ottiene in modo analogo il fatto che la palla chiusa di raggio R

$$D_R^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$$

è un n -cubo singolare.

Esempio 1.3. Ancora il disco in \mathbb{R}^2 . Possiamo anche immaginare il disco come la retrazione di un quadrato. Per scrivere questa retrazione con precisione, consideriamo $c_1 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c_1(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$$

Questa funzione porta il quadrato $[0, 1]^2$ nel quadrato $[-1, 1]^2$ e cioè il quadrato centrato nell'origine e di lato 2. Adesso retraiamo questo secondo quadrato sul disco di centro l'origine e raggio 1 con la funzione $c_2 : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c_2(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Questa funzione è l'identità sul disco e retrae i punti fuori dal disco sulla circonferenza bordo. Allora $c_2 \circ c_1 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un 2-cubo singolare, diverso dal precedente, che ha ancora immagine il disco di raggio 1 in \mathbb{R}^2 . Non è difficile modificare leggermente le funzioni precedenti per avere come immagine il disco di raggio R . Fatelo per esercizio. Inoltre, disegnatte le due funzioni scritte sopra.

Osservazione. Il termine *k-cubo* si riferisce ovviamente al fatto che il dominio è effettivamente un cubo k -dimensionale. La parola *singolare* mette in rilievo il fatto che la funzione c è solo continua e non c'è nessuna richiesta di differenziabilità e dunque l'immagine potrebbe avere singolarità. Inoltre, non è richiesto nemmeno che sia iniettiva. La funzione c potrebbe essere costante, ed è importante distinguere la funzione dalla sua immagine. I due esempi precedenti hanno la stessa immagine, ma sono 2-cubi *diversi*.

Notiamo che può succedere anche il contrario: negli esempi precedenti, il dominio è un quadrato e ha "angoli" mentre l'immagine è un cerchio e quindi è "liscio".

Esempio 1.4. *Il cubo standard.* Un esempio importante di n -cubo singolare in \mathbb{R}^n è l' n -cubo *standard*, dato da $I^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $I^n(x) = x$. L'immagine dell' n -cubo standard è proprio il cubo dentro \mathbb{R}^n immerso con un vertice nell'origine. Questo cubo sarà essenziale nel seguito e per questo ha un nome proprio e un simbolo, anche se la funzione che lo definisce non è nient'altro che l'identità.

Una delle proprietà fondamentali degli integrali è l'additività sul dominio: se $a < b < c$ allora, per ogni funzione (continua) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Per generalizzare questa nozione al caso n -dimensionale, procediamo per via algebrica.

Definizione 1.5. Una *k-catena singolare* è una combinazione lineare formale a coefficienti interi di k -cubi singolari.

Per esempio, se c_1, c_2, c_3 sono k -cubi singolari, e cioè funzioni da $[0, 1]^k$ in U , l'espressione

$$c = 2c_1 - 5c_2 + c_3$$

è una k -catena singolare. L'insieme di tutte queste espressioni forma un gruppo abeliano, dove l'elemento neutro è la catena che ha tutti i coefficienti nulli e l'opposto di una catena è la catena che ha gli stessi cubi presi con coefficienti opposti. Per adesso non diamo significato geometrico a queste espressioni.

Il motivo per introdurre le catene è per poter parlare di *bordo*. Per esempio, il bordo del cubo standard $I^1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ dovrebbe essere costituito da due punti e cioè da due 0-cubi singolari e in particolare non è un cubo singolare. Inoltre, vogliamo orientare i domini di integrazione e vogliamo che i bordi siano orientati in modo consistente. Per esempio, è sensato definire

$$\partial I^1 = \{1\} - \{0\}$$

dove con $\{a\}$ indichiamo lo 0-cubo singolare dato dalla funzione $c_a : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita come $c_a(0) = a$ (cioè semplicemente il punto $a \in \mathbb{R}^n$).

Allo stesso modo vogliamo definire ∂I^2 come somma con segno dei quattro lati del bordo, ∂I^3 la somma delle sei facce del cubo e così via. Per dare la definizione rigorosa, introduciamo delle notazioni.

Sia I^n l' n -cubo standard. Per ogni $0 \leq i \leq n$ definiamo due $(n-1)$ -cubi singolari come segue. Per $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ poniamo

$$\begin{aligned} I_{(i,0)}^n(x) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) \\ I_{(i,1)}^n(x) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Quindi $I_{(i,\alpha)}^n$ è una funzione da $[0, 1]^{n-1}$ in \mathbb{R}^n e cioè è un $(n-1)$ -cubo singolare (non standard). $I_{(i,0)}^n$ è la faccia i -esima a livello 0, $I_{(i,1)}^n$ è la faccia i -esima a livello 1. Per esempio, I^2 è un quadrato e $I_{(1,0)}^2$ e $I_{(1,1)}^2$ sono i lati verticali perché abbiamo fissato la *prima* coordinata (rispettivamente a sinistra e a destra), mentre $I_{(2,0)}^2$ e $I_{(2,1)}^2$ sono i lati orizzontali perché abbiamo fissato la *seconda* coordinata (rispettivamente in basso e in alto). In generale, le due facce i -esime sono date dal fissare la coordinata i -esima al valore 0 oppure 1. In questo modo otteniamo tutte le $2n$ facce del cubo n -dimensionale.

Definizione 1.6. Il *bordo* di un n -cubo standard I^n è la $(n-1)$ -catena singolare somma di tutte le facce con il segno dato dalla formula

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^n$$

Per esempio

$$\partial I^2 = -I_{(1,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 + I_{(2,0)}^2 - I_{(2,1)}^2 = I_{(2,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 - I_{(2,1)}^2 - I_{(1,0)}^2$$

dove dalla seconda espressione si vede che è proprio il bordo del quadrato percorso in verso antiorario. Come voluto, è anche

$$\partial I^1 = -I_{(1,0)}^1 + I_{(1,1)}^1 = \{1\} - \{0\}$$

e cioè il bordo di un intervallo è il punto finale *meno* il punto iniziale.

Osserviamo che il bordo di un cubo standard è una catena formata da cubi non standard e cioè da cubi singolari e quindi i cubi standard non bastano per definire il bordo e occorre introdurre il concetto generale di "cubo singolare".

Per definire il bordo di un cubo singolare (qualunque) procediamo come prima: definiamo prima le facce e poi la somma con segno. Sia $c : [0, 1]^n \rightarrow U$ un cubo singolare. Poniamo

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^n$$

Come prima, $c_{(i,\alpha)} : [0, 1]^{n-1} \rightarrow U$ è un $(n-1)$ -cubo singolare. I cubi $c_{(i,\alpha)}$ sono le facce del cubo c . Poiché c è una funzione di dominio $[0, 1]^k$, le facce $c_{(i,\alpha)}$ sono la restrizione di c alle facce del cubo standard.

Definizione 1.7. Sia $c : [0, 1]^n \rightarrow U$ un cubo singolare. Il *bordo* di c è la $(n-1)$ -catena

$$\partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

Per una catena arbitraria, definiamo il bordo per linearità:

$$\partial \left(\sum_i a_i c_i \right) = \sum_i a_i \partial(c_i)$$

Osservazione. Ricordando la definizione di pullback di funzioni, per le facce di un cubo c si può scrivere

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^n = \left(I_{(i,\alpha)}^n \right)^* c$$

e cioè la faccia di un cubo è il pullback della funzione c lungo la faccia $I_{(i,\alpha)}^n$ del cubo standard. Useremo questa osservazione più avanti.

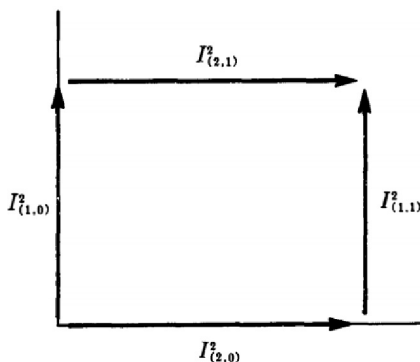
Non avremo bisogno di altre proprietà delle catene oltre a quelle dette finora, però è doveroso almeno citare la proprietà caratteristica del bordo:

Proposizione 1.8. *Sia c una catena singolare. Allora $\partial^2 c = \partial(\partial c) = 0$.*

Dimostrazione. Esercizio. È solo questione di seguire tutte le definizioni e notare che nella sommatoria finale tutti i termini compaiono due volte con segno opposto. Potete vedere i calcoli fatti in Spivak, Theorem 4-12, pag. 99. \square

Esempio 1.9. Riprendendo il caso del 2-cubo standard I^2 , abbiamo calcolato che

$$\partial I^2 = I_{(2,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 - I_{(2,1)}^2 - I_{(1,0)}^2$$



Calcoliamo adesso $\partial(\partial I^2)$. Per linearità

$$\partial(\partial I^2) = \partial I_{(2,0)}^2 + \partial I_{(1,1)}^2 - \partial I_{(2,1)}^2 - \partial I_{(1,0)}^2$$

La funzione $I_{(2,0)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da

$$I_{(2,0)}^2(x_1) = (x_1, 0)$$

perché l'indice $(2, 0)$ significa fissare la *seconda* coordinata a 0. Per definizione

$$\partial I_{(2,0)}^2 = \left(I_{(2,0)}^2 \right)_{(1,1)} - \left(I_{(2,0)}^2 \right)_{(1,0)} = \{(1, 0)\} - \{(0, 0)\}$$

che, come è ovvio, sono i punti finale e iniziale della base inferiore del quadrato. Calcoliamo ancora un bordo: la funzione $I_{(1,1)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da

$$I_{(1,1)}^2(x_1) = (1, x_1)$$

perché l'indice $(1, 1)$ significa fissare la *prima* coordinata a 1. Per definizione

$$\partial I_{(1,1)}^2 = \left(I_{(1,1)}^2 \right)_{(1,1)} - \left(I_{(1,1)}^2 \right)_{(1,0)} = \{(1, 1)\} - \{(1, 0)\}$$

che sono i punti finale e iniziale del lato verticale di destra del quadrato. Calcolando allo stesso modo il bordo dei due lati rimanenti, e facendo attenzione ai segni, si vede che $\partial(\partial I^2)$ è la somma di otto termini: i quattro vertici del quadrato presi una volta con segno positivo e una volta con il segno negativo. La somma è dunque 0 perché tutti i termini si cancellano a due a due.

La dimostrazione generale è simile. Il punto è calcolare, per due indici $i \leq j$ l'espressione per la faccia $\left(I_{(i,\alpha)}^n \right)_{(j,\beta)}$ e poi sommare.

Il risultato che si ottiene è (provare a scrivere i dettagli per esercizio e poi leggere Spivak per controllare):

$$\left(I_{(i,\alpha)}^n \right)_{(j,\beta)} = \left(I_{(j+1,\beta)}^n \right)_{(i,\alpha)} \quad \text{per ogni } 0 \leq i \leq j \leq n$$

Nella formula del bordo questi termini compaiono con segni opposti e dunque si cancellano.

Osservazione. È impossibile non notare la somiglianza con l'analoga proprietà della derivazione esterna ($d^2 = 0$). Il teorema di Stokes metterà bene in evidenza che questo non è un caso, ma ha un significato profondo.

2 Integrazione

Vogliamo ora definire l'integrale di una k -forma su una k -catena. Per fare ciò dobbiamo usare catene singolari *differenziabili*, cioè catene del tipo $c = \sum_i a_i c_i$ dove le funzioni $c_i : [0, 1]^k \rightarrow U$ sono differenziabili. Poiché il dominio non è un aperto, ricordiamo che differenziabile significa che esiste un intorno aperto V di $[0, 1]^k$ in \mathbb{R}^k e un'estensione differenziabile della funzione c a V . Questa condizione è la stessa che a volte si trova indicata con il nome di "regolare fino al bordo", perché in effetti le restrizioni delle funzioni c_i al bordo del cubo sono ancora funzioni differenziabili.

D'ora in poi dunque con il termine k -catena singolare intenderemo una k -catena differenziabile. Per brevità non useremo più il termine "singolare", però ricordiamo che una catena è una funzione e che, anche se la funzione è differenziabile, l'immagine può avere singolarità perché non facciamo ipotesi sull'iniettività della funzione o del suo differenziale.

Sia ω una k -forma su $[0, 1]^k$. In questo caso tutte le forme sono multiple della k -forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ e possiamo quindi scrivere

$$\omega = f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

per una unica funzione f . Poniamo allora, per definizione

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{[0,1]^k} f dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

dove l'integrale a secondo membro è l'usuale integrale di una funzione di n variabili. Osserviamo che è importante scrivere la forma ω con i differenziali in ordine crescente di indice, altrimenti la funzione f non è unicamente definita. Per esempio, se $\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_1$, allora $\omega = -x_1 dx_1 \wedge dx_2$ e quindi

$$\int_{[0,1]^2} \omega = \int_{[0,1]^2} -x_1 dx_1 dx_2$$

Osservazione. I differenziali nell'integrale a destra sono "commutativi": se pensiamo all'integrale di una funzione di due variabili su un dominio piano, la definizione vista in Analisi (sotto opportune ipotesi di integrabilità, tutte soddisfatte nel caso che ci interessa perché la funzione integranda è differenziabile e il dominio compatto) dà l'uguaglianza (Teorema di Fubini o di scambio dell'ordine di integrazione):

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D f(x, y) dy dx$$

Invece i differenziali presenti in una forma sono *anticommutativi* e quindi dovrebbe essere

$$\int_D f(x, y) dx \wedge dy = - \int_D f(x, y) dy \wedge dx$$

Avendo già a disposizione la teoria dell'integrazione per funzioni di più variabili, vogliamo definire l'integrale di una forma differenziale sfruttando gli integrali già noti. Per ottenere l'anticommutatività, agiamo allora sull'integrando: per definizione l'integrale di una forma è uguale al corrispondente integrale della funzione coefficiente, *solo quando la forma ha i differenziali nell'ordine crescente*. Altrimenti, come nell'esempio fatto subito prima di questa osservazione, *prima* mettiamo i differenziali in ordine crescente (e in tal modo il segno davanti al coefficiente potrebbe cambiare) e *poi* scriviamo l'integrale.

Nel linguaggio usato in Analisi per gli integrali di funzioni di una variabile, quando l'integrando è una forma differenziale l'integrale è di *seconda specie*.

La definizione vista vale quando il dominio della k -forma ω è il cubo $[0, 1]^k \subseteq \mathbb{R}^k$. Per una k -forma ω definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (notate che il grado della forma non è necessariamente uguale alla dimensione dello spazio) e un k -cubo c (invece la dimensione del cubo è uguale al grado della forma), abbiamo la

Definizione 2.1. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma sull'aperto U e sia c un k -cubo in U . Allora si pone

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*(\omega)$$

Per una k -catena arbitraria estendiamo la definizione di integrale per linearità: se $c = \sum_i a_i c_i$ si ha

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega = \sum_i a_i \int_{[0,1]^k} c_i^* \omega$$

La definizione di integrale tramite il pullback è naturalmente la solita definizione mediante "sostituzione". Nel caso $k = 1$ la forma ω è una 1-forma $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ e un 1-cubo è semplicemente una curva differenziabile (non necessariamente regolare). Come abbiamo già ossevato, in questo caso la

definizione 2.1 di integrale è l'usuale definizione di *integrale di seconda specie* vista nei corsi di Analisi Matematica.

L'integrale di una forma è additivo rispetto al dominio *per definizione*. Inoltre, per $c = I^k$ il cubo standard e $\omega = f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ si ha

$$\int_{I^k} \omega = \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \int_{[0,1]^k} f dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

in accordo con la definizione precedente. Notiamo che per $k = 0$ dobbiamo fare una convenzione speciale: una 0-forma ω è una funzione differenziabile e uno 0-cubo $c : \{0\} \rightarrow U$ dà un punto di U poniamo allora, per definizione

$$\int_c \omega = \omega(c(0))$$

il valore della funzione ω nel punto $c(0) \in U$.

Esercizio 2.2. Cosa capita quando si cambia la parametrizzazione? La definizione di integrale è fatta tramite parametrizzazioni e ci aspettiamo che il comportamento sia semplice. Vediamolo in dettaglio. Per linearità, basta analizzare la situazione sui cubi (e non sulle catene).

Sia $c : [0, 1]^k \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ un k -cubo e sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma. Pensando al caso delle curve, un "cambiamento di parametrizzazione" è una funzione differenziabile $\varphi : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ invertibile e con inversa differenziabile. In particolare, il differenziale di φ è sempre invertibile e quindi $\det J(\varphi) \neq 0$ su tutto il dominio $[0, 1]^k$, che è *connesso*. Dunque il determinante è sempre positivo oppure sempre negativo.

Sia $c \circ \varphi$ il cubo che si ottiene cambiando la parametrizzazione. Dimostrare che:

$$\int_c \omega = (\text{segno di } \varphi) \int_{c \circ \varphi} \omega$$

dove segno di $\varphi = +1$ se $\det J(\varphi) > 0$ e segno di $\varphi = -1$ se $\det J(\varphi) < 0$.

Suggerimento: ricordare che nella formula di cambiamento di variabile degli integrali c'è il *valore assoluto* del determinante Jacobiano, mentre quando si calcola il pullback di una forma, si usa il determinante Jacobiano (vedere Esercizio 3.1 nel foglio di esercizi per l'esame).

3 Il teorema di Stokes

Le formule $d^2 = 0$ per la derivazione esterne e $\partial^2 = 0$ per l'operazione di bordo fanno supporre che ci sia una relazione fra la derivazione esterna di forme e l'operazione di bordo per le catene. Il teorema generale che esprime questa relazione è il famoso

Teorema 3.1 (Teorema di Stokes). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ una $(k-1)$ -forma e c una k -catena in U . Allora*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Osservazione. Per $n = 1$ e $k = 1$, un 1-cubo è un intervallo sulla retta e il teorema di Stokes è esattamente il teorema fondamentale del calcolo integrale (scrivere l'espressione esplicita per convincersene).

Per $n = 2$ e $k = 2$, la 2-catena c è un dominio nel piano e ∂c è il suo bordo. Allora il teorema di Stokes diventa il teorema di Gauss-Green.

La dimostrazione del teorema di Stokes non è difficile e consiste nel calcolo diretto dei due termini presenti nella formula.

Dimostrazione del teorema di Stokes. Cominciamo con il caso: $c = I^k$ e ω una $(k-1)$ -forma su $[0, 1]^k$. Allora

$$\omega = \sum_i f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k$$

dove il simbolo \widehat{dx}_i significa che il corrispondente dx_i è omissso. Basta dunque dimostrare la formula per ognuno dei termini nella sommatoria e cioè poniamo

$$\omega = f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k$$

(ATTENZIONE: abbiamo cambiato il significato di ω). Calcoliamo il termine a destra dell'uguale. Il bordo ∂I^k è una somma di $(k-1)$ -cubi (le facce di I^k) e per il termine di indice (j, α) si ha:

$$\begin{aligned} \int_{I_{(j,\alpha)}^k} f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k &= \int_{[0,1]^{k-1}} (I_{(j,\alpha)}^k)^* (f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ perché } dx_j = 0 \\ & \text{in quanto } x_j \text{ è costante} \\ \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, \alpha, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k & \text{se } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Ricordando la formula del bordo per I^k possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^k} \omega &= \int_{\partial I^k} f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I_{(j,\alpha)}^k)^* (f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k) \\ &= \boxed{\begin{aligned} &(-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k \\ &+ (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k \end{aligned}} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il termine a sinistra dell'uguale:

$$\begin{aligned}
\int_{I^k} d\omega &= \int_{I^k} d\left(f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k\right) \\
&= \int_{I^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left[f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) \right] dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k \\
&= \boxed{(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k} \\
&\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di Fubini per integrare prima rispetto a x_i e il teorema fondamentale del calcolo integrale per calcolare l'integrale più interno.

Poiché i due termini evidenziati sono uguali (attenzione ai segni!), il teorema è dimostrato per il cubo standard $c = I^k$. Se c è un cubo arbitrario, dalla definizione di integrale e di pullback di forme si ha

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^*(\omega)$$

e quindi, dalla commutatività tra pullback e derivazione esterna

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*(\omega) = \int_{\partial c} \omega$$

dove il terzo uguale è il caso appena dimostrato per il cubo standard. Infine, se $c = \sum_i a_i c_i$ è una catena arbitraria, per linearità

$$\int_c d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega$$

e questo conclude la dimostrazione del teorema di Stokes per una catena arbitraria. \square