Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 22

Alberto Albano

Dopo il lavoro complicato svolto nelle ultime due lezioni, oggi facciamo solo esempi di catene e di integrali calcolati usando il teorema di Stokes.

1 Esempi di catene singolari

Vediamo alcuni esempi di scrittura come catena singolare per sottoinsiemi semplici in $\mathbb{R}^n$.

1.1 Il disco in $\mathbb{R}^2$

Abbiamo visto nella scorsa lezione l'esempio del disco in $\mathbb{R}^2$. Riprendiamolo e calcoliamo anche il bordo. Un possibile cubo singolare che ha per immagine il disco è $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$c(\rho, \theta) = (\rho R \cos(2\pi\theta), \rho R \sin(2\pi\theta))$$

Calcoliamo il bordo:

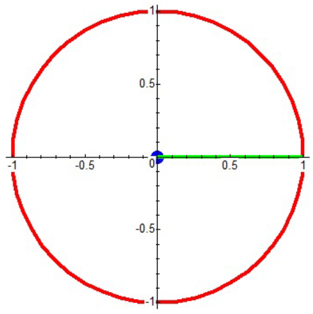
$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)}$$

dove $c_{(i,\alpha)}$ è la restrizione di c alla faccia(i,α) di I^2. Più semplicemente, per un quadrato, il bordo è formato dai quattro lati percorsi in verso antiorario. Dunque

$$\partial c = c_{|\theta=0} + c_{|\rho=1} - c_{|\theta=1} - c_{|\rho=0}$$

e analizzando i quattro termini si ha (osservare i colori nel disegno)

- $c_{|\theta=0}$ è il raggio orizzontale percorso dal centro al punto $P = (R, 0)$, in verde
- $c_{|\rho=1}$ è la circonferenza di raggio R percorsa in verso antiorario a partire dal punto $P = (R, 0)$, in rosso
- $c_{|\theta=1}$ è il raggio orizzontale percorso dal centro al punto $P = (R, 0)$, in verde
- $c_{|\rho=0}$ è il cammino costante nel centro, in blu



Dunque $c_{|\theta=0} = c_{|\theta=1}$ e quindi i due termini si semplificano. Quindi, per una 1-forma ω sul disco, il teorema di Stokes dà

$$\int_{D_R} d\omega = \int_{c_{|\rho=1}} \omega - \int_{c_{|\rho=0}} \omega$$

D'altra parte, il pullback di una qualunque forma differenziale su un cammino costante è nullo, perché il termine differenziale dx_I è zero, e quindi è nullo anche l'integrale. Abbiamo allora

$$\int_{D_R} d\omega = \int_{C_R} \omega$$

dove C_R è la circonferenza di raggio R.

1.2 Ancora il disco

Il teorema di Stokes afferma che l'integrale su una regione è uguale all'integrale sul bordo (di un'altra forma differenziale). Però nel caso precedente, il "bordo" del cubo singolare che dà il disco non è solo la circonferenza, come ci aspettiamo, ma ha un'altra componente data da un punto (l'origine). Dal punto di vista dell'integrazione, questa componente aggiuntiva non dà contributo perché è della "dimensione sbagliata": dobbiamo integrare una 1-forma su una 0-catena e questi integrali sono automaticamente nulli. Infatti il pullback di forme preserva il grado e quindi il pullback di una 1-forma su uno 0-cubo è ancora una 1-forma che è necessariamente nulla perché il suo grado è maggiore della dimensione dello spazio ambiente (questo è l'esercizio 1.5 della Lezione 19).

Però la domanda geometrica resta: si può scrivere il disco come catena in modo che il bordo sia esattamente la circonferenza? Certamente sì, e il modo più semplice è retrarre un quadrato sul cerchio e il bordo è la somma di 4 archi di circonferenza.

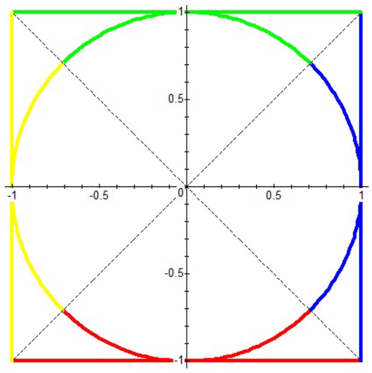
Abbiamo visto una catena simile nella scorsa lezione e adesso calcoliamo il bordo: la catena (in realtà è formata da un solo cubo) si ottiene componendo le due funzioni

$$c_1(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$$

che porta il quadrato $[0,1]^2$ nel quadrato $[-1,1]^2$ e cioè il quadrato centrato nell'origine e di lato 2 e la retrazione

$$c_2(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

che porta questo secondo quadrato sul disco di centro l'origine e raggio 1. Si può scrivere esplicitamente la composizione (fatelo per esercizio), però è facile vedere geometricamente il bordo di questo cubo nel disegno seguente:



I lati del quadrato (il bordo del 2-cubo) mappano sui corrispondenti archi di circonferenza e quindi il bordo del cubo singolare è la catena somma dei quattro archi di circonferenza presi con l'orientazione corretta. In effetti, scrivendo in dettaglio, si ottiene che gli archi "orizzontali" (rosso e verde) sono orientati da sinistra a destra mentre quelli verticali (blu e giallo) sono orientati dal basso in alto. La regola dei segni presente nella formula del bordo orienta tutti gli archi in verso antiorario

$$\partial c = +\text{rosso} \ + \text{blu} \ - \text{verde} - \text{giallo}$$

formando la circonferenza completa.

1.3 Il disco, questa volta $\mathcal{C}^\infty$

Il 2-cubo scritto nel paragrafo precedente è solo continuo e non va bene per integrare. Vogliamo adesso scrivere il disco come un cubo $\mathcal{C}^\infty$ che abbia come bordo la circonferenza.

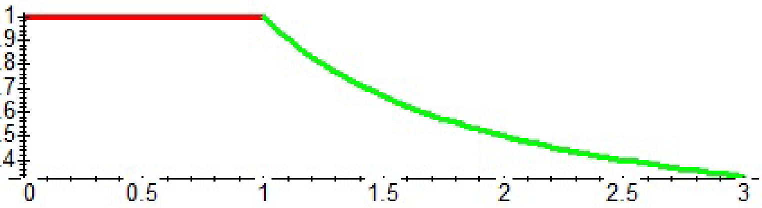
L'idea è di prendere la funzione precedente e "renderla liscia". Osserviamo che la funzione è radiale e cioè dipende solo dalla distanza dall'origine. Ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ possiamo scrivere la funzione precedente come

$$c_2(x,y) = \varphi(\rho) \cdot (x,y)$$

da cui si vede che per ottenere che c sia differenziabile, basta che lo sia φ. La funzione φ che dà la retrazione precedente è

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le \rho \le 1 \\ 1/\rho & \text{se } \rho > 1 \end{cases}$$

che ha grafico



ed è ovviamente non differenziabile per $\rho = 1$. Osserviamo che non si può modificare la funzione quando $\rho \geq 1$, perché dobbiamo retrarre esattamente sulla circonferenza di raggio 1 e quindi dobbiamo dividere per la distanza del punto dall'origine. Dobbiamo quindi intervenire sulla parte "rossa". Scriviamo la funzione cercata come

$$\varphi(\rho) = \beta(\rho) \cdot \frac{1}{\rho}$$

e vediamo che proprietà deve avere β. Deve essere:

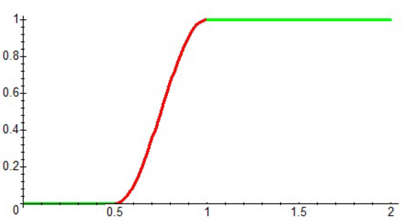
(1) $\beta(\rho) = 1$, per ogni $\rho \geq 1$, così la parte "verde" resta invariata

(2) $0 \leq \beta(\rho) \leq 1$, per ogni $\rho \in \mathbb{R}$, così i punti all'interno del disco restano all'interno

(3) $\beta(\rho) = 0$, per ogni $0 \leq t \leq 1/2$, così non ci sono problemi dividendo per ρ quando $\rho \to 0$

(4) β di classe $\mathcal{C}^\infty$

Per esempio, usando una funzione seno (esercizio: scrivere esplicitamente la funzione rossa, sapendo che è un arco di seno), non è difficile ottenere



che è però solo di classe $\mathcal{C}^1$. Osserviamo anche che in questo modo il disco di raggio $1/2$ viene contratto nell'origine. Se vogliamo che la funzione resti iniettiva all'interno del disco, possiamo cambiare la condizione (3) in

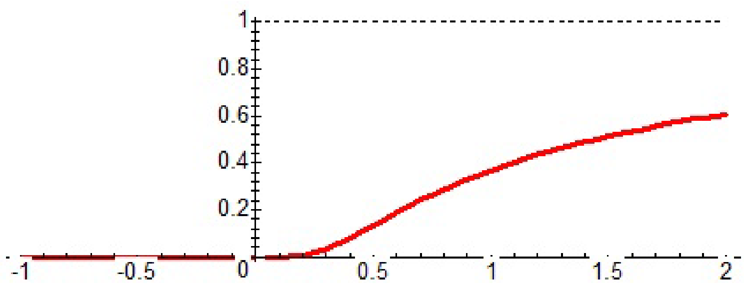
(3') $\beta^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq 0$, tutte le derivate destre di ogni ordine nulle

in modo che φ resti di classe $\mathcal{C}^\infty$ nell'origine (esercizio: verificare che è così).

La soluzione è usare una funzione simile a quella introdotta nella soluzione dell'Esercizio 7 della Lezione 4. Usiamo qui una funzione leggermente diversa e impariamo anche a scrivere altre funzioni $\mathcal{C}^\infty$ che soddisfano condizioni addizionali. Per prima cosa definiamo

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

cha ha grafico



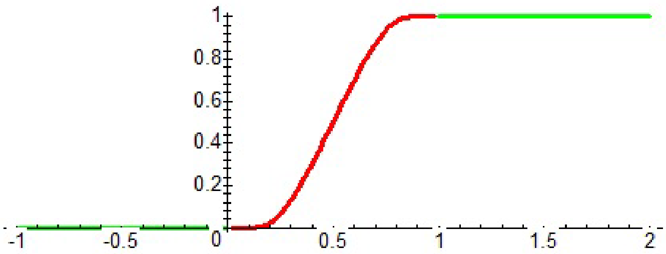
La funzione α è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il suo dominio (anche nell'origine) e tende a 1 per $t \to +\infty$. Il calcolo delle derivate destre nell'origine è simile a quello dell'Esercizio della Lezione 4, in effetti un po' più semplice: si dimostra (con un'induzione identica al Lemma 0.2, Lezione 4) che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\left(e^{-1/t}\right)^{(n)} = e^{-1/t} p_n(1/t)$$

dove $p_n(T)$ è un polinomio di grado $2n$. Definiamo adesso la funzione, per $a < b$

$$\beta(t) = \frac{\alpha(t-a)}{\alpha(t-a) + \alpha(b-t)}$$

Il denominatore non è mai nullo perché è la somma di due termini maggiori o uguali a zero che non sono mai contemporaneamente nulli (dovrebbe essere $t < a$ e $t > b$, impossibile per la scelta di a, b). La funzione è dunque di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre è identicamente nulla per $t \leq a$ (il numeratore è nullo), identicamente uguale a 1 per $t \geq b$ (numeratore e denominatore sono uguali) e sempre compresa fra 0 e 1 perché il denominatore è sempre maggiore del numeratore (ha un addendo positivo in più). Scegliendo $a = 0$ e $b = 1$ abbiamo la funzione cercata

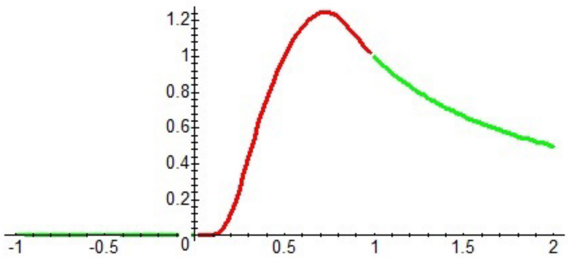


Concludiamo dunque che definendo

$$c_2(x, y) = \frac{\beta(\rho)}{\rho}(x, y)$$

questa funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e retrae il quadrato di lato 2 centrato nell'origine sul disco di centro l'origine e raggio 1. Il bordo è lo stesso calcolato prima, perché lungo i lati del quadrato si ha $\rho \geq 1$ e quindi la retrazione è la stessa.

Per completezza, disegnamo il grafico di $\varphi(\rho) = \beta(\rho)/\rho$



dove si vede che la giunzione in $\rho = 1$ è liscia.

Osservazione. Abbiamo visto come sia possibile trovare una funzione che ha le derivate assegnate. C'è un teorema più generale, noto come Teorema di Borel, che afferma che data una qualunque successione di numeri $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, esiste una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno dell'origine tale che, per ogni $n \geq 0$ le derivate soddisfano $f^{(n)}(0) = a_n$. Il Teorema di Borel ha anche una formulazione per funzioni di più variabili, vedi per esempio
`https://en.wikipedia.org/wiki/Borel%27s_lemma`

Il teorema di Borel è a sua volta un caso particolare di un teorema ancora più generale, il Teorema di Estensione di Whitney, vedi
`https://encyclopediaofmath.org/wiki/Whitney_extension_theorem`

1.4 Una corona circolare in $\mathbb{R}^2$

Sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ la corona circolare di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2. Il cubo singolare è

$$c(\rho, \theta) = ((R_1 + \rho(R_2 - R_1))\cos(2\pi\theta), (R_1 + \rho(R_2 - R_1))\sin(2\pi\theta))$$

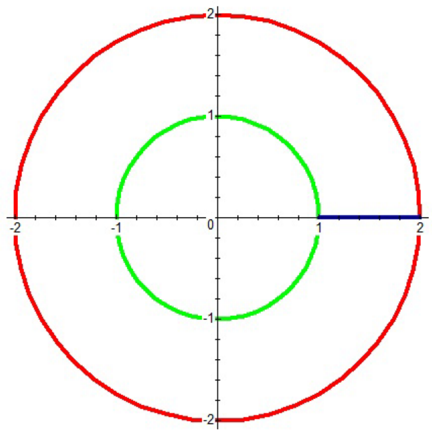
in modo che per $0 \leq \rho \leq 1$ percorriamo il segmento $[R_1, R_2]$. La formula per il bordo è la stessa di prima e si ha:

- $c_{|\theta=0}$ è il raggio orizzontale percorso dal punto $P = (R_1, 0)$ al punto $Q = (R_2, 0)$, in blu
- $c_{|\rho=1}$ è la circonferenza di raggio R_2 percorsa in verso antiorario a partire dal punto $Q = (R_2, 0)$, in rosso
- $c_{|\theta=1}$ è il raggio orizzontale percorso dal punto $P = (R_1, 0)$ al punto $Q = (R_2, 0)$, in blu
- $c_{|\rho=0}$ è la circonferenza di raggio R_1 percorsa in verso antiorario a partire dal punto $P = (R_1, 0)$, in verde

Come prima $c_{|\theta=0} = c_{|\theta=1}$ e quindi si semplificano. Il bordo allora è la catena

$$\partial c = c_{|\rho=1} - c_{|\rho=0}$$

cioè è formato da due circonferenze percorse in versi opposti (quella esterna antiorario, quella interna orario).



Questa volta il teorema di Stokes assume subito la forma "giusta" del teorema di Gauss-Green

$$\int_\Gamma d\omega = \int_{C_{R_2}} \omega - \int_{C_{R_1}} \omega$$

1.5 La sfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$

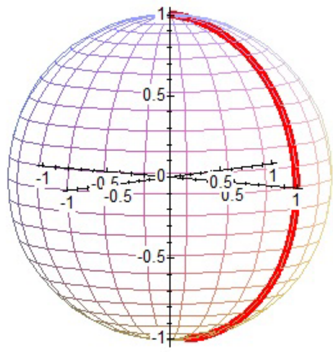
Sia $S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ la sfera di centro l'origine e raggio R. Con la parametrizzazione solita si può scrivere:

$$c(\varphi, \theta) = (R\cos(2\pi\varphi)\sin(\pi\theta), R\sin(2\pi\varphi)\sin(\pi\theta), R\cos(\pi\theta))$$

Il bordo è

- $c_{|\theta=0}$ è il cammino costante al polo nord $N = (0, 0, R)$
- $c_{|\varphi=1}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N al polo sud S
- $c_{|\theta=1}$ è il cammino costante al polo sud $S = (0, 0, -R)$
- $c_{|\varphi=0}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N al polo sud S

Anche in questo caso i due meridiani si cancellano e il resto del bordo è composto da punti, su cui ogni integrale di una 2-forma è nullo.



Se vogliamo rappresentare una sfera come una catena che ha bordo nullo, dobbiamo usare qualcosa di diverso. Il modo più semplice è partire dal cubo standard I^3 di dimensione 3 in $\mathbb{R}^3$. Il suo bordo è la catena

$$\partial I^3 = -I^3_{(1,0)} + I^3_{(1,1)} + I^3_{(2,0)} - I^3_{(2,1)} - I^3_{(3,0)} + I^3_{(3,1)}$$

Retraendo ognuna di queste 6 facce sulla sfera, si ottiene una catena che ha immagine la sfera e il cui bordo è nullo, perché $\partial^2 = 0$. Osserviamo che la retrazione è $\mathcal{C}^\infty$, perché la stiamo considerando solo sulle facce e su ogni faccia la funzione è $\mathcal{C}^\infty$. Non ci sono problemi di "incollamento", in quanto ci sono 6 cubi distinti e la richiesta è che ogni cubo sia dato da una funzione differenziabile e non ci sono condizioni di compatibilità fra le funzioni che definiscono i differenti cubi.

Però, dal punto di vista dell'integrazione, la parametrizzazione precedente è migliore, in quanto è data da un solo cubo e la parte non nulla di bordo non influisce sull'integrale.

Esercizio 1.1. Dal punto di vista topologico, si può ottenere una sfera anche contraendo tutti i lati di un quadrato ad un punto. Il bordo di questo 2-cubo risulta la somma di 4 volte lo stesso punto (l'immagine dei lati, che è sempre la stessa), però preso due volte con il segno positivo e due con il segno negativo per la formula del bordo e dunque anche in questo caso il bordo è nullo.

Sapete scrivere esplicitamente questa funzione, con dominio il quadrato standard $[0, 1]^2$ e immagine in $\mathbb{R}^3$ data da una sfera (non importa di quale centro e raggio)? Si può fare in modo che la funzione sia $\mathcal{C}^\infty$ sul quadrato?

1.6 La semisfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$

Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$ la semisfera al di sopra il piano xy. Con la stessa parametrizzazione di prima si ha:

$$c(\varphi, \theta) = (R\cos(2\pi\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}\,\theta), R\sin(2\pi\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}\,\theta), R\cos(\frac{\pi}{2}\,\theta))$$

(notare che $\theta \in [0, 1]$ e quindi $z \geq 0$). Il bordo è

- $c_{|\theta=0}$ è il cammino costante al polo nord $N = (0, 0, R)$
- $c_{|\varphi=1}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N all'equatore
- $c_{|\theta=1}$ è l'equatore
- $c_{|\varphi=0}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N all'equatore

Anche in questo caso i due meridiani si cancellano e il resto del bordo, come catena, è composto dall'equatore e dal polo nord. Il polo nord non contribuisce all'integrale di 1-forme e quindi

$$\int_X d\omega = \int_C \omega$$

dove C è l'equatore.

1.7 Il toro in $\mathbb{R}^3$

In questo caso la parametrizzazione standard del toro, mostra subito che il toro è un 2-cubo singolare e il bordo è nullo.

I lati del quadrato hanno per immagine rispettivamente un meridiano e un parallelo. Ognuno è preso due volte, con segni opposti e quindi si cancellano.

In particolare, se ω è una 2-forma chiusa definita in un aperto di $\mathbb{R}^3$ che contiene il toro, il suo integrale sul toro è nullo. Se infatti possiamo scrivere $\omega = d\eta$, allora il teorema di Stokes dà

$$\int_T \omega = \int_T d\eta = \int_{\partial T} \eta = 0$$

perché il dominio di integrazione è nullo.

2 Qualche integrale

Calcoliamo qualche integrale usando il teorema di Stokes.

Esempio 2.1. Si consideri in $\mathbb{R}^2$ il triangolo T con vertici nei punti $A = (5, -1)$, $B = (-1, 6)$, $C = (-5, -1)$ e l'1-forma differenziale $\omega = xdy - ydx$. Usando il teorema di Stokes calcolare l'integrale di ω lungo il bordo del triangolo T.

Soluzione. Orientiamo il bordo del triangolo in verso antiorario. Il teorema di Stokes dice

$$\int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega$$

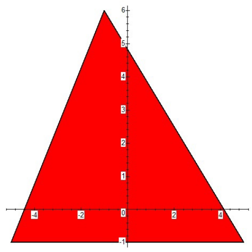
Non è certo difficile calcolare i tre integrali di linea richiesti, ma vediamo prima quanto vale $d\omega$:

$$d\omega = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2\, dx \wedge dy$$

Allora

$$\int_T d\omega = \int_T 2\, dx \wedge dy = 2 \int_T dxdy = 2\, \mathrm{Area}(T)$$

Disegnando il triangolo (ricordiamo che questo corso si chiama GEOMETRIA 3 e non ANALISI ...)



si ha $2\, \mathrm{Area}(T) = \mathrm{base} \times \mathrm{altezza} = 10 \times 7 = 70$.

Esempio 2.2. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie regolare data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2\}$$

e $R \subseteq S$ la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0,\ y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Orientiamo S in modo tale che il versore normale in $P = (0, 0, 1)$ sia $(0, 0, 1)$ stesso. Sia infine $\omega = y^2\, dx + (x - y)\, dz$. Calcolare

$$\int_R d\omega$$

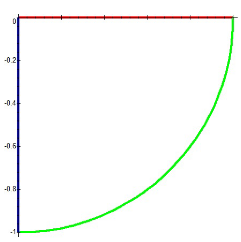
sia direttamente (cioè integrando la 2-forma $d\omega$ sulla regione R) che con il teorema di Stokes (cioè integrando ω sul bordo di R).

Soluzione. Possiamo parametrizzare la regione R con

$$c(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$$

sul dominio D descritto da

$$u \geq 0, \quad v \leq 0, \quad u^2 + u^2 \leq 1$$



La condizione sull'orientazione di S significa che dobbiamo scegliere i nomi delle variabili (u, v) in modo che $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$ nel punto $(u, v) = (0, 0)$ (che corrisponde al punto P sulla superficie). Poiché si ha $\mathbf{x}_u = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{x}_v = (0, 1, 0)$ nell'origine, la condizione dice che sul piano del dominio l'orientazione è già quella giusta e che il bordo di D è orientato in verso antiorario, per tenere la regione di cui è bordo alla sua sinistra.

Prima di iniziare l'integrazione, calcoliamo ancora

$$d\omega = -2y\, dx \wedge dy + dx \wedge dz - dy \wedge dz$$

e il pullback

$$dx = du, \quad dy = dv, \quad dz = -2u\, du - 2v\, dv$$

e quindi

$$\begin{aligned} c^*(d\omega) &= -2v\, du \wedge dv + du \wedge (-2u\, du - 2v\, dv) - dv \wedge (-2u\, du - 2v\, dv) \\ &= (-4v - 2u)\, du \wedge dv \\ c^*(\omega) &= v^2\, du + (u - v)(-2u\, du - 2v\, dv) \\ &= (-2u^2 + 2uv + v^2)\, du + (-2uv + 2v^2)\, dv \end{aligned}$$

I due integrali da calcolare sono quindi

$$\int_R d\omega = \int_D c^*(d\omega) = \int_D (-4v - 2u)\, du \wedge dv = \int_D (-4v - 2u)\, dudv$$

e

$$\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial D} c^*(\omega) = \int_{\partial D} (-2u^2 + 2uv + v^2)\, du + (-2uv + 2v^2)\, dv$$

Questo è un esercizio di Analisi (anzi, due esercizi...) e li potete svolgere da soli. Il teorema di Stokes vi assicura che questi due integrali sono uguali. Se vi vengono diversi, c'è (almeno) un errore di calcolo da qualche parte (nei conti precedenti, oppure nei conti che farete voi...).