Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 23

Alberto Albano

In questa lezione, l'ultima con materiale in programma per l'esame, enunceremo i teoremi classici dell'analisi vettoriale: il teorema di Gauss-Green, il teorema della divergenza e il teorema del rotore o di Stokes.

Questi tre teoremi sono conseguenze immediate del teorema di Stokes che abbiamo visto nella lezione 21, ma un po' di lavoro è richiesto per trasformare gli enunciati classici in una versione in cui l'uso del teorema di Stokes è immediato.

Quando abbiamo studiato le curve e le superfici abbiamo visti le espressioni degli integrali che calcolano la lunghezza di una curva e l'area di una porzione di superficie. Nei primi due paragrafi scriveremo nel linguaggio delle forme differenziali gli integrandi che compaiono in queste formule e nel terzo utilizzeremo queste espressioni per riscrivere le formule classiche in termini di forme differenziali e loro derivate esterne. Il Teorema di Stokes darà quindi le uguaglianze volute.

Useremo le definizioni degli operatori differenziali e alcuni degli esercizi svolti nella Lezione 19. In particolare, useremo la forma di volume dV su $\mathbb{R}^3$ e l'operatore $*$ di Hodge.

Dopo alcuni esercizi sui teoremi classici, concludiamo con l'ultimo importante teorema del corso: il Teorema di Gauss-Bonnet, anch'esso una conseguenza, ma questa volta non banale, del teorema di Stokes. Questo teorema lega la curvatura Gaussiana di una superficie (invariante geometrico-differenziale) con la sua caratteristica di Eulero (invariante topologico) e fa quindi parte della *teoria globale delle superfici*, così come i teoremi di Fenchel e di Milnor sono esempi di teoria globale delle curve.

Vedremo la definizione di un ingrediente che ancora non conosciamo (la *curvatura geodesica*) e poi l'enunciato preciso del teorema. Il teorema ha varie versioni e vedremo la dimostrazione solo della cosiddetta "versione globale". Questa dimostrazione è nel programma d'esame.

Le dimostrazioni delle altre versioni NON SONO NEL PROGRAMMA D'ESAME.

1 L'elemento di area

Negli Esercizi 1.7 e 3.1 della Lezione 19 abbiamo definito e studiato la forma di volume dV su $\mathbb{R}^n$ data dalla formula

$$(dV)_p\,(\mathbf{e}_1|_p, \ldots, \mathbf{e}_n|_p) = 1$$

e che, usando le coordinate globali $(x_1, x_2, \ldots, n_n)$ su $\mathbb{R}^n$ si scrive

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

La forma dV nel punto p associa alla base standard orientata dello spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ il numero 1. La proprietà fondamentale della forma di volume (che spiega il suo nome) è la seguente: sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e definiamo (quando esiste l'integrale)

$$\mathrm{vol}(U) = \int_U dV$$

Si ottiene in questo modo un buon concetto di *misura n-dimensionale*: se $\dim U < n$, allora l'integrale di una n-forma è certamente nullo perché i differenziali $dx_1, \ldots, dx_n$ sono linearmente dipendenti su U e quindi $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0$ su U. Altrimenti l'integrale ha le usuali proprietà di positività, additività e monotonia di una misura.

L'ambiente dei teoremi classici è lo spazio $\mathbb{R}^3$ e quindi useremo le proprietà caratteristiche della dimensione 3 e in particolare il *prodotto vettoriale* fra vettori dello spazio. Useremo la notazione standard e non ci sarà possibilità di confusione fra

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ = prodotto vettoriale di due vettori
- $\omega \wedge \eta$ = prodotto esterno di forme differenziali

Consideriamo una superficie regolare orientata $S \in \mathbb{R}^3$: vogliamo scrivere la forma di volume su S, che di solito si chiama *elemento di area* e cioè una forma che integrata su un dominio R contenuto nella superficie dà l'area di R. Se $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione locale, abbiamo la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ di T_pS. Ponendo come al solito

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

si ha che la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ ha la stessa orientazione standard di $\mathbb{R}^3$. Il campo normale $\mathbf{N}$ dà quindi su S l'orientazione indotta dallo spazio ambiente.

Definizione 1.1. L'*elemento di area* della superficie S è la 2-forma differenziale dA definita da

$$dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

per $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS$.

Per ogni $p \in S$, dA_p è una forma bilineare alternante su T_pS e cioè appartiene a $\bigwedge^2(T_pS)^*$ e dunque dA è una 2-forma differenziale che è definita solo per i punti di S e si applica solo a coppie di vettori tangenti ad S. In particolare, il dominio di dA non è un aperto di $\mathbb{R}^3$, ma un aperto di S.

Per definizione

$$dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{N}_p$$

e poiché per ogni coppia di vettori in T_pS il prodotto vettoriale è parallelo al vettore normale $\mathbf{N}_p$, si ha che

$$dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \pm\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$$

dove il segno dipende dall'orientazione di $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ come base di T_pS: se la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ha la stessa orientazione di $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ allora $dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$ altrimenti, se l'orientazione è opposta allora $dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti, il prodotto vettoriale è nullo e non c'è problema di scelta del segno.

Consideriamo il cubo singolare $\mathbf{x} : U \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dato dalla parametrizzazione: in generale, non è detto che il dominio U sia un quadrato standard, ma si può suddividere in cubi singolari, calcolare il contributo di ogni cubo e poi sommare (cioè pensiamo $\mathbf{x}$ come una catena). Calcoliamo il pullback della forma dA: per $q \in U$, sia $\{\mathbf{e}_1|_q, \mathbf{e}_2|_q\}$ la base dello spazio tangente T_qU. Il differenziale $d\mathbf{x}$ della parametrizzazione in $p = \mathbf{x}(q) \in S$ è la funzione lineare $d\mathbf{x}_q : T_qU \to T_pS$ data da

$$d\mathbf{x}(\mathbf{e}_1|_q) = \mathbf{x}_u, \qquad d\mathbf{x}(\mathbf{e}_2|_q) = \mathbf{x}_v$$

e quindi dalla definizione di pullback di forme (Definizione 2.1 della Lezione 17) si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(dA)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = dA(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{N} \\
&= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \\
&= \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}$$

e dunque

$$\int_S dA = \int_U \mathbf{x}^*(dA) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

e ritroviamo la formula che definisce l'area di una superficie. Dunque dA è proprio l'elemento di area.

C'è un'espressione per l'elemento d'area su una superficie in termini del campo normale e dei differenziali dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$ che useremo per riscrivere il teorema di Stokes generale nelle forme dei teoremi classici.

Teorema 1.2. *Sia S una superficie regolare orientata in $\mathbb{R}^3$ (anche con bordo) e sia $\mathbf{N}$ il campo normale orientato come prima. Allora*

$$dA = N_1\, dy \wedge dz + N_2\, dz \wedge dx + N_3\, dx \wedge dy$$

dove $\mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3$ è la scrittura di $\mathbf{N}$ in componenti. Inoltre, su S abbiamo le uguaglianze

$$\begin{aligned}
N_1 dA &= dy \wedge dz \\
N_2 dA &= dz \wedge dx \\
N_3 dA &= dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Queste uguaglianze di forme differenziali su S significano che i due membri delle uguaglianze agiscono allo stesso modo sui vettori tangenti a S ma non su vettori generali di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Sviluppando il determinante che definisce dA lungo l'ultima riga e usando la definizione di prodotto wedge di 1-forme si ha

$$\begin{aligned} dA(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= N_1(v_2w_3 - v_3w_2) + N_2(v_3w_1 - v_1w_3) + N_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= N_1\, dy \wedge dz(\mathbf{v},\mathbf{w}) + N_2\, dz \wedge dx(\mathbf{v},\mathbf{w}) + N_3\, dx \wedge dy(\mathbf{v},\mathbf{w}) \end{aligned}$$

(attenzione ai segni dello sviluppo!) e si ottiene la prima uguaglianza. Per dimostrare le altre uguaglianze, siano $\mathbf{v},\mathbf{w} \in T_pS$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \alpha\mathbf{N}$ e scriviamo

$$\begin{aligned} N_1 dA(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{N}) && \text{per la definizione di } dA \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N})\,\alpha && \alpha\mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = \alpha \text{ perché } \mathbf{N} \text{ ha norma 1} \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \alpha\mathbf{N} && \text{per la (bi)linearità del prodotto scalare} \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) && \text{per il significato di } \alpha\mathbf{N} \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2) && \text{la prima componente del prodotto esterno} \\ & && \text{nella base ortonormale } \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\} \\ &= dy \wedge dz(\mathbf{v},\mathbf{w}) && \text{per definizione di prodotto esterno di 1-forme} \end{aligned}$$

e otteniamo la prima. Usando $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in modo simile, si ottengono le altre due. □

Si può riscrivere la prima uguaglianza del teorema usando l'operatore di Hodge: $\mathbf{N}$ è un campo vettoriale e quindi

$$\mathbf{N}^\flat = N_1\, dx + N_2\, dy + N_3\, dz$$

è la 1-forma associata. Calcolando l'operatore $*$ si ha

$$*\mathbf{N}^\flat = N_1 dy \wedge dz + N_2 dz \wedge dx + N_3 dx \wedge dy$$

(attenzione ai segni) che è il termine a destra dell'uguale.

Ricordiamo ora la definizione di contrazione di una forma differenziale per un campo vettoriale (Definizione 2.6, Lezione 19): si ha

$$\begin{aligned} dA(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} && \text{per definizione di } dA \\ &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{N}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} && \text{per le proprietà del determinante} \\ &= dx \wedge dy \wedge dz(\mathbf{N},\mathbf{v},\mathbf{w}) && \text{per definizione di prodotto esterno di 1-forme} \\ &= dV(\mathbf{N},\mathbf{v},\mathbf{w}) && \text{per definizione di } dV \\ &= \mathbf{N} \lrcorner\, dV(\mathbf{v},\mathbf{w}) && \text{per definizione di contrazione} \end{aligned}$$

Dunque l'uguaglianza del teorema è

$$\mathbf{N} \lrcorner\, dV = *\mathbf{N}^\flat$$

e abbiamo risolto l'Esercizio 3.2, punto (4) della Lezione 19, per $n = 3$ e $X = \mathbf{N}$, il campo normale. Questa dimostrazione vale per ogni n e per ogni campo vettoriale X, prestando attenzione ai segni nello sviluppo del determinante e nel calcolo dell'operatore di Hodge.

2 L'elemento di lunghezza

Ripetiamo rapidamente nel caso delle curve nello spazio i ragionamenti fatti per le superfici. L'elemento di lunghezza è la 1-forma su una curva che integrata dà la lunghezza della curva.

Sia $\alpha : I \to C \subseteq$ una curva regolare parametrizzata (non necessariamente per arcolunghezza) e usiamo la lettera u per indicare la coordinata sull'intervallo I.

Sia $\mathbf{t}(u)$ il campo tangente unitario su C. Lo spazio tangente T_pC alla curva in un suo punto p ha dimensione 1 e $\mathbf{t}$ dà una base di questo spazio e assegna anche l'orientazione. Una 1-forma su C è una famiglia di forme lineari sugli spazi tangenti e quindi basta assegnare il suo valore sugli elementi delle basi.

Definizione 2.1. L'*elemento di lunghezza* della curva C è la 1-forma differenziale ds sulla curva C definita da

$$ds_p(\mathbf{t}) = 1$$

Se $\mathbf{v} \in T_pC$ allora $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{t}$ e quindi $ds(\mathbf{v}) = \alpha$, per linearità. La forma ds è una 1-forma differenziale che è definita solo per i punti di C e si applica solo a vettori tangenti a C. In particolare, il dominio di ds non è un aperto di $\mathbb{R}^3$, ma un aperto di C.

Consideriamo la parametrizzazione $\alpha : I \to C$ come un 1-cubo singolare e calcoliamo il pullback della forma ds: per $q \in I$, sia $\{\mathbf{e}_1|_q\}$ la base dello spazio tangente T_qI. Il differenziale $d\alpha$ della parametrizzazione in $p = \alpha(q) \in C$ è la funzione lineare $d\alpha_q : T_qI \to T_pC$ data da

$$d\alpha(\mathbf{e}_1) = \alpha'(q)$$

e quindi dalla definizione di pullback di forme (Definizione 2.1 della Lezione 17) si ha

$$\begin{aligned}
\alpha^*(ds)(\mathbf{e}_1) &= ds(\alpha'(q)) \\
&= ds\left(\|\alpha'(q)\| \frac{\alpha'(q)}{\|\alpha'(q)\|}\right) \\
&= ds\left(\|\alpha'(q)\|\, \mathbf{t}\right) \\
&= \|\alpha'(q)\|
\end{aligned}$$

per definizione del campo tangente unitario $\mathbf{t} = \alpha'/\|\alpha'\|$ e dunque

$$\int_C ds = \int_I \alpha^*(ds) = \int_I \|\alpha'(u)\|\, du$$

e ritroviamo la formula che definisce la lunghezza della curva. Dunque ds è proprio l'elemento di lunghezza.

Anche in questo caso possiamo riscrivere la forma ds in termini dei differenziali dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.2. *Sia C una curva regolare in $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathbf{t}$ il campo tangente unitario. Allora su C valgono le uguaglianze*

$$t_1 ds = dx$$
$$t_2 ds = dy$$
$$t_3 ds = dz$$

dove $\mathbf{t} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3$ è la scrittura di $\mathbf{t}$ in componenti.

Dimostrazione. I termini presenti nelle uguaglianze sono delle 1-forme e quindi basta calcolarle sul vettore $\mathbf{t}$ che è la base dello spazio T_pC. Si ha

$$t_1\, ds(\mathbf{t}) = t_1, \quad t_2\, ds(\mathbf{t}) = t_2, \quad t_3\, ds(\mathbf{t}) = t_3$$

perché per definizione $ds(\mathbf{t}) = 1$. D'altra parte, $\{dx, dy, dz\}$ è la base duale di $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e quindi

$$dx(\mathbf{t}) = dx(t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3) = t_1\, dx(\mathbf{e}_1) + t_2\, dx(\mathbf{e}_2) + t_3\, dx(\mathbf{e}_3) = t_1$$

e analogamente

$$dy(\mathbf{t}) = t_2, \quad dz(\mathbf{t}) = t_3.$$

□

3 I teoremi classici

Siamo ora pronti a rivedere i teoremi classici e seguiamo la presentazione del libro di Spivak. Questi teoremi si possono enunciare per varietà con bordo. Noi ci limiteremo a versioni nel piano e nello spazio.

Teorema 3.1 (Il teorema di Gauss-Green nel piano). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio compatto con bordo un insieme di curve differenziabili regolari (a tratti), orientate in modo da avere il dominio "alla sinistra" (cioè i bordi esterni sono percorsi in verso antiorario, quelli interni in verso orario). Siano $P, Q : S \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Allora*

$$\int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dimostrazione. Basta porre $\omega = P\, dx + Q\, dy$ e notare che

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Scrivendo S come una 2-catena differenziabile, il teorema è un caso particolare del teorema di Stokes (Teorema 3.1, Lezione 21). □

Teorema 3.2 (Teorema della divergenza). *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio compatto con bordo un insieme di superfici orientate regolari, e sia $\mathbf{N}$ il campo normale con l'orientazione standard sul bordo ∂M e cioè $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ ha la stessa orientazione dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{F} : M \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale differenziabile. Allora*

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dA$$

Dimostrazione. Dall'Esercizio 3.1, punto (1) della Lezione 19 si ha la formula

$$d(*X^\flat) = (\operatorname{div} X)\, dV$$

per un campo differenziabile X e applicando il teorema di Stokes si ha

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_M d(*\mathbf{F}^\flat) = \int_{\partial M} *\mathbf{F}^\flat$$

Come prima si ha

$$*\mathbf{F}^\flat = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

e dal Teorema 1.2 sulla superficie bordo ∂M si ha

$$\begin{aligned} N_1 dA &= dy \wedge dz \\ N_2 dA &= dz \wedge dx \\ N_3 dA &= dx \wedge dy \end{aligned}$$

e quindi su ∂M abbiamo

$$*\mathbf{F}^\flat = F_1 N_1\, dA + F_2 N_2\, dA + F_3 n_3\, dA = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dA$$

ottenendo dunque la tesi. □

Teorema 3.3 (Teorema di Stokes o del rotore)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con bordo. Sia $\mathbf{N}$ il campo normale che dà l'orientazione su S e diamo al bordo ∂S l'orientazione indotta. Sia $\mathbf{t}$ il campo tangente unitario su ∂S e sia s l'arcolunghezza. Sia $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo differenziabile (definito e differenziabile su un aperto contentente S.) Allora*

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dA = \int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$. Ricordiamo che la definizione di rotore

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = *(d\mathbf{F}^\flat)$$

produce una $(n-2)$-forma differenziale. Nel caso $n = 3$ abbiamo una 1-forma che può essere interpretata come un campo vettoriale. Questa è l'interpretazione che stiamo usando, perché nell'enunciato del teorema c'è il prodotto scalare di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ con il campo normale $\mathbf{N}$. Dunque la definizione che stiamo usando è

$$\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = (*d\mathbf{F}^\flat)^\sharp$$

Nella Lezione 19, subito dopo la Definizione 2.12 di rotore abbiamo svolto i calcoli che mostrano come nel caso $n = 3$ questa definizione coincide con la definizione nota dai corsi di Analisi Matematica e di Fisica.

Come nella dimostrazione precedente, usando le uguaglianze del teorema 1.2, si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{N})\, dA &= (R_1 N_1 + R_2 N_2 + R_3 N_3)\ dA \\ &= R_1 N_1\, dA + R_2 N_2\, dA + R_3 N_3\, dA \\ &= R_1\, dy \wedge dz + R_2\, dz \wedge dx + R_3\, dx \wedge dy \\ &= *(\mathbf{R}^\flat) \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}\cdot\mathbf{N})\,dA &= *(\mathbf{R}^\flat) && \text{per il calcolo appena fatto}\\
&= *\left(\left(\left(*d\mathbf{F}^\flat\right)^\sharp\right)^\flat\right) && \text{per la definizione di } \mathbf{R}\\
&= **(d\mathbf{F}^\flat) && \text{perché gli isomorfismi } \sharp \text{ e } \flat \text{ sono inversi l'uno dell'altro}\\
&= d\mathbf{F}^\flat && ** = (-1)^{k(n-k)} = (-1)^{2\cdot 1} = 1
\end{aligned}$$

Dunque, usando il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dA = \int_S d\mathbf{F}^\flat = \int_{\partial S} \mathbf{F}^\flat$$

e dobbiamo calcolare l'ultimo integrale. Usando sulla curva ∂S le uguaglianze del Teorema 2.2 si ha

$$\mathbf{F}^\flat = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = F_1t_1\,ds + F_2t_2\,ds + F_3t_3\,ds = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\,ds$$

e si ha la tesi. □

4 Esercizi

Esercizio 4.1. Si consideri la superficie S data dal paraboloide ellittico di equazione

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

per $z \leq 1$ e sia ∂S il suo bordo orientato positivamente. Utilizzando il Teorema di Stokes si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial S} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\,ds$$

dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (9xz + 2y, 2x + y^2, -2y^2 + 2z)$$

Soluzione. Il bordo della superficie ∂S è la curva di equazione $x^2/4 + y^2/9 = 1$ nel piano $z = 1$. Anche senza suggerimento, non ci sembra il caso di parametrizzare la curva ∂S, di calcolarne il vettore tangente e poi di fare l'integrale. Usiamo quindi Stokes:

$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dA = \int_{\partial S} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\,ds$$

e quindi calcoliamo $\mathbf{N}$ e $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, sperando vengano più semplici. Il campo unitario normale $\mathbf{N}$ alla superficie S è dato da

$$N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{81}}}\left(-\frac{x}{2}, -\frac{2y}{9}, 1\right)$$

Il rotore di $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = *(d\mathbf{F}^\flat)^\sharp$$

e si ha $\mathbf{F}^\flat = (9xz + 2y)\,dx + (2x + y^2)\,dy + (-2y^2 + 2z)\,dz$ e dunque

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}^\flat &= 9x\,dz \wedge dx + 2\,dy \wedge dx + 2\,dx \wedge dy - 4y\,dy \wedge dz \\ &= -9x\,dx \wedge dz - 4y\,dy \wedge dz \end{aligned}$$

e

$$*(d\mathbf{F}^\flat) = -4y\,dx + 9x\,dy$$

Finalmente il campo vettoriale cercato è

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (-4y, 9x, 0)$$

e calcolando

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (-4y, 9x, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{81}}}\left(-\frac{x}{2}, -\frac{2y}{9}, 1\right) = 0$$

Dunque, ricordando che questo è un esercizio di Geometria e non di Analisi, l'integrale non è difficile da calcolare. . .

$$\int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\,ds = \int_S (\operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\,dA = \int_S 0 = 0$$

Questo conferma la nostra sensazione che gli unici integrali che compaiono negli esercizi o nei compiti d'esame sono banali, perché nessuno sa (o ha voglia di) calcolare veramente degli integrali non banali.

Esercizio 4.2. Definiamo un campo vettoriale $\mathbf{F}$ su $\mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x, y, z) = (0, 0, cz)$$

dove $c > 0$ è costante. Sia M un dominio compatto (un "corpo") contenuto nella regione $z \leq 0$. Se immaginiamo l'asse z come l'altitudine, allora M è "sotto il livello del mare" e cioè sott'acqua. Il campo F rappresenta la spinta verso il basso esercitata da una colonna di fluido di altezza $-z$ e densità costante c.

Poiché un fluido esercita la stessa pressione in tutte le direzioni, possiamo definire la *spinta di galleggiamento* su M, dovuta al liquido come

$$-\int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\,dA$$

in quanto la pressione è normale alla superficie del corpo. Calcolare la spinta di galleggiamento.

Soluzione. Per il teorema della divergenza

$$-\int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\,dA = -\int_M \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Poiché

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0 + 0 + c = c$$

si ha

$$-\int_{\partial M}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dA=-c\int_M dV=-c\,\mathrm{vol}(M)$$

(di nuovo un integrale ovvio) e quindi è uguale alla *massa* (= densità × volume) del fluido spostato. Se immaginiamo questa situazione sulla Terra, la spinta verso l'alto è pari al *peso* della quantità di fluido spostato.

Questo è, ovviamente, il *principio di Archimede*, scoperto circa 2 000 anni prima del teorema di Stokes.

Esercizio 4.3. Sia S la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la parabola $z=x^2$, orientata in modo tale che il versore normale nell'origine sia $(0,0,1)$, e sia R la regione regolare

$$R=\{(x,y,z)\in S \mid x\le 0,\ y\ge 0,\ z\le 1\}$$

Sia $\omega=2x^2\,dy+3y\,dz$. Calcolare $\int_R d\omega$.

Soluzione. La parabola ha equazioni parametriche $x=v$, $z=v^2$ e quindi la superficie è parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u,v)=\begin{cases}x &= v\cos u\\ y &= v\ \sin u\\ z &= v^2\end{cases}$$

Però questa parametrizzazione non è regolare proprio nell'origine, perché la parabola tocca l'asse z. Guardando la parametrizzazione si vede che una equazione cartesiana è

$$x^2+y^2=z$$

e quindi usiamo la parametrizzazione (più semplice, in realtà)

$$\mathbf{x}(u,v)=\begin{cases}x &= u\\ y &= v\\ z &= u^2+v^2\end{cases}$$

I vettori tangenti sono $\mathbf{x}_u=(1,0,2u)$ e $\mathbf{x}_v=(0,1,2v)$. Il prodotto esterno vale

$$\mathbf{x}_u\wedge\mathbf{x}_v=(-2u,-2v,1)$$

e quindi nell'origine vale proprio $(0,0,1)$. Dunque l'orientazione data dalla base $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ è quella richiesta dall'esercizio. Da questo punto in poi l'esercizio è simile all'Esercizio 2.2 della scorsa lezione. Leggetelo di nuovo per farvi guidare nello svolgimento.

5 Il Teorema di Gauss-Bonnet

Il teorema di Gauss-Bonnet ha varie "versioni" e cominciamo la trattazione dalla versione cosiddetta "locale". Questa versione "locale" lega l'area di una regione su una superficie con la curvatura della superficie e la curvatura (geodesica) della curva che ne costituisce il bordo. Questa versione è interessante perché mostra che la curvatura influenza l'area. Ai tempi di Gauss, l'unica geometria nota era quella euclidea, in cui la curvatura è identicamente nulla e perciò è impossibile notare questa influenza. Proprio il lavoro di Gauss mostrò per la prima volta la possibile natura della geometria non euclidea.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata e sia $\gamma \subseteq S$ una curva regolare contenuta in S. Il vettore $\mathbf{t}$, tangente alla curva γ, appartiene al piano tangente T_pS, mentre il vettore $\mathbf{N}$ è normale a T_pS. Il vettore $\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}$ è perpendicolare a $\mathbf{N}$ e quindi sta sul piano tangente. La terna $\{\mathbf{N}, \mathbf{t}, \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}\}$ è una terna ortonormale che dà una base di $\mathbb{R}^3$: il primo vettore è perpendicolare al piano tangente T_pS mentre gli altri due danno una base ortonormale (orientata positivamente) del piano tangente.

Sia $\mathbf{t}'$ la derivata del campo tangente della curva γ. In ogni punto di S possiamo decomporre il vettore $\mathbf{t}'$ nelle sue componenti *normale* (parallela al campo $\mathbf{N}$ normale alla superficie) e *tangenziale* (appartenente al piano tangente):

$$\mathbf{t}' = a\mathbf{N} + b\mathbf{t} + c(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t})$$

Per calcolare i coefficienti di questa decomposizione basta fare i prodotti scalari con i vettori della base ortonormale e si ottiene

$$a = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{N} = k\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = k_n$$

e cioè la curvatura normale nella direzione del vettore $\mathbf{t}$,

$$b = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$$

perché $\mathbf{t}$ è un campo di norma costante 1 e

$$c = \mathbf{t}' \cdot (\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}) = k_g$$

che si dice *curvatura geodesica* della curva γ. In termini di vettori scriviamo quindi

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n} = k_n\mathbf{N} + k_g(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t})$$

I termini fisici, $\mathbf{t}'$ è l'accelerazione e abbiamo scritto la decomposizione in accelerazione normale (dovuta al vincolo di stare sulla superficie S) e tangenziale, dovuta a forze non vincolari. Abbiamo già studiato a fondo il significato della curvatura normale e i legami con la seconda forma fondamentale. Nel teorema di Gauss-Bonnet il termine che compare è invece la curvatura geodesica.

Il primo enunciato che vediamo è

Teorema 5.1 (Gauss-Bonnet, versione locale liscia). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata, sia γ una curva regolare* chiusa e semplice *contenuta in S e sia R la regione di superficie racchiusa dalla curva γ, in modo che $\partial R = \gamma$. Allora*

$$\int_\gamma k_g\, ds = 2\pi - \int_R K\, dA$$

dove k_g è la curvatura geodesica di γ, K è la curvatura Gaussiana di S e ds, dA sono rispettivamente l'elemento di lunghezza di γ e di area di S.

La dimostrazione, che non vediamo e che NON È NEL PROGRAMMA D'ESAME consiste nell'identificare una forma differenziale opportuna e calcolare gli integrali del teorema di Gauss-Green. La dimostrazione di questo enunciato è la parte difficile di tutto questo argomento.

La prima generalizzazione interessante sta nel prendere la curva γ regolare a tratti e quindi possiamo pensare a γ come un *poligono curvilineo*, cioè una curva formata da un numero finito di archi regolari che si incontrano, formando degli angoli. Nei punti d'incontro si formano quindi gli angoli interni ed esterni al poligono e analizzando la dimostrazione del teorema precedente, si vede che la quantità 2π proviene dall'integrale del vettore tangente lungo la curva e quindi dà 2π perché per una curva chiusa e semplice il vettore tangente compie un giro intorno alla curva.

Nel caso ci siano degli angoli, il vettore tangente "salta" e quindi si accumulano contributi dati dagli angoli esterni. Si ottiene un enunciato in cui il termine 2π è sostituito da

$$\sum_i \alpha_i - (n-2)\pi$$

dove α_i sono gli angoli *interni* e cioè per γ un poligono curvilinei di n lati si ha

$$\int_\gamma k_g\, ds = \sum_i \alpha_i - (n-2)\pi - \int_R K\, dA$$

Nel caso di un triangolo ($n = 3$) si ottiene

Teorema 5.2 (Gauss-Bonnet per un triangolo)**.** *La somma degli angoli di un triangolo curvilineo è*

$$\pi + \int_R K\, dA + \int_\gamma k_g\, ds$$

Questa formula, dovuta a Gauss, è già sorprendente perché mostra come la curvatura della superficie e dei lati alteri la somma degli angoli di un triangolo. Naturalmente, nel piano euclideo $K = 0$ e quindi la regione non influisce.

Un altro caso interessante è quando $k_g = 0$ e cioè sulla traiettoria γ non agiscono forze esterne: l'accelerazione tangenziale è nulla e le curve di questo tipo si chiamano "geodesiche". Non avere accerelazione significa "andare dritti" (per quanto sia possibile rimanendo sulla superficie vincolo): nel piano, queste curve sono le rette, ma in un cilindro sono le eliche circolari di passo e velocità angolare costante (anche le circonferenze orizzontali e le rette verticali sono geodesiche).

Su una sfera, le geodesiche sono gli archi di cerchio massimo. Dunque per un triangolo sulla sfera di raggio 1 con lati archi di cerchio massimo si ha

$$\text{somma degli angoli} = \pi + \int_R dA = \pi + \text{area del triangolo } R$$

che mostra come in un triangolo sferico la somma degli angoli sia sempre maggiore di π e sia tanto maggiore tanto più grande è l'area del triangolo. Per i triangoli sferici questa formula era conosciuta già ben prima di Gauss ed è nota come teorema di Girard (1595-1632), vedi
`https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Girard_Albert/`

Però Gauss è il primo a fornire un motivo per questa formula e a individuare con precisione tutti i termini che contribuiscono a determinare la somma degli angoli.

L'ultimo teorema che vediamo è la "versione globale" di Gauss-Bonnet. I teoremi precedenti valgono sotto l'ipotesi addizionale che la regione R considerata sia tutta contenuta nell'immagine di una parametrizzazione regolare, per poter applicare il teorema di Stokes (non abbiamo insistito su questo perché tanto non vediamo la dimostrazione del teorema locale).

Sia ora S una superficie connessa, compatta e orientabile in $\mathbb{R}^3$. Dalla teoria delle superfici topologiche sappiamo che S è omeomorfa alla somma connessa di g tori, ma naturalmente la curvatura su S può essere molto diversa anche per superfici topologicamente equivalenti. Per esempio, due sfere di raggio diverso sono omeomorfe fra loro ma le curvature sono diverse.

L'ultima versione di Gauss-Bonnet dice

Teorema 5.3 (Gauss-Bonnet globale). *Sia S una superficie connessa, compatta e orientabile in $\mathbb{R}^3$. Allora*

$$\int_S K\,dA = 2\pi\chi(X)$$

dove $\chi(X) = 2 - 2g$ è la caratteristica di Eulero di S.

Prima di vedere la dimostrazione, analizziamo l'enunciato: il termine a sinistra dell'uguale coinvolge la curvatura Gaussiana, che è una quantità *locale* e che dipende dalla metrica della superficie. Il termine a destra invece è *globale* e dipende solo dalla topologia. L'uguaglianza afferma (come in altri casi già visti) che "accumulando" tante quantità geometriche/differenziali locali si ottiene una quantità che è un invariante *topologico* e dunque non dipende dalla geometria o dalla struttura differenziabile.

Deformando una superficie, si può cambiare la sua curvatura. Per esempio, se prendiamo una sfera (tutti i punti hanno curvatura positiva) e la "pieghiamo" possiamo ottenere con continuità una "banana", che ha punti di curvatura positiva (all'esterno) e punti di curvatura negativa (all'interno). È possibile deformare una sfera in modo che la curvatura sia minore o uguale a zero in tutti i punti? Il teorema di Gauss-Bonnet dice di no: per una superficie omeomorfa ad una sfera l'integrale della curvatura vale $4\pi > 0$ e quindi l'integrando non può essere sempre minore o uguale a zero. La topologia impone delle restrizione alle deformazioni geometriche possibili.

Dimostrazione. Una superficie connessa e compatta può sempre essere triangolata (teorema di Radó): fissiamo dunque una triangolazione, con i triangoli che hanno lati curve regolari e sono ognuno contenuto nell'immagine di una parametrizzazione. Suddividendo i triangoli in modo che siano abbastanza piccoli, questo si può certamente ottenere. La triangolazione scelta avrà V vertici, L lati e F facce.

Sommiamo tutti gli angoli di tutte le facce: dal teorema di Gauss-Bonnet per i triangoli otteniamo

$$\text{somma di tutti gli angoli} = \pi F + \int_S K\,dA + \sum_i \int_{\gamma_i} k_g$$

dove γ_i sono tutti i lati di tutti i triangoli. In questa somma ogni lato compare due volte, perché ogni lato è lato di due triangoli adiacenti e i due integrali si cancellano perché i lati sono percorsi con orientazione opposta. Abbiamo perciò

$$\text{somma di tutti gli angoli} = \pi F + \int_S K\,dA$$

Gli angoli intorno ad ogni vertice sommano a 2π perché siamo su una superficie e quindi la somma di tutti gli angoli vale $2\pi V$ e dunque

$$2\pi V = \pi F + \int_S K \, dA$$

Quanti lati ci sono? Ogni faccia ha 3 lati e ogni lato è lato di due facce e quindi

$$L = 3F/2$$

Sostituendo si ha la tesi

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(S) &= 2\pi V - 2\pi L + 2\pi F \\ &= \left(\pi F + \int_S K \, dA\right) - 3\pi F + 2\pi F \\ &= \int_S K \, dA \end{aligned}$$

$\square$