Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 24

Alberto Albano

In questa ultima lezione, nel primo paragrafo vediamo come usare il teorema di Stokes per fornire esempi non banali di forme chiuse ma non esatte. L'uso del Lemma di Poincaré ci permetterà di trarre conclusioni topologiche che sarebbero piuttosto difficile da ottenere con strumenti della sola topologia. Questo esempio È COMPRESO NEL PROGRAMMA D'ESAME, ed è l'ultimo argomento in programma.

Nei paragrafi 2 e 3 vediamo invece alcuni approfondimenti ed applicazioni del formalismo delle forme differenziali ad argomenti più avanzati: il teorema di de Rham e le equazioni di Maxwell. Questi paragrafi sono solo di lettura e NON SONO NEL PROGRAMMA D'ESAME. Leggeteli se siete interessati a vedere cosa imparerete nei corsi dei prossimi anni.

Il teorema di de Rham è uno degli argomenti importanti che vengono fatti nel corso di Geometria Superiore. Prerequisiti al teorema sono il corso di Istituzioni di Geometria, in cui vengono esposte la teoria delle forme differenziali, la coomologia di de Rham e il teorema di Stokes per le varietà differenziabili (generalizzando i risultati visti in questo corso) e il corso di Topologia Algebrica, in cui vengono sviluppate in generale le teorie omologiche e coomologiche, di cui la coomologia di de Rham che abbiamo definito nella Lezione 18 è un esempio particolarmente significativo. In questo paragrafo vediamo l'enunciato del teorema, ma naturalmente non la dimostrazione.

Le equazioni di Maxwell descrivono il comportamento del campo elettromagnetico e sono uno dei grandi trionfi della Fisica dell'Ottocento. Il loro studio ha messo in luce per la prima volta che lo spazio-tempo non è euclideo e questa è stata una delle ispirazioni per la relatività speciale di Einstein. Nel corso del Novecento, le equazioni di Maxwell si sono rivelate un caso particolare di teorie più generali (teorie di gauge, equazioni di Yang-Mills) che sono di studio corrente nella fisica contemporanea. Le equazioni di Maxwell sono studiate nel corso di Fisica 2 e compaiono anche in corsi più avanzati di Fisica Matematica. In questo paragrafo facciamo vedere come, usando il formalismo delle forme differenziali e in particolare l'operatore $*$ di Hodge, si possano scrivere le equazioni di Maxwell in una forma particolarmente semplice.

1 Una 2-forma chiusa ma non esatta

Abbiamo detto più volte che la la condizione di chiusura $d\omega = 0$ è una condizione *necessaria* per l'esattezza di una forma, ma in generale non sufficiente. Per dimostrare che una forma non è esatta abbiamo bisogno di qualche proprietà che tutte le forme esatte hanno e che è semplice da verificare.

Per esempio, nel caso della forma "argomento", nota in Analisi

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si può dimostrare la non esattezza calcolandone l'integrale sulla circonferenza unitaria (un cammino chiuso) e usando la Proposizione 2.2 della Lezione 20: una 1-forma è esatta se e solo se il suo integrale su ogni cammino chiuso è nullo.

Il teorema di Stokes ci permette di ottenere dei criteri simili anche per forme di grado superiore. Introduciamo un po' di terminologia per le catene singolari:

Definizione 1.1. Sia $c = \sum_i \alpha_i c_i$ una k-catena singolare definita nell'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

- c è un k-*ciclo* se $\partial c = 0$
- c è un k-*bordo* se esiste una $(k+1)$-catena b tale che $c = \partial b$

Naturalmente ogni bordo è automaticamente un ciclo: se $c = \partial b$ allora $\partial c = \partial^2 b = 0$.

Occorre prestare attenzione al fatto che le proprietà di essere ciclo oppure bordo dipendono dal dominio U. Per esempio, la 1-catena $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

è un ciclo perché $\partial c = \{c(1)\} - \{c(0)\} = \{(1,0)\} - \{(1,0)\} = 0$ (ricordiamo che il bordo di un cammino è "punto finale − punto iniziale" e quindi ogni cammino chiuso è un ciclo). Questo ciclo è un bordo? Se il dominio è $U = \mathbb{R}^2$ allora c è un bordo, perché è il bordo del disco chiuso di centro l'origine e raggio 1, come abbiamo visto nell'Esempio 1.2 della Lezione 22.

Se invece consideriamo $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, allora il disco non è più una catena in U e quindi non è detto che c sia un bordo. Il teorema di Stokes dà due implicazioni immediate che aiutano a rispondere a queste domande: quando una forma chiusa è esatta? quando un ciclo è un bordo?

Teorema 1.2. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k-forma differenziale e sia c una k-catena a valori in U. Allora*

(1) *Se ω è chiusa e c è un bordo, allora $\int_c \omega = 0$*

(2) *Se ω è esatta e c è un ciclo, allora $\int_c \omega = 0$*

Dimostrazione. Se c è un bordo, allora esiste una $(k-1)$-catena b tale che $c = \partial b$. Allora

$$\int_c \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = \int_b 0 = 0$$

perché ω è chiusa e otteniamo la (1).

In modo analogo, se ω è esatta, allora esiste una $(k-1)$-forma η tale che $\omega = d\eta$ e

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = \int_0 \eta = 0$$

perché c è un ciclo e otteniamo la (2). In entrambi i casi, la seconda uguaglianza è data dal teorema di Stokes. □

Poiché verificare che una forma differenziale è chiusa oppure che una catena è un ciclo è semplice, in quanto basta calcolare la derivata esterna oppure il bordo, questo teorema dà i seguenti utili criteri

- ω chiusa e $\int_c \omega \neq 0 \implies c$ non è un bordo
- c ciclo e $\int_c \omega \neq 0 \implies \omega$ non è esatta

Riprendendo l'esempio iniziale, poniamo $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, c la circonferenza unitaria

$$c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

e

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

la forma argomento. Il calcolo ben noto dall'Analisi è

$$\int_c \omega = 2\pi \neq 0$$

e quindi:

- poiché c è un ciclo, concludiamo che ω non è esatta
- poiché ω è chiusa, concludiamo che c non è un bordo

Osserviamo che in entrambi i casi, da un'ipotesi di un tipo (topologica oppure differenziale) otteniamo una conclusione del tipo opposto (differenziale oppure topologica).

L'esistenza di una forma chiusa ma non esatta implica, per il Lemma di Poincaré generale (Teorema 3.4, Lezione 20), che il dominio $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è contraibile. In questo caso, poiché stiamo usando 1-forme, possiamo usare il Lemma di Poincaré per i semplicemente connessi (Teorema 2.10, Lezione 20) e otteniamo il risultato più forte che U non è nemmeno semplicemente connesso.

Questa conclusione topologica si può anche ottenere osservando che U è omotopicamente equivalente ad una circonferenza e una circonferenza non è semplicemente connessa perché il suo gruppo fondamentale non è banale.

Le due dimostrazioni sono ugualmente complicate: la prima usa le forme differenziali, il lemma di Poincaré e il teorema di Stokes, l'altra richiede tutta la teoria del gruppo fondamentale, la sua invarianza omotopica e il calcolo del gruppo della circonferenza.

Per l'estensione alle dimensioni superiori, che adesso vedremo, abbiamo già gli strumenti per seguire la strada tramite Poincaré e Stokes. Consideriamo il dominio $U = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ (notiamo che U è semplicemente connesso) e la 2-forma

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy)$$

Con un calcolo diretto (anche se noioso) si verifica che $d\omega = 0$ e cioè ω è chiusa. La catena c è la usuale parametrizzazione della sfera unitaria, data da

$$c(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$$

sul rettangolo $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Per calcolare l'integrale, calcoliamo il pullback $c^*(\omega)$: i differenziali sono

$$\begin{aligned}
dx &= -\sin\varphi \sin\theta \, d\varphi + \cos\varphi \cos\theta \, d\theta \\
dy &= \cos\varphi \sin\theta \, d\varphi + \sin\varphi \cos\theta \, d\theta \\
dz &= -\sin\theta \, d\theta
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
&dy \wedge dz = -\cos\varphi \sin^2\theta \, d\varphi \wedge d\theta \\
&dx \wedge dz = \sin\varphi \sin^2\theta \, d\varphi \wedge d\theta \\
&dx \wedge dy = (-\sin^2\varphi \sin\theta \cos\theta - \cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta) \, d\varphi \wedge d\theta = -\sin\theta \cos\theta \, d\varphi \wedge d\theta
\end{aligned}$$

Gli addendi dell'integrale sono quindi (il denominatore vale 1 sulla sfera)

$$\begin{aligned}
x \, dy \wedge dz &= -\cos^2\varphi \sin^3\theta \, d\varphi \wedge d\theta \\
-y \, dx \wedge dz &= -\sin^2\varphi \sin^3\theta \, d\varphi \wedge d\theta \\
z \, dx \wedge dy &= -\sin\theta \cos^2\theta \, d\varphi \wedge d\theta
\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
-\cos^2\varphi \sin^3\theta - \sin^2\varphi \sin^3\theta - \sin\theta \cos^2\theta &= -\sin^3\theta - \sin\theta \cos^2\theta \\
&= -\sin\theta
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_c \omega = -\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \sin\theta \, d\theta = -2\pi \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = -4\pi \neq 0$$

Questa particolare catena non è un ciclo, in quanto $\partial c = \{N\} - \{S\}$ dove N e S sono rispettivamente il polo nord e il polo sud ottenuti come i cammini costanti per $\theta = 0$ e $\theta = 1$ (i cammini $\varphi = 0$ e $\varphi = 1$ sono lo stesso meridiano e si cancellano, vedi Esempio 1.5 della Lezione 22) e non possiamo dunque utilizzare direttamente i criteri che si ottengono dal Teorema 1.2. Se ω fosse esatta, avremmo $\omega = d\eta$, con η una 1-forma. Dunque

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = \int_N \eta - \int_S \eta = 0$$

perché l'integrale di una 1-forma su un punto (= 1-catena costante) è sempre nullo in quanto il differenziale di una funzione costante è nullo. Otteniamo quindi che ω non è esatta.

Come abbiamo osservato nell'Esempio 1.5 della Lezione 22, si può parametrizzare la sfera con un vero ciclo, usando le facce di un quadrato. L'integrazione viene più complicata (dobbiamo calcolare e sommare 6 integrali), ma il risultato finale è lo stesso perché è solo una riparametrizzazione della sfera e gli integrali sono invarianti per riparametrizzazione.

Poiché la forma ω è chiusa e l'integrale non nullo, otteniamo che la sfera unitaria *non* è un bordo in $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Inoltre, usando il Lemma di Poincaré generale (Teorema 3.4, Lezione 20), concludiamo che U non è contraibile e abbiamo quindi un esempio di spazio topologico semplicemente connesso ma non contraibile. Poiché la sfera S^2 è un retratto di deformazione di U, anche la sfera è non contraibile (sappiamo bene che è semplicemente connessa). La non contraibilità della sfera era già stata enunciata in Geometria DUE, ma non dimostrata per la mancanza di strumenti topologici adeguati. La teoria delle forme differenziali fornisce questi strumenti.

Naturalmente la non contraibilità di S^2 è un fatto puramente topologico e ci possiamo chiedere se sia possibile una dimostrazione interamente nell'ambito della topologia. La risposta è sì e uno strumento possibile è la teoria dell'omologia (corso di Topologia Algebrica).

Osservazione. Perché l'integrale è venuto negativo? La parametrizzazione della sfera che abbiamo usato dà come campo normale $\mathbf{N} = c_\varphi \wedge c_\theta$ (normalizzato) il vettore che punta verso l'*interno* della sfera (calcolate le derivate parziali e il prodotto vettoriale per esercizio per verificare questa affermazione).

Se ricordiamo il Teorema 1.2 della Lezione 23 sull'elemento d'area di una superficie, abbiamo che

$$dA = N_1\, dy \wedge dz - N_2\, dx \wedge dz + N_3\, dx \wedge dy$$

(controllate i segni, sono giusti) e cioè

$$\omega = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dA$$

perché nella definizione di ω i segni sono opposti alle componenti del vettore normale. Dunque (sulla sfera il termine $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$)

$$\int_c \omega = -\int_c \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dA = -\int_c dA = - \text{ area della sfera}$$

e quindi l'integrale viene negativo (otteniamo anche che l'area della sfera unitaria è 4π).

Questa integrazione sembra più semplice di quella che abbiamo svolto: è perché sappiamo già l'area della sfera, che si calcola proprio svolgendo l'integrale precedente.

Osservazione. Un esempio come il precedente esiste in tutte le dimensioni. Poniamo $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora esiste una $(n-1)$-forma $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ chiusa ma non esatta. Un esempio di tale forma è, usando le coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\omega = \frac{1}{r^{n/2}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove $r = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ e $\widehat{dx_i}$ significa che il termine dx_i non è presente. Si calcola facilmente che $d\omega = 0$. La dimostrazione della non esattezza si fa integrando ω sulla sfera S^{n-1} usando le coordinate polari di $\mathbb{R}^n$ (solo la parte "angolare").

2 Il teorema di de Rham

Prima della dimostrazione del teorema di Stokes abbiamo osservato la somiglianza fra le proprietà $d^2 = 0$ e $\partial^2 = 0$. Per interpretarne correttamente il significato, occorre sviluppare l'appropriato ambito algebrico. Qui di seguito diamo alcuni dettagli di questa costruzione. **Questa parte non è compresa nel programma dell'esame di Geometria 3**.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ fissato. Negli spazi vettoriali $\Omega^k(U)$ delle forme differenziali, abbiamo individuato due sottospazi,

$$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) = k\text{-forme su } U \textit{ chiuse}$$

$$B^k(U) = \operatorname{Im} d : \Omega^{k-1}(U) \to \Omega^k(U) = k\text{-forme su } U \textit{ esatte}$$

La proprietà $d^2 = 0$ implica che $B^k(U)$ è un sottospazio di $Z^k(U)$ e si può quindi considerare lo spazio vettoriale quoziente

$$H^k_{dR}(U) = Z^k(U)/B^k(U)$$

detto k-esimo gruppo di coomologia di de Rham (Definizione 2.1, Lezione 18).

Anche l'insieme di tutte le catene singolari su U forma un gruppo. Per avere la giusta costruzione dobbiamo considerare catene a coefficienti *reali*. Definiamo

$$C_k(U, \mathbb{R}) = \left\{ c = \sum_i a_i c_i \mid c_i \ k\text{-cubo singolare, } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

In questo modo $C_k(U, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale e i suoi elementi sono detti *catene singolari a coefficienti reali*. Poiché in questo paragrafo considereremo solo questo tipo di catene, le chiameremo semplicemente catene reali.

La definizione di integrale di una k-forma su una k-catena reale è la stessa data per le catene a coefficienti interi. Se $c = \sum_i a_i c_i$ allora $\displaystyle\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega$.

In analogia alla definizione di forme chiuse ed esatte, possiamo considerare i due sottospazi vettoriali di $C_k(U, \mathbb{R})$ nucleo ed immagine della mappa bordo ∂

$$Z_k(U, \mathbb{R}) = \ker \partial : C_k(U, \mathbb{R}) \to C_{k-1}(U, \mathbb{R})) = k\text{-cicli}$$

$$B_k(U, \mathbb{R}) = \operatorname{Im} \partial : C_{k+1}(U, \mathbb{R}) \to C_k(U, \mathbb{R}) = k\text{-bordi}$$

Naturalmente $\partial^2 = 0$ implica che $B_k(U, \mathbb{R}) \subseteq Z_k(U, \mathbb{R})$ e possiamo quindi formare lo spazio vettoriale quoziente:

$$H_k(U, \mathbb{R}) = Z_k(U, \mathbb{R})/B_k(U, \mathbb{R})$$

che viene detto *k-esimo gruppo di omologia singolare (a coefficienti reali).*

Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una forma fissata. La funzione

$$\int_{-} \omega : C_k(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$c \mapsto \int_c \omega$$

è lineare perché l'integrale è lineare rispetto al dominio di integrazione (per definizione di integrale su una catena) e cioè è un elemento dello spazio vettoriale duale $C_k(U,\mathbb{R})^*$. Dunque ad ogni forma associamo un elemento del duale e cioè abbiamo una funzione

$$\int : \Omega^k(U) \to C_k(U,\mathbb{R})^*$$
$$\omega \mapsto \int_- \omega$$

che è lineare perché l'integrale è lineare rispetto all'integrando.

Gli spazi vettoriali $\Omega^k(U)$ e $C_k(U,\mathbb{R})$ sono di dimensione infinita e non sono in generale interessanti. Restringiamoci quindi al sottospazio $Z^k(U)$ delle forme chiuse e integriamo solo sui cicli: abbiamo una funzione

$$\int : Z^k(U) \to Z_k(U,\mathbb{R})^*$$
$$\omega \mapsto \int_- \omega$$

Cosa capita se ω è esatta? Se $\omega = d\eta$, per il teorema di Stokes si ha

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0$$

perché integriamo solo sui *cicli*: $\partial c = 0$. Dunque le forme esatte sono contenute nel nucleo dell'integrale e quindi la funzione passa al quoziente e cioè possiamo scrivere

$$\int : \; Z^k(U)/B^k(U) \to Z_k(U,\mathbb{R})^*$$

Cosa capita se c è un bordo? Se $c = \partial b$, dove $b \in C_{k+1}(U,\mathbb{R})$ di nuovo per il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_c \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0$$

perché consideriamo solo forma *chiuse*: $d\omega = 0$. Dunque l'integrale si annulla sul sottospazio dei bordi e cioè definisce una funzione lineare sul quoziente $Z_k(U,\mathbb{R})/B_k(U,\mathbb{R})$. In conclusione, dal teorema di Stokes si ottiene che l'integrale fornisce una funzione lineare

$$\int : H^k_{dR}(U) \to (H_k(U,\mathbb{R}))^*$$

fra la coomologia di de Rham e (il duale del)l'omologia singolare.

Tutta questa teoria può essere generalizzata al caso di una varietà differenziabile M definendo le forme differenziali e le catene singolari su M. Il culmine è dato dal famoso

Teorema 2.1 (Teorema di de Rham)**.** *Se M è una varietà differenziabile, la funzione lineare*

$$\int : H^k_{dR}(M) \to (H_k(M,\mathbb{R}))^*$$

è un isomorfismo e cioè la coomologia di de Rham è il duale dell'omologia singolare.

L'importanza di questo teorema è che la coomologia di de Rham è definita tramite la struttura differenziabile mentre l'omologia singolare è una costruzione puramente topologica. Si può infatti dimostrare che i gruppi di omologia costruiti a partire dalle catene differenziabili sono isomorfi a quelli costruiti a partire dalle catene continue. Dunque è possibile "vedere" proprietà topologiche usando strumenti differenziabili e, dualmente, la struttura topologica impone vincoli alle possibili strutture differenziabili.

3 Le equazioni di Maxwell

Per scrivere le equazioni di Maxwell dobbiamo per prima cosa rivedere la definizione dell'operatore $*$ di Hodge. La definizione che abbiamo visto nella Lezione 19 è corretta ma incompleta: per definire l'operatore $*$ occorre fissare una forma bilineare simmetrica non degenere sullo spazio vettoriale considerato. Il caso visto nella Lezione 19 è quello di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare euclideo standard, il caso che servirà per scrivere le equazioni di Maxwell è lo spazio-tempo $\mathbb{R}^4$ con la metrica non-euclidea di Minkowski della relatività speciale.

Vediamo dunque nel primo paragrafo la definizione generale di operatore $*$ e nel secondo la scrittura delle equazioni di Maxwell. **Questa parte non è compresa nel programma dell'esame di Geometria 3**.

3.1 L'operatore $*$ di Hodge

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $\langle -, - \rangle$ una forma bilineare, simmetrica e non degenere che chiameremo *prodotto interno* (e non prodotto scalare perché non è necessariamente definito positivo). Dal Teorema di Sylvester sappiamo che possiamo trovare una base ortonormale e poiché la forma è non degenere, sulla diagonale ci sono solo 1 e -1. Fissiamo dunque una tale base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ per cui

$$\begin{cases} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1 & \text{per } i = 1, \ldots, k \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = -1 & \text{per } i = k+1, \ldots, n \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

Chiamiamo $(x_1, \ldots, x_n)$ le coordinate relative a questa base, in modo che $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ è una base per lo spazio vettoriale duale V^*. Definiamo su V^* un prodotto interno con le formule

$$\begin{cases} \langle dx_i, dx_i \rangle = 1 & \text{per } i = 1, \ldots, k \\ \langle dx_i, dx_i \rangle = -1 & \text{per } i = k+1, \ldots, n \\ \langle dx_i, dx_j \rangle = 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

in modo che l'isomorfismo $V \to V^*$ dato da $\mathbf{e}_i \mapsto dx_i$ rispetta i prodotti interni. Diciamo che un prodotto interno come quello dato ha segnatura $(\underbrace{+ \cdots +}_{k \text{ volte}} \ \underbrace{- \cdots -}_{n-k \text{ volte}})$.

Un prodotto scalare è definito positivo e quindi ha segnatura $(+ \cdots +)$. Il caso che studieremo in dettaglio per le equazioni di Maxwell avrà segnatura $(+ - - -)$ su $\mathbb{R}^4$.

Il prodotto interno su V^* induce un prodotto interno sulle potenze esterne $\bigwedge^k V^*$ nel modo seguente: se $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ e $dx_J = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ poniamo

$$\langle dx_I, dx_J \rangle = \det\left(\langle dx_{i_\alpha}, dx_{j_\beta} \rangle\right), \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq k$$

Poiché la base $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ è ortonormale, se esiste un indice i_α che non compare in dx_J, la riga corrispondente nella matrice è tutta nulla e quindi il determinante è zero. Questo mostra che dobbiamo solo calcolare $\langle dx_I, dx_I \rangle$: in questo caso la matrice dei prodotti interni è diagonale e ci sono solo 1 e -1 a seconda degli elementi in dx_I. Dunque la base $\{dX_I\}$ di $\bigwedge^k V^*$ è ortonormale e si hanno le formule

$$\begin{cases} \langle dx_I, dx_I \rangle = \prod_{\alpha=1}^k \langle dx_{i_\alpha}, dx_{i_\alpha} \rangle = \pm 1 & \\ \langle dx_I, dx_J \rangle = 0 & \text{per } I \neq J \end{cases}$$

Possiamo adesso definire l'operatore $*$ di Hodge relativo al prodotto interno fissato.

Definizione 3.1. Siano α, $\beta \in \bigwedge^k V^*$. Allora $*\beta$ è l'unico elemento tale che

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Capiamo il senso della definizione e vediamo delle formule esplicite per calcolare l'operatore $*$. Per prima cosa, per linearità, possiamo porre $\alpha = dx_I$, $\beta = dx_J$. Se $I \neq J$, allora $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ e quindi la definizione non ci dice niente.

Consideriamo il caso $\alpha = \beta = dx_I$. In monomio $*dx_I$ deve essere il monomio complementare a dx_I, in modo da avere la parte dei differenziali corretta e poi dobbiamo prendere il segno appropriato, in base al prodotto interno e all'ordine in cui scriviamo i differenziali. Si ottiene

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^\sigma \langle dx_I, dx_I \rangle (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

dove $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_{n-k}$, σ è la permutazione

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{array} \right)$$

e $(-1)^\sigma$ è il segno della permutazione. Se il prodotto interno è un prodotto scalare (definito positivo), allora questa definizione è la stessa che abbiamo dato nella Lezione 19, altrimenti il segno di $\langle dx_I, dx_I \rangle$ compare nel risultato finale.

Chiudiamo questo paragrafo scrivendo in modo esplicito tutte le formule dell'operatore $*$ per lo spazio di Minkowski, che è l'unico caso che useremo nel seguito.

Lo spazio di Minkowski è lo spazio $\mathbb{R}^4$, con coordinate tradizionalmente scritte (t, x, y, z), dove t è la coordinata *temporale* e (x, y, z) sono le coordinate *spaziali*. Il prodotto interno sul duale è definito da

$$\langle dt, dt \rangle = 1, \qquad \langle dx, dx \rangle = \langle dy, dy \rangle = \langle dz, dz \rangle = -1$$

Calcoliamo $*dt$: la permutazione è l'identità (segno $+1$) e il prodotto interno è $+1$ e dunque

$$*dt = dx \wedge dy \wedge dz$$

come nel caso standard. Invece per $*dx$ la permutazione è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

che ha segno -1, ma anche $\langle dx, dx\rangle = -1$ e quindi

$$*dx = dt \wedge dy \wedge dz$$

opposto al caso di $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare euclideo. Calcolando allo stesso modo tutti i termini si ha

$$\begin{aligned} *dt &= dx \wedge dy \wedge dz \\ *dx &= dt \wedge dy \wedge dz \\ *dy &= -dt \wedge dx \wedge dz \\ *dz &= dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

Il calcolo per le 2-forme è analogo: se ci sono due differenziali "spaziali", allora il prodotto interno vale 1 e la formula è la stessa di quella standard, se invece c'è un differenziale "spaziale" e il differenziale "temporale" il segno è opposto al caso euclideo. La tabella completa è

$$\begin{aligned} *(dt \wedge dx) &= -dy \wedge dz \\ *(dt \wedge dy) &= dx \wedge dz \\ *(dt \wedge dz) &= -dx \wedge dy \\ *(dx \wedge dy) &= dt \wedge dz \\ *(dx \wedge dz) &= -dt \wedge dy \\ *(dy \wedge dz) &= dt \wedge dx \end{aligned}$$

Come per il caso di un prodotto scalare, iterare due volte l'operatore $*$ dà l'identità a meno del segno e la formula esatta è

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)} s\, \omega$$

dove s è il *segno* del prodotto interno e cioè il determinante della matrice che lo rappresenta. Per un prodotto scalare $s = 1$, mentre per lo spazio di Minkowski, di segnatura $(+\ -\ -\ -)$ si ha $s = -1$. Usando questo, è immediato calcolare $*$ per le 3-forme: per le 1-forme il fattore $k(n-k) = 1 \cdot 3 = 3$ è dispari e dà un segno negativo. Anche s è negativo e dunque per lo spazio di Minkowski, $**\omega = \omega$ per una 1-forma. Dalla tabella per le 1-forme si ottiene dunque

$$\begin{aligned} *(dx \wedge dy \wedge dz) &= dt \\ *(dt \wedge dy \wedge dz) &= dx \\ *(dt \wedge dx \wedge dz) &= -dy \\ *(dt \wedge dx \wedge dy) &= dz \end{aligned}$$

3.2 Le equazioni di Maxwell

Consideriamo ancora $\mathbb{R}^4$ come prima con base $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ con coordinate (t, x, y, z). In particolare usiamo la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ per la parte "spaziale". Il campo elettrico e il campo magnetico sono due campi vettoriali su $\mathbb{R}^3$ dati in componenti da

$$\mathbf{E} = E_1\,\mathbf{i} + E_2\,\mathbf{j} + E_3\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{B} = B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k},$$

dove però le componenti E_i, B_j dipendono anche dal tempo, e sono cioè funzioni del tipo $E_i = E_i(t,x,y,z)$, $B_j = B_j(t,x,y,z)$. Quindi dovremmo scrivere più correttamente

$$\mathbf{E} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

Usando la notazione tradizionale

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

la divergenza di un campo si scrive come un prodotto scalare

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

e il rotore come un prodotto vettoriale

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

In questa notazione le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{Legge di Gauss per il campo magnetico}\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{Legge di Faraday}\\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho && \text{Legge di Gauss per il campo elettrico}\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J} && \text{Legge di Ampère-Maxwell}
\end{aligned}$$

dove $\rho =$ carica elettrica e $\mathbf{J}$ è la corrente elettrica. La prima legge di Gauss dice che non esistono monopoli magnetici, la seconda legge di Gauss che il flusso del campo elettrico dipende dalle cariche presenti. La legge di Faraday afferma che una variazione del campo magnetico produce una corrente elettrica (il rotore del campo elettrico), e la legge di Ampère-Maxwell che una variazione di campo elettrico o la presenza di una corrente elettrica producono campo magnetico.

In questa formulazione la coordinata temporale e le coordinate spaziali hanno ruoli distinti e le leggi non hanno una forma particolarmente simmetrica. Introduciamo una 2-forma, la *forma di Faraday*

$$\mathbf{F} = B_1\, dy \wedge dz - B_2\, dx \wedge dz + B_3\, dx \wedge dy + E_1\, dx \wedge dt + E_2\, dy \wedge dt + E_3\, dz \wedge dt$$

Osserviamo che possiamo scrivere $\mathbf{F}$ in una forma più comprensibile come

$$\mathbf{F} = *_s\mathbf{B}^\flat + \mathbf{E}^\flat \wedge dt$$

dove $*_s$ è l'operatore di Hodge sulle variabili "spaziali" e anche $\mathbf{B}^\flat$ e $\mathbf{E}^\flat$ sono 1-forme "spaziali".

Calcoliamo la 3-forma $d\mathbf{F}$: facendo i calcoli direttamente con la definizione si ottiene

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}dx + \frac{\partial B_1}{\partial y}dy + \frac{\partial B_1}{\partial z}dz + \frac{\partial B_1}{\partial t}dt\right) \wedge dy \wedge dz + \dots\\
&= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial t}\right) dx \wedge dy \wedge dt + \dots
\end{aligned}$$

e dunque l'equazione $d\mathbf{F} = 0$ corrisponde alle prime due equazioni di Maxwell.

Per trovare le altre due, definiamo la 1-forma

$$\mathbf{J} = \rho\, dt - J_1\, dx - J_2\, dy - J_3\, dz$$

dove ρ è la carica elettrica presente e (J_1, J_2, J_3) sono le componenti della corrente. Allora, calcolando l'operatore $*$ di Hodge rispetto alla metrica di Minkowski (con le formule date nel paragrafo precedente), la terza e la quarta equazione di Maxwell corrispondo all'uguaglianza di 3-forme

$$d(*\mathbf{F}) = 4\pi(*\mathbf{J})$$

Anche qui, per verificare questa affermazione, basta calcolare $*\mathbf{F}$ e poi calcolare tutte le derivate necessarie. Dunque in termini della forma di Faraday le equazioni sono più semplici da scrivere e rivelano anche una certa simmetria, maggiore di prima

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= 0 \\ d(*\mathbf{F}) &= 4\pi(*\mathbf{J}) \end{aligned}$$