Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2 - Prova scritta del 22 giugno 2020

COGNOME ....**NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (9 punti) In $\mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea, consideriamo il punto $N = (0, 0, 1)$ e i sottospazi:

$$X = S^2 \setminus \{N\}, \qquad E = \{(x, y, z) \in X \mid z = 0\}.$$

Sia $Y = X/E$ lo spazio quoziente ottenuto per contrazione di E a un punto, e sia $\pi\colon X \to Y$ la proiezione sul quoziente.

(1) Y è connesso?

(2) $Y \setminus \pi(E)$ è connesso?

(3) Mostrare che π è chiusa, ma non aperta.

(4) Y è compatto?

Esercizio 2. (6 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1}\, c\, a^{-1}\, d\, b\, c\, b^{-1}\, e^{-1}\, d\, e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici compatte, e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 3. (9 punti) Consideriamo la matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

con polinomio caratteristico $(1 - t)^2(1 + t)^2$.

Determinare la forma di Jordan J di M e una matrice invertibile P tale che $M = PJP^{-1}$.

Esercizio 4. (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico) (8 punti) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, con coordinate omogenee $(x : y : z)$, sia dato il fascio di coniche:

$$\mathcal{F} : \quad \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy = 0.$$

1. Trovare i punti base del fascio e le coniche degeneri del fascio.
2. Data la conica C di equazione $x^2 + y^2 + 2xz = 0$
   a) dire se C appartiene al fascio $\mathcal{F}$,
   b) trovare una conica del fascio $\mathcal{F}$ proiettivamente equivalente a C.