Corso di Studi in Matematica
GEOMETRIA 2

Prova scritta di recupero, 16 luglio 2020

Esercizio 1. (9 punti) Sia $\mathcal{B}$ l'insieme degli intervalli semichiusi della forma $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, che indichiamo con $\mathcal{T}$.
2. Dimostrare che le semirette della forma $(-\infty, a)$ e $[a, +\infty)$ sono aperte nella topologia $\mathcal{T}$.
3. Gli intervalli della forma (a, b) sono aperti nella topologia $\mathcal{T}$?
4. Sia Z un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ connesso nella topologia $\mathcal{T}$. Dimostrare che Z è formato da un solo punto.

Esercizio 2. (6 punti) Sia S_1 la superficie compatta che si ottiene identificando i lati del poligonl secondo la sequenza

$$W_1 = a\, b\, e^{-1}\, d\, c^{-1}\, a^{-1}\, b\, e\, c\, d$$

Determinare la classe di omeomorfismo della somma connessa $S = S_1 \sharp S_1$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 3. (9 punti) Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dove a, b, c, d sono parametri in $\mathbb{C}$.

(a) Determinare la forma canonica di Jordan al variare dei parametri a, b, c, d.

(b) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d si ha $A^2 = A$.

Esercizio 4. (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico) (8 punti) Consideriamo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$. Sia r la retta per i punti $(0 : k : 0 : 1)$ e $(-2 : 0 : k : 1)$, e sia π il piano di equazione:

$$kx_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0,$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare $r \cap \pi$ e $r + \pi$ al variare di k.

(b) Per quali valori di k esiste una retta contenuta in π ma disgiunta da r?