Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta dell'1 settembre 2020

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (7 punti) Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}.$$

(a) $\mathcal{F}$ definisce gli aperti di una topologia su $\mathbb{R}$? $\mathcal{F}$ definisce i chiusi di una topologia su $\mathbb{R}$?

(b) Mostrare che $\mathcal{F}$ è una base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, e descrivere gli aperti di $\mathcal{T}$.

(c) Dire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso, compatto, e/o di Hausdorff.

(d) Sia $S = \{1\} \cup [3, 5]$; determinare l'interno e la chiusura di S in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Esercizio 2. (7 punti) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea):

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B.$$

(a) Dimostrare che A è un retratto di X, scrivendo esplicitamente una retrazione $r_A : X \to A$.

(b) Dimostrare che B è un retratto di X, scrivendo esplicitamente una retrazione $r_B : X \to B$.

(c) Dimostrare che A non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\, f\, c^{-1}\, e^{-1}\, b\, d\, a^{-1}\, f^{-1}\, c\, e\, b^{-1}\, d^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la forma di Jordan J e il polinomio minimo di A.

(b) Calcolare l'esponenziale e^J.

(c) Determinare gli autovalori della matrice e^A, e dire se e^A è diagonalizzabile.

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ data da

$$F\big((x_0 : x_1 : x_2)\big) = (-x_0 + 2x_1 - 3x_2 : -3x_1 - x_2 : 3x_2).$$

(a) Verificare che F è una proiettività e trovarne i punti fissi.

(b) Mostrare che i punti A, B, C, D sono allineati, e calcolare il birapporto $\beta(A, B, C, D)$, dove

$$A = (1 : 0 : 0), \quad B = (1 : -1 : 0), \quad C = (3 : -1 : 0), \quad \text{e} \quad D = (0 : 1 : 0).$$