

Paolo Caldiroli

Dipartimento di Matematica – Università di Torino

Lezioni di Introduzione alle Equazioni alle derivate parziali

Seconda parte: problemi di evoluzione

(Versione: 7 ottobre 2014)

Indice

1	Le equazioni alle derivate parziali come modelli nella descrizione di fenomeni deterministici	3
2	Equazione del calore	9
2.1	Preliminari	9
2.2	Soluzione fondamentale	10
2.3	Soluzione del problema di Cauchy omogeneo	15
2.4	Esempi	19
2.5	Soluzione del problema di Cauchy non omogeneo	21
2.6	Principio del massimo	24
2.7	Unicità di soluzioni limitate	25
2.8	Altri risultati di unicità (metodo dell'energia)	30
2.9	Problema di Cauchy-Dirichlet in una dimensione spaziale	32
3	Equazioni del primo ordine	37
3.1	Introduzione	37
3.2	Equazioni lineari non omogenee	39
3.3	Equazioni quasilineari (metodo delle caratteristiche)	41
3.4	Leggi di conservazione scalari unidimensionali	49
3.5	Soluzioni deboli	54
4	Equazione delle onde	61
4.1	Un modello matematico per la corda vibrante	61
4.2	Equazione delle onde in dimensione 1	64
4.3	Problema di Cauchy-Dirichlet in una dimensione spaziale	66
4.4	Equazione delle onde in dimensione 3	67
4.5	Equazione delle onde in dimensione 2	71

Le equazioni alle derivate parziali come modelli nella descrizione di fenomeni deterministici

Un'equazione alle derivate parziali di ordine k , con k intero positivo, è un'equazione della forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \text{derivate parziali di } u \text{ fino all'ordine } k) = 0$$

essendo F un'assegnata funzione a valori reali e $u = u(x_1, \dots, x_n)$ una funzione incognita. Studieremo qui alcune equazioni alle derivate parziali di ordine 1 o 2. Spesso una delle variabili da cui dipende l'incognita u ha il significato di tempo e, in tal caso, si è soliti denotarla t .

Tra i molteplici ambiti in cui si incontrano le equazioni alle derivate parziali uno particolarmente significativo è quello relativo alla descrizione di fenomeni deterministici; ad esempio la diffusione di una data sostanza in un mezzo fluido, la distribuzione di temperatura in una data regione spaziale, l'evoluzione di una popolazione in un certo sistema biologico, etc.

La formulazione di un modello matematico per sistemi del genere si articola in vari passaggi e, generalmente, solo alla fine si perviene alla determinazione di un'equazione alle derivate parziali, o di un sistema di equazioni alle derivate parziali.

Vediamo come si può procedere in un caso generale relativamente semplice; più precisamente consideriamo un sistema la cui configurazione sia definibile mediante una sola grandezza e supponiamo che il sistema sia isolato cioè non intervengano fattori esterni ad alterare la quantità totale della grandezza in questione. Per costruire un modello matematico per tale sistema occorre introdurre i seguenti oggetti:

- **Variabile di stato.** È un campo scalare $u(t, x)$ associato alla grandezza in esame, che individua lo stato del sistema al tempo $t \in I$ nel punto $x \in \Omega$. Qui I è un intervallo in \mathbb{R} , corrispondente all'intervallo temporale in cui si vuole descrivere il fenomeno e Ω è un dominio¹ in \mathbb{R}^3 , corrispondente alla regione dello spazio in cui il sistema evolve. Quindi la variabile spaziale

¹ Ricordiamo che un dominio in \mathbb{R}^n è un aperto di \mathbb{R}^n non vuoto e connesso.

$x \in \Omega$ è più precisamente una terna (x_1, x_2, x_3) di variabili scalari. Naturalmente si possono considerare casi in cui Ω è un dominio nel piano, o nella retta (cioè un intervallo) oppure, più in generale, un dominio in \mathbb{R}^n . Esempi di variabile di stato sono la temperatura, la concentrazione di una sostanza, l'intensità di un campo elettrico, la densità di popolazione. A volte, a seconda del contesto, può risultare più significativo chiamare la variabile di stato u con l'appellativo di **densità** della grandezza in esame. Corrispondentemente, dato un sottodominio D contenuto in Ω , si chiama **massa** presente in D al tempo t il valore definito dall'integrale

$$U(t; D) = \int_D u(t, x) dx.$$

- **Flusso.** Si chiama **densità di flusso** o **flusso specifico** un campo vettoriale F che descrive il processo del sistema, cioè l'interazione della quantità rappresentata dalla variabile di stato con i vari elementi del sistema, ad esempio, campi di forze, effetti dissipativi, etc. Il campo F costituisce una **variabile di processo**. Data una superficie regolare chiusa Σ diffeomorfa alla sfera, si chiama **flusso (entrante)** attraverso Σ il valore definito dall'integrale di superficie

$$\phi(t; \Sigma) = - \int_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma$$

dove ν denota la normale esterna a Σ .

- **Legge di conservazione.** Esprime la relazione tra l'evoluzione temporale della quantità descritta dalla variabile di stato e il flusso ed è formulata dalla seguente uguaglianza

$$\frac{d}{dt} U(t; D) = \phi(t; \Sigma) \quad (1.0.1)$$

dove D è il dominio in \mathbb{R}^3 delimitato da Σ . Dunque $\Sigma = \partial D$. Tale relazione dice che la variazione della quantità descritta da u e presente all'interno di una superficie Σ è pari al flusso attraverso Σ . In altri termini: per far variare ciò che è contenuto entro Σ è necessario far passare qualcosa attraverso Σ .

- **Relazione costitutiva.** È la legge che definisce la dipendenza del flusso specifico dalla variabile di stato. In generale F è funzione di t, x, u e delle derivate parziali di u .

Osservazione 1.0.1. *Nel caso di sistema non isolato, cioè con possibile apporto o sottrazione dall'esterno della grandezza descritta dalla variabile di stato, oltre al flusso occorre introdurre un'altra variabile di processo e precisamente un campo scalare S che tenga conto della presenza di sorgenti e/o pozzi. In tal caso la legge di conservazione va sostituita da una **legge di bilancio** della forma*

$$\frac{d}{dt}U(t; D) = \phi(t; \Sigma) + \int_D S dx.$$

Oltre a ciò, per completare il modello, occorre precisare come ulteriore relazione costitutiva, la dipendenza di S da t da x e dalla variabile di stato.

Una volta introdotti gli ingredienti sopra elencati, il problema consiste nel trovare la funzione $u(t, x)$ che soddisfi l'equazione definita dalla legge di conservazione. Siccome tale equazione non è maneggevole dal punto di vista del calcolo perché coinvolge oggetti matematici di diverso genere (un integrale volumetrico, a primo membro, e uno superficiale, a secondo membro), conviene passare alla sua *versione differenziale*. Nell'effettuare questo passaggio si perde in generalità perché occorre richiedere maggior regolarità sulle funzioni in questione, ma si arriva ad un'equazione, che è un'equazione alle derivate parziali, più abbordabile a livello di calcolo.

Per costruire tale equazione osserviamo anzitutto che la legge di conservazione (1.0.1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_D u(t, x) dx = - \int_{\partial D} F \cdot \nu d\sigma \quad (1.0.2)$$

dove D è un qualunque dominio (diffeomorfo alla palla unitaria di \mathbb{R}^3) "ben contenuto" in Ω , cioè limitato e tale che $\overline{D} \subset \Omega$ (spesso si usa la notazione $D \subset\subset \Omega$).

Teorema 1.0.2. *Assumiamo F di classe C^1 . Una funzione $u \in C^1(I \times \Omega)$ risolve (1.0.2) per ogni $t \in I$ e per ogni dominio regolare $D \subset\subset \Omega$ se e solo se*

$$u_t + \operatorname{div}_x F = 0 \quad \text{in } I \times \Omega. \quad (1.0.3)$$

Ricordiamo che la divergenza di un campo vettoriale $F = (F_1, \dots, F_n)$ di classe C^1 in un certo dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è il campo scalare così definito:

$$\operatorname{div} F = \partial_{x_1} F_1 + \dots + \partial_{x_n} F_n.$$

In (1.0.3) scriviamo $\operatorname{div}_x F$ intendendo che calcoliamo la divergenza solo rispetto alla variabile spaziale x . Chiaramente, tenuto conto della discussione precedente, nel teorema 1.0.2 F è un campo vettoriale a valori in \mathbb{R}^3 .

Dimostrazione. Fissiamo un dominio regolare $D \subset\subset \Omega$. Per la regolarità di u , abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \int_D u(t, x) dx = \int_D u_t(t, x) dx.$$

Inoltre, siccome F è di classe C^1 , possiamo applicare il **teorema della divergenza**⁽²⁾ e trasformare il flusso in un integrale volumetrico:

² **Teorema della divergenza:** dati un dominio D in \mathbb{R}^n limitato e regolare (cioè con frontiera di classe C^1) e una funzione $F \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$, vale che $\int_D \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial D} F \cdot \nu d\sigma$, dove ν denota la normale esterna in ogni punto di ∂D . Chiaramente ν è funzione di $x \in \partial D$. La richiesta di regolarità di ∂D garantisce l'esistenza e la continuità della funzione $x \mapsto \nu(x)$ in ∂D , e quindi la buona positura dell'integrale di superficie.

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_D \operatorname{div}_x F \, dx.$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} U(t; D) - \phi(t; \partial D) = \int_D (u_t - \operatorname{div}_x F) \, dx.$$

Pertanto se u verifica (1.0.3) allora soddisfa anche (1.0.2) per ogni dominio regolare $D \subset\subset \Omega$. Viceversa supponiamo che u verifichi (1.0.2). Allora u deve risolvere (1.0.3). Se no, supponiamo che in un punto $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ sia $u_t(t_0, x_0) + \operatorname{div}_x F(t_0, x_0) \neq 0$. In particolare assumiamo che sia $u_t(t_0, x_0) + \operatorname{div}_x F(t_0, x_0) > 0$ (nel caso < 0 si ripeterà lo stesso argomento). Allora per continuità $u_t(t_0, x) + \operatorname{div}_x F(t_0, x) > 0$ per ogni x in un intorno sferico N di x_0 . Possiamo supporre $N \subset\subset \Omega$ e quindi, prendendo $D = N$ troviamo che

$$\frac{d}{dt} U(t_0; N) - \phi(t_0; \partial N) > 0$$

una contraddizione. \square

L'equazione (1.0.3) è la legge di conservazione in forma differenziale. Specificando la relazione costitutiva otteniamo un'equazione alle derivate parziali per la variabile di stato u .

Osservazione 1.0.3. *Nel caso di sistema non isolato, al posto della legge di conservazione dobbiamo considerare la legge di bilancio e dedurre la forma differenziale in modo analogo a quanto fatto sopra. L'equazione risultante è: $u_t + \operatorname{div}_x F = S$ in $I \times \Omega$.*

La determinazione della relazione costitutiva è un punto cruciale nella formulazione del modello. Vediamo alcune situazioni che vengono prese in esame.

- **Fenomeni di trasporto passivo**

Per descrivere fenomeni di trasporto passivo si considera un flusso lineare in u , cioè $F = A(t, x)u$ con $A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Qui stiamo prendendo la variabile spaziale in \mathbb{R}^3 ma potremmo ripetere lo stesso discorso nel caso di variabile spaziale n -dimensionale con n intero positivo qualsiasi (incluso il caso $n = 1$). Inoltre generalmente il campo vettoriale A si suppone sufficientemente regolare.

Per scrivere l'equazione alle derivate parziali corrispondente a questa situazione e, più precisamente, nel calcolare $\operatorname{div}_x F$, dobbiamo considerare $F(t, x) = A(t, x)u(t, x)$. L'equazione risultante è:

$$u_t + A(t, x) \cdot \nabla_x u + b(t, x)u = 0 \tag{1.0.4}$$

dove $b(t, x) = \operatorname{div}_x A(t, x)$ e ∇_x denota l'operatore *gradiente* (rispetto a x) cioè $\nabla_x u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$. Nel caso di variabile spaziale unidimensionale si sarebbe ottenuta un'equazione della forma

$$u_t + a(t, x)u_x + b(t, x)u = 0$$

con a e b campi scalari. L'equazione (1.0.4) è *del primo ordine* (perché il massimo ordine di derivazione è 1) e *lineare* perché tale è l'operatore che agisce su u e sulle sue derivate parziali. Più precisamente, posto

$$L(u) = \partial_t u + A(t, x) \cdot \nabla_x u + b(t, x)u$$

l'equazione (1.0.4) è esprimibile nella forma $L(u) = 0$ e si ha che $L(u+v) = L(u) + L(v)$ e $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ per ogni coppia di funzioni u e v e per ogni costante $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Fenomeni di trasporto convettivo**

Per tali fenomeni si considera un flusso che dipende da u in modo non lineare, cioè $F = G(u)$ con $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sufficientemente regolare. Tenuto conto che $F(t, x) = G(u(t, x))$, l'equazione risultante è

$$u_t + G'(u) \cdot \nabla_x u = 0 \quad (1.0.5)$$

che nel caso di variabile spaziale unidimensionale si riduce a

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

dove $g = G'$. L'equazione (1.0.5) è *del primo ordine* e *quasi lineare* perché è lineare rispetto alle derivate di ordine maggiore (in questo caso, quelle del primo ordine) ma non è lineare rispetto a u .

- **Fenomeni di diffusione**

Flusso contro-gradiente: $F = -k \nabla_x u$ con k costante positiva.

Il trasporto della grandezza in esame avviene ortogonalmente alla superfici di livello della funzione densità, nella direzione che va da zone ad alta densità verso zone a bassa densità. Dato che

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x F &= -k \operatorname{div}_x (\nabla_x u) = -k (\partial_{x_1} u_{x_1} + \partial_{x_2} u_{x_2} + \partial_{x_3} u_{x_3}) \\ &= -k (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = -k \Delta_x u \end{aligned}$$

dove $\Delta_x = \partial_{x_1 x_1} + \partial_{x_2 x_2} + \partial_{x_3 x_3}$ è l'operatore *laplaciano* (rispetto alla variabile spaziale $x \in \mathbb{R}^3$). L'equazione risultante è l'equazione di diffusione

$$\begin{aligned} u_t - k \Delta_x u &= 0 \quad (\text{caso omogeneo}) \text{ oppure} \\ u_t - k \Delta_x u &= S(t, x) \quad (\text{caso non omogeneo}) \end{aligned} \quad (1.0.6)$$

a seconda che il sistema sia isolato o ci sia un termine di sorgente S . Nel caso di variabile spaziale unidimensionale otteniamo le equazioni $u_t - k u_{xx} = 0$ oppure $u_t - k u_{xx} = S(t, x)$, rispettivamente. Osserviamo che le equazioni (1.0.6) sono del secondo ordine e lineari (l'operatore differenziale in questo caso è $L = \partial_t - k \Delta_x$).

La propagazione del calore in un corpo o in una regione spaziale è un fenomeno diffusivo e, in un contesto del genere, l'equazione di diffusione viene anche detta *equazione del calore*.

Equazione del calore

2.1 Preliminari

Come visto nel capitolo 1, l'equazione del calore, o equazione di diffusione, è

$$u_t - k \Delta u = f \quad \text{in } I \times \Omega \quad (2.1.1)$$

dove $u = u(t, x)$ è la funzione incognita, k è una costante positiva fissata, Ω è un dominio in \mathbb{R}^n , I un intervallo in \mathbb{R} e $f \in C(I \times \Omega)$ un'assegnata funzione. Ricordiamo che Δ è l'operatore di Laplace, rispetto alla variabile spaziale $x \in \mathbb{R}^n$ (più precisamente dovremmo scrivere Δ_x ma omettiamo l'indice x per semplicità di notazione). Se $f \equiv 0$, l'equazione (2.1.1) si dice omogenea.

Qui abbiamo introdotto l'equazione del calore in dimensione spaziale n qualsiasi. Per molti aspetti, questa maggior generalità non comporta nessuna differenza né difficoltà in più rispetto, per esempio, al caso unidimensionale. Anzi, in alcune situazioni, studiando l'equazione in dimensione spaziale maggiore di 1 si riesce a comprendere il significato di alcuni risultati in misura più appropriata.

Una soluzione di (2.1.1) è una funzione $u: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 rispetto a $t \in I$, di classe C^2 rispetto a $x \in \Omega$ e soddisfacente (2.1.1) puntualmente. Le soluzioni che non dipendono dal tempo si chiamano *soluzioni stazionarie*. Evidentemente una soluzione stazionaria di (2.1.1) è una soluzione dell'equazione di Poisson $-k\Delta u = f$ in Ω (e viceversa).

Generalmente, dato che l'equazione del calore si riferisce ad un problema di evoluzione, si è interessati a studiare la (2.1.1) per tempi positivi, essendo assegnata una condizione iniziale che descrive lo stato del sistema all'istante $t = 0$. In altri termini, si studia il problema

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \Omega \end{cases}$$

dove $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ e la funzione $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è assegnata. Tale problema si chiama *problema di Cauchy* associato all'equazione del calore. Se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$

solitamente si dà anche una condizione sul bordo, istante per istante, e si studia il cosiddetto *problema misto*. Ad esempio, il problema misto con condizioni al bordo di tipo Dirichlet, detto *problema di Cauchy-Dirichlet*, è della forma

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \Omega \end{cases}$$

dove, oltre a f e u_0 , è assegnata anche la funzione $g: \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Si noti che nello studio dell'equazione del calore e dei problemi ad essa associati, senza perdita di generalità, possiamo supporre $k = 1$. Infatti, posto

$$v(t, x) = u(t/k, x)$$

si verifica facilmente che u soddisfa $u_t - k\Delta u = f(t, x)$ in $I \times \Omega$ se e solo se v soddisfa $v_t - \Delta v = \frac{1}{k}f(t/k, x)$ in $kI \times \Omega$. Nello studio del problema misto anche la condizione al contorno andrà modificata con una sostituzione analoga, chiedendo che sia $v(t, x) = g(t/k, x)$ per $(t, x) \in kI \times \partial\Omega$.

2.2 Soluzione fondamentale

Consideriamo l'equazione del calore

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n. \quad (2.2.1)$$

Osserviamo che tale equazione è invariante per dilatazioni rispetto ad entrambe le variabili t e x ma con gradi differenti perché differente è l'ordine di derivazione rispetto a t e a x . Più precisamente, se u è una soluzione di (2.2.1), allora per ogni $\lambda > 0$ la funzione $v(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ è pure soluzione di (2.2.1). Infatti

$$v_t(t, x) - \Delta v(t, x) = \lambda^2 u_t(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda^2 \Delta(\lambda^2 t, \lambda x) = 0.$$

Inoltre se $\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx < +\infty$ per ogni $t > 0$ allora anche $\int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) dx < +\infty$ e, più precisamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda^2 t, \lambda x) dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda^2 t, y) dy.$$

In particolare, scegliendo $\lambda = t^{-1/2}$, si ha che

$$\frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(1, y) dy. \quad (2.2.2)$$

Motivati dalle precedenti osservazioni, cerchiamo una funzione $u: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (2.2.1) con le seguenti proprietà:

- (i) u è radialmente simmetrica rispetto a x ,
(ii) u è della forma $u(t, x) = \frac{1}{t^{n/2}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$,
(iii) per ogni $t > 0$ la funzione $x \mapsto u(t, x)$ è assolutamente integrabile su \mathbb{R}^n e verifica la *condizione di normalizzazione*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx = 1 \quad \text{per ogni } t > 0.$$

Teorema 2.2.1. *La funzione*

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \quad (2.2.3)$$

è l'unica soluzione di (2.2.1) che verifica le proprietà (i)–(iii) sopra elencate.

Dimostrazione (nel caso $n = 1$). Per le proprietà (i) e (ii) cerchiamo una soluzione di (2.2.1) della forma

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (2.2.4)$$

con $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pari. Tenuto conto di (2.2.2), la condizione di normalizzazione richiesta nella proprietà (iii) si riformula così

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(y) dy = 1. \quad (2.2.5)$$

L'equazione del calore su u si traduce in un'equazione differenziale ordinaria per v . Infatti, calcoliamo

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \frac{x}{t^2} v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ u_{xx}(t, x) &= \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \left(v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{t}} v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + 2v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right)$$

e dunque u verifica (2.2.1) se e solo se v risolve

$$v + rv' + 2v'' = 0 \quad (2.2.6)$$

dove $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Siccome $v + rv' = (rv)'$, l'equazione (2.2.6) diventa $(rv + 2v')' = 0$ e quindi

$$rv + 2v' = C$$

per qualche costante $C \in \mathbb{R}$. La scelta più semplice e, a posteriori, efficace è prendere $C = 0$. Di fatto si può verificare che tale scelta è necessaria per avere l'assoluta integrabilità di v su \mathbb{R} , richiesta per via della condizione di normalizzazione (cfr. esercizio 2.2.2). Resta così da studiare l'equazione

$$v' = -\frac{r}{2}v$$

la cui soluzione generale è

$$v(s) = Ke^{-r^2/4}.$$

La costante K si determina imponendo la condizione di normalizzazione (2.2.5) e, tenuto conto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$, si ottiene

$$K = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

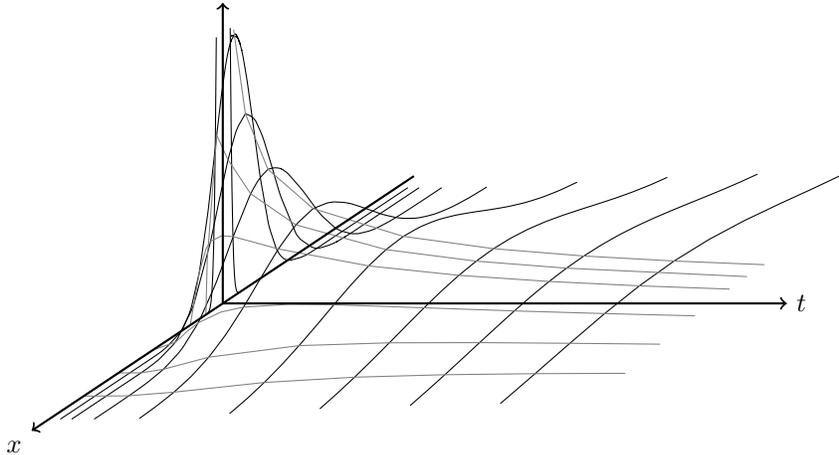
In conclusione, sostituendo in (2.2.4) troviamo l'espressione cercata per $u(t, x)$. Omettiamo la dimostrazione nel caso $n > 1$, che non presenta alcuna differenza sostanziale ma solo qualche calcolo leggermente più laborioso. \square

Esercizio 2.2.2. Dimostrare che se v è soluzione di $rv(r) + 2v'(r) = C$ in \mathbb{R} e v è assolutamente integrabile in \mathbb{R} allora $C = 0$.

Suggerimento: se v è assolutamente integrabile in \mathbb{R} allora esiste una successione $r_k \rightarrow +\infty$ tale che $v(r_k) \rightarrow 0$. Integrare l'equazione $v + \frac{2v'}{r} = \frac{C}{r}$ tra 1 e r_k e passare al limite osservando che

$$\left| \int_1^{r_k} \frac{v'(r)}{r} dr \right| \leq \frac{|v(r_k)|}{r_k} + |v(1)| + \int_1^{r_k} \frac{|v(r)|}{r^2} dr \leq C + \int_1^{r_k} |v(r)| dr.$$

Le funzione $u(t, x)$ definita in (2.2.3) si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. Ne riportiamo qui il grafico.



Mettiamo in evidenza alcune proprietà significative della soluzione fondamentale che denotiamo, d'ora in poi, $\Phi(t, x)$.

- Φ è di classe C^∞ sul suo dominio ed è sempre positiva;
- per ogni $t > 0$ la funzione $\Phi(t, \cdot)$ è una gaussiana centrata nell'origine, con varianza $\sigma = \sqrt{2t}$;
- $\Phi(t, \cdot) \rightarrow 0$ uniformemente su \mathbb{R}^n per $t \rightarrow +\infty$;
- per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $\Phi(t, \cdot) \rightarrow 0$ uniformemente in $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon$ per $t \rightarrow 0^+$.

Possiamo inoltre interpretare le proprietà sopra elencate nel modo seguente: al tendere di t a zero la soluzione fondamentale tende a concentrarsi nell'origine. Inoltre, a partire dalla situazione iniziale, in cui la massa è concentrata tutta nell'origine, il sistema, governato dall'equazione di diffusione, evolve in modo tale che la massa inizi a distribuirsi in tutto lo spazio, con distribuzione gaussiana e, per tempi sempre più grandi, si estenda in modo sempre più omogeneo nello spazio stesso.

La distribuzione di Dirac

È possibile descrivere il comportamento della soluzione fondamentale per $t \rightarrow 0^+$ in termini più precisi introducendo la nozione di *distribuzione di Dirac* o *delta di Dirac*.

Indichiamo con $C_b(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue e limitate (la lettera “ b ” posta ad indice inferiore sta per “*bounded*”). Si chiama *distribuzione di Dirac* l'applicazione $\delta: C_b(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$\delta(g) = g(0) \quad \forall g \in C_b(\mathbb{R}^n). \quad (2.2.7)$$

Dunque la distribuzione di Dirac è quell'operatore che “valuta nell'origine” ogni funzione continua e limitata. Si ha che:

Teorema 2.2.3. *Per ogni $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x)g(x) dx \rightarrow \delta(g) \quad \text{per } t \rightarrow 0^+.$$

In breve, $\Phi(t, \cdot) \rightarrow \delta$ per $t \rightarrow 0^+$.

A volte in letteratura si incontra la scrittura

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)g(x) dx \quad \text{in luogo di} \quad \delta(g) \quad (2.2.8)$$

che sembra suggerire – erroneamente – che δ sia una funzione su \mathbb{R}^n . Ciò è falso:

Proposizione 2.2.4. *Non esiste nessuna funzione $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)g(x) dx = g(0) \quad \text{per ogni } g \in C_b(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Se no, per ogni $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ tale che $g(0) = 0$ si avrebbe che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)g(x) dx = 0. \quad (2.2.9)$$

Da ciò segue che $v = 0$ quasi ovunque in \mathbb{R}^n e quindi (2.2.9) varrebbe per ogni $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ indipendentemente dal valore di $g(0)$. \square

Dunque la scrittura integrale (2.2.8) è da intendere in senso puramente formale. Si dice anche che la delta di Dirac è una “funzione generalizzata”. Con la notazione *impropria* (2.2.8) il teorema 2.2.3 si enuncia scrivendo *formalmente* che $\Phi(t, x) \rightarrow \delta(x)$ per $t \rightarrow 0^+$.

Dimostrazione del teorema 2.2.3. Il teorema 2.2.3 è un caso particolare del teorema 2.3.1. Ne presentiamo comunque la dimostrazione che risulta più semplice di quella che vedremo nella prossima sezione. Fissiamo una funzione $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Dato che $\delta(g) = g(0)$, dobbiamo dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x)g(x) dx \rightarrow g(0) \quad \text{per } t \rightarrow 0^+. \quad (2.2.10)$$

Sfruttando la condizione di normalizzazione e la positività di Φ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x)g(x) dx - g(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x)(g(x) - g(0)) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) |g(x) - g(0)| dx. \end{aligned}$$

Preso un arbitrario $\varepsilon > 0$, per la continuità di g in 0, esiste $\rho > 0$ tale che $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$ se $|x| < \rho$. Quindi, posto $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|$ (si noti che $\|g\|$ è finito in quanto g è assunta limitata), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) |g(x) - g(0)| dx &= \int_{|x| < \rho} \Phi(t, x) |g(x) - g(0)| dx \\ &\quad + \int_{|x| \geq \rho} \Phi(t, x) |g(x) - g(0)| dx \\ &\leq \int_{|x| < \rho} \Phi(t, x) \varepsilon dx + \int_{|x| \geq \rho} \Phi(t, x) 2 \|g\| dx \\ &< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) dx + 2 \|g\| \int_{|x| \geq \rho} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} dx \\ &= \varepsilon + \frac{2 \|g\|}{\pi^{n/2}} \int_{|y| \geq \frac{\rho}{\sqrt{4t}}} e^{-|y|^2} dy. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo di nuovo sfruttato la condizione di normalizzazione e, per il secondo integrale, abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $x \mapsto y = \frac{x}{\sqrt{4t}}$. Vogliamo ora dimostrare che

$$\int_{|y| \geq \frac{\rho}{\sqrt{4t}}} e^{-|y|^2} dy \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0^+. \quad (2.2.11)$$

Supponiamo per un momento che (2.2.11) sia vera. Allora possiamo concludere procedendo in questo modo:

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) g(x) dx - g(0) \right| \leq \varepsilon + \frac{2\|g\|}{\pi^{n/2}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \frac{\rho}{\sqrt{4t}}} e^{-|y|^2} dy = \varepsilon.$$

Poiché ε è un numero positivo arbitrario, possiamo dedurre che

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) g(x) dx - g(0) \right| \leq 0.$$

D'altra parte, ovviamente si ha anche che

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) g(x) dx - g(0) \right| \geq 0$$

e quindi il limite esiste e vale zero, cioè vale (2.2.10). Ciò conclude la dimostrazione, pur di verificare la validità di (2.2.11). Svolgiamo quest'ultimo passaggio in un lemma distinto, che risulterà utile anche in seguito. \square

Lemma 2.2.5. $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{|y| \geq \tau} e^{-|y|^2} dy = 0.$

Chiaramente il limite del lemma 2.2.5 equivale a (2.2.11).

Dimostrazione. Da semplici considerazioni geometriche osserviamo che la palla $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < \tau\}$ contiene il cubo $\{y \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{\tau}{\sqrt{n}} < y_i < \frac{\tau}{\sqrt{n}}, i = 1, \dots, n\}$ e quindi, fattorizzando $e^{-|y|^2} = e^{-y_1^2} \dots e^{-y_n^2}$, abbiamo che

$$\int_{|y| \geq \tau} e^{-|y|^2} dy \leq \left(\int_{|y_1| \geq \frac{\tau}{\sqrt{n}}} e^{-y_1^2} dy_1 \right) \dots \left(\int_{|y_n| \geq \frac{\tau}{\sqrt{n}}} e^{-y_n^2} dy_n \right).$$

Quindi ci basta provare il lemma in dimensione $n = 1$. Siccome $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr < +\infty$ vale che

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{|r| \geq s} e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr - \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{-s}^s e^{-r^2} dr = 0. \quad \square$$

2.3 Soluzione del problema di Cauchy omogeneo

Studiamo il problema di Cauchy associato all'equazione del calore omogenea:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.3.1)$$

dove la funzione $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è assegnata.

Teorema 2.3.1. *Data una funzione $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, sia*

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y) u_0(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad (2.3.2)$$

per $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Allora:

- (i) u è ben definita e di classe C^∞ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$;
- (ii) u verifica l'equazione del calore omogenea in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\lim_{(t,x) \rightarrow (0^+, \bar{x})} u(t, x) = u_0(\bar{x})$ per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in cui u_0 è continua.

Dimostrazione (nel caso $n = 1$). (i) Per semplicità ci limitiamo a svolgere la dimostrazione quando $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione nulla fuori da un compatto ed è integrabile secondo Riemann. Si noti che u_0 potrebbe ammettere punti di discontinuità. Possiamo scrivere

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-R}^R e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy$$

dove $R > 0$ è tale per cui $u_0(x) = 0$ se $|x| > R$. Siccome la funzione u_0 è integrabile e limitata e la funzione $(t, x) \mapsto \Phi(t, x - y)$ è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ possiamo applicare i teoremi classici sulla derivazione di integrali dipendenti da un parametro per dedurre che esistono le derivate parziali di u di tutti gli ordini rispetto a t e a x . Quindi u risulta di classe C^∞ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Inoltre le derivate di u si ottengono derivando sotto il segno di integrale. In particolare:

$$u_t(t, x) = \int_{-R}^R \Phi_t(t, x - y) u_0(y) dy$$

$$u_{xx}(t, x) = \int_{-R}^R \Phi_{xx}(t, x - y) u_0(y) dy.$$

(ii) In base a quanto dimostrato nella prima parte abbiamo che

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t(t, x - y) - \Phi_{xx}(t, x - y)) u_0(y) dy = 0$$

perché Φ è soluzione di (2.2.1).

(iii) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un punto in cui u_0 è continua. Fissato $\varepsilon > 0$, per la continuità di u_0 in \bar{x} , esiste $\delta > 0$ tale che

$$|u_0(y) - u_0(\bar{x})| < \varepsilon \quad \text{se } |y - \bar{x}| < \delta.$$

Allora, per la positività di Φ e per la proprietà di normalizzazione, si ha che

$$\begin{aligned}
|u(t, x) - u_0(\bar{x})| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x - y) u_0(y) dy - u_0(\bar{x}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x - y) dy \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x - y) |u_0(y) - u_0(\bar{x})| dy \\
&\leq \int_{|y - \bar{x}| < \delta} \Phi(t, x - y) |u_0(y) - u_0(\bar{x})| dy \\
&\quad + \int_{|y - \bar{x}| \geq \delta} \Phi(t, x - y) |u_0(y) - u_0(\bar{x})| dy \\
&\leq \varepsilon + 2\|u_0\| \int_{|y - \bar{x}| \geq \delta} \Phi(t, x - y) dy
\end{aligned}$$

dove $\|u_0\| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |u_0(y)|$. Prendendo $|x - \bar{x}| < \frac{\delta}{2}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ tale che $|y - \bar{x}| \geq \delta$ vale che

$$|y - x| \geq |\bar{x} - y| - |x - \bar{x}| > |\bar{x} - y| - \frac{\delta}{2} \geq |\bar{x} - y| - \frac{|\bar{x} - y|}{2} = \frac{|\bar{x} - y|}{2}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{|y - \bar{x}| \geq \delta} \Phi(t, x - y) dy &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{|y - \bar{x}| \geq \delta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{|y - \bar{x}| \geq \delta} e^{-\frac{(\bar{x}-y)^2}{16t}} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{|r| > \frac{\delta}{4\sqrt{t}}} e^{-r^2} dr.
\end{aligned}$$

Abbiamo già visto (cfr. lemma 2.2.5) che

$$\int_{|r| > \frac{\delta}{4\sqrt{t}}} e^{-r^2} dr \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0^+.$$

Quindi esiste $\tau > 0$, dipendente da δ , e quindi da ε , tale che

$$2\|u_0\| \int_{|y - \bar{x}| \geq \delta} \Phi(t, x - y) dy \leq \frac{4\|u_0\|}{\sqrt{\pi}} \int_{|r| > \frac{\delta}{4\sqrt{t}}} e^{-r^2} dr < \varepsilon \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Definiamo infine $\rho = \min\{\frac{\delta}{2}, \tau\}$. Se $t > 0$ e $|(t, x) - (0, \bar{x})| < \rho$ allora $t \in (0, \tau)$ e $|x - \bar{x}| < \frac{\delta}{2}$, e dunque $|u(t, x) - u_0(\bar{x})| < 2\varepsilon$. Abbiamo così provato che $u(t, x) \rightarrow u_0(\bar{x})$ se $(t, x) \rightarrow (0^+, \bar{x})$.

Omettiamo la dimostrazione nel caso $n > 1$. Ci limitiamo ad osservare che, come per il teorema 2.2.1, anche per questo teorema la dimostrazione per $n > 1$ è del tutto analoga a quella svolta per $n = 1$, pur se leggermente più laboriosa per quanto riguarda i calcoli. \square

La formula (2.3.2) fornisce una soluzione del problema di Cauchy (2.3.1) espressa in forma integrale. La funzione $K(t, x, y) = \Phi(t, x - y)$ si chiama *nucleo di Green per l'equazione del calore* o più semplicemente *nucleo del calore*.

Dalla formula di rappresentazione integrale (2.3.2) possiamo dedurre alcune significative proprietà della soluzione trovata che elenchiamo, per semplicità, nel caso di dimensione spaziale $n = 1$ (ma valgono in dimensione spaziale qualunque).

Effetto regolarizzante. Anche se il dato iniziale u_0 è discontinuo, la soluzione del problema di Cauchy fornita dal teorema 2.3.1 è molto regolare (di classe C^∞) a tutti gli istanti positivi, non importa quanto piccoli. In realtà si può dimostrare, più generalmente, che ogni soluzione dell'equazione del calore omogenea $u_t = \Delta u$ in $I \times \Omega$, con I intervallo di \mathbb{R} e Ω dominio qualsiasi di \mathbb{R}^n , risulta di classe C^∞ in $I \times \Omega$. Questa proprietà si esprime affermando che l'equazione del calore è fortemente regolarizzante.

Permanenza del segno. Se $u_0 \geq 0$ allora $u(t, x) \geq 0$ per ogni $t > 0$.

Velocità di propagazione infinita. Supponiamo $u_0 \geq 0$. Se $u_0(x) > 0$ per x in un intervallo, non importa quanto piccolo, allora risulta che $u(t, x) > 0$ per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. La parte positiva di u_0 , seppur piccola, ha un effetto immediato e a distanza arbitrariamente grande. Si dice che il dato iniziale si propaga con velocità infinita.

Irreversibilità. Fissato $T > 0$ e $\bar{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ci chiediamo se possiamo trovare una funzione regolare $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di $u_t = \Delta u$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ e tale che $u(T, x) = \bar{u}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. In altri termini, ci chiediamo se possiamo considerare il problema di evoluzione retrogrado, cioè col tempo percorso in senso inverso. Osserviamo preliminarmente che, dato l'effetto regolarizzante dell'equazione del calore, occorre che sia \bar{u} di classe C^∞ . In ogni caso questa condizione non è sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione del problema retrogrado. Dunque l'equazione del calore descrive fenomeni irreversibili. L'irreversibilità temporale è dovuta alla non invarianza dell'equazione del calore rispetto alla trasformazione $t \mapsto -t$. Infatti, se $u(t, x)$ risolve $u_t = \Delta u$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$, la funzione $v(t, x) = u(T - t, x)$ soddisfa $v_t = -\Delta v$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$. Quest'ultima equazione è nota come equazione del calore *aggiunta* o *retrograda* o *backward*.

Limitatezza della soluzione. Data una funzione $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e misurabile, denotiamo $\|u_0\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)|$ e consideriamo la funzione $u(t, x)$ definita da (2.3.2). Per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ si ha che

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t, x - y) u_0(y)| dy \leq \|u_0\| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x - y) dy \\ &= \|u_0\| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, y) dy = \|u_0\| \end{aligned}$$

per la positività di Φ e la proprietà di normalizzazione.

Decadimento della soluzione. Se u_0 è assolutamente integrabile su \mathbb{R} , o meglio, se $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ allora $u(t, \cdot) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ uniformemente in \mathbb{R} . Infatti

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |u_0(y)| dy \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(y)| dy$$

e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(y)| dy = \frac{C}{\sqrt{t}}$$

dove $C \geq 0$ è una costante indipendente da t . Da ciò segue che $\|u(t, \cdot)\| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Conservazione della massa totale. Se $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx \quad \forall t > 0.$$

Infatti, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x-y) dx \right) u_0(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) dy \end{aligned}$$

perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x-y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x) dx = 1.$$

La conservazione dell'integrale di $u(t, x)$ rispetto a x sta a significare che la quantità di calore totale si conserva, pur tendendo a distribuirsi uniformemente in tutto lo spazio.

2.4 Esempi

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore 1-dimensionale con dato iniziale definito dalla funzione di Heaviside:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

In base al teorema 2.3.1, la funzione

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy$$

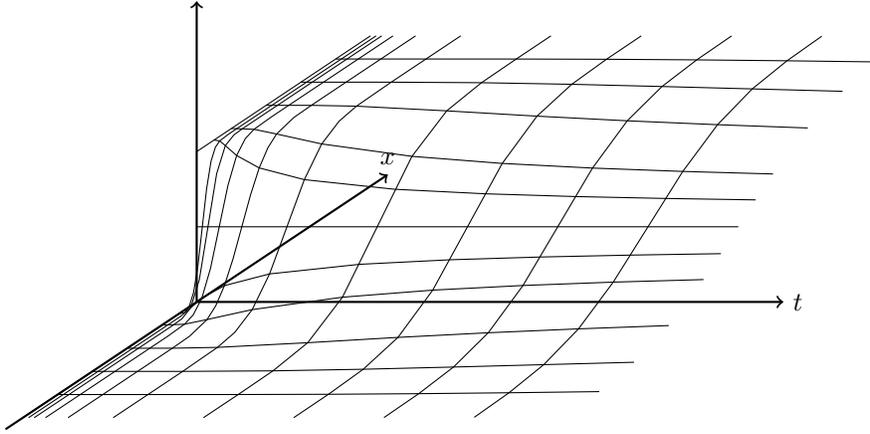
è soluzione di $u_t = u_{xx}$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ per $t \rightarrow 0^+$, per ogni $x \neq 0$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4t}} \right) \right) \end{aligned}$$

dove

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

è la funzione errore. Si noti che la discontinuità del dato iniziale u_0 è subito rimossa e smussata. Inoltre $u(t, \cdot) \rightarrow \frac{1}{2}$ per $t \rightarrow +\infty$ uniformemente sui compatti ma non su tutto \mathbb{R} .



Consideriamo ora il dato iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con calcoli analoghi a sopra si ricava che la soluzione dell'equazione del calore data dal teorema 2.3.1 risulta:

$$u(t, x) = -\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{4t}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{4t}} \right) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Qual è il limite di $u(t, x)$ per $t \rightarrow +\infty$? Quanto vale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx$?

Esaminiamo infine un caso in cui la condizione iniziale è definita da una funzione non limitata. Pur se il teorema 2.3.1 è stato enunciato assumendo $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, la formula (2.3.2) può essere applicata e fornisce una soluzione del problema (2.3.1) anche se u_0 non è limitata purché gli integrali definiti in (2.3.2) risultino finiti. Esaminiamo, ad esempio, la situazione in cui

$$u_0(x) = e^{-x}.$$

Applichiamo la formula (2.3.2) e calcoliamo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2t-y)^2}{4t} + t-x} dy \\ &= e^{-(x-t)} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2t-y)^2}{4t}} dy = e^{-(x-t)} \end{aligned}$$

cioè $u(t, x) = u_0(x - t)$. Dunque l'equazione del calore omogenea fa evolvere un profilo esponenziale trasladandolo con velocità costante.

Esercizio 2.4.1. *Fissata una costante $c \neq 0$, trovare tutte le soluzioni di $u_t = u_{xx}$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ della forma $u(t, x) = v(x - ct)$.*

2.5 Soluzione del problema di Cauchy non omogeneo

Studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.5.1)$$

dove le funzioni $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono assegnate.

Teorema 2.5.1. *Se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 rispetto a t e di classe C^2 rispetto a x e ha supporto compatto allora la funzione*

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s, y) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy \quad (2.5.2)$$

è pure di classe C^1 rispetto a t e di classe C^2 rispetto a x e risolve il problema (2.5.1).

Avendo assunto $u_0 \in L^\infty$ e non necessariamente continua, la condizione iniziale va intesa nello stesso senso espresso nel teorema 2.3.1 cioè la funzione $u(t, x)$ definita in (2.5.2) è tale che

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0^+, \bar{x})} u(t, x) = u_0(\bar{x}) \quad \text{per ogni } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ in cui } u_0 \text{ è continua.}$$

Inoltre, se poniamo

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy,$$

per il teorema 2.3.1 v è soluzione del problema di Cauchy (2.3.1) relativo all'equazione omogenea. Per linearità, la funzione

$$w(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s, y) dy ds = u(t, x) - v(t, x)$$

risolve il problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Per comprendere l'origine della formula (2.5.2) conviene leggere l'equazione del calore come un'equazione differenziale ordinaria in un opportuno spazio (infinito-dimensionale) di funzioni. Per semplicità, limitiamo la discussione al caso in cui la variabile spaziale è unidimensionale, cioè $n = 1$. Introduciamo gli spazi

$$\begin{aligned} X &= \{u \in C^2(\mathbb{R}) \mid u, u_x, u_{xx} \text{ limitate}\} \\ Y &= \{v \in C(\mathbb{R}) \mid v \text{ limitata}\} \end{aligned}$$

dove u_x e u_{xx} denotano le derivate prima e seconda di u . Possiamo munire gli spazi X e Y di norme, rispettivamente

$$\begin{aligned} \|u\|_X &= \|u\| + \|u_x\| + \|u_{xx}\| \\ \|v\|_Y &= \|v\| \end{aligned}$$

dove in generale $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$. Introduciamo ora l'applicazione $A: X \rightarrow Y$ definita da

$$Au = u_{xx}.$$

Osserviamo che A è un operatore lineare continuo da X in Y ; infatti $\|Au\|_Y \leq \|u\|_X$ per ogni $u \in X$. L'equazione del calore omogenea può essere scritta così:

$$u'(t) = Au(t) \quad (t > 0).$$

La scrittura $u(t)$ va intesa nel senso seguente: per ogni $t > 0$ $u(t)$ è un elemento di Y , in particolare, è una funzione di classe C^2 rispetto alla variabile x . La derivata $u'(t)$ è definita come quell'elemento di Y tale che

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_Y \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Esaminiamo ora la formula (2.3.2) che fornisce in forma integrale una soluzione del problema di Cauchy (2.3.1) associato all'equazione del calore omogenea.

Per ogni $t > 0$ poniamo $\phi(t) = \Phi(t, \cdot)$. Ricordando che il prodotto di convoluzione tra due funzioni f e g è definito dalla formula

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy = [\phi(t) * u_0](x).$$

Dunque il teorema 2.3.1 si può enunciare dicendo che per ogni $u_0 \in Y$ l'applicazione $t \mapsto \phi(t) * u_0$ fornisce una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Il **principio di Duhamel** fornisce una formula risolutiva per un problema di Cauchy lineare non omogeneo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5.4)$$

a partire dalla formula risolutiva del problema di Cauchy omogeneo. Nel problema (2.5.4) $t \mapsto f(t)$ è un'assegnata applicazione continua da \mathbb{R}^+ in X . Il principio di Duhamel si può formulare in astratto, cioè quando lo spazio X in cui è ambientata l'equazione differenziale e lo spazio Y dei dati iniziali sono spazi di Banach qualunque.

L'argomento si può esporre in questo modo. Supponiamo di avere una famiglia di operatori lineari e continui $S(t): Y \rightarrow Y$, dipendenti in modo differenziabile dal parametro $t \geq 0$ e tale che per ogni $u_0 \in Y$ l'applicazione $t \mapsto S(t)u_0$ sia soluzione del problema di Cauchy (2.5.3). Allora l'applicazione

$$t \mapsto S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau) d\tau$$

è soluzione del problema di Cauchy non omogeneo (2.5.3).

Questo fatto è di immediata verifica nel caso delle equazioni differenziali ordinarie. Se ora applichiamo il principio di Duhamel al caso dell'equazione del calore, dobbiamo prendere

$$S(t): Y \rightarrow Y \quad u_0 \mapsto S(t)u_0 = \phi(t) * u_0$$

e quindi, come soluzione del problema di Cauchy non omogeneo, troviamo

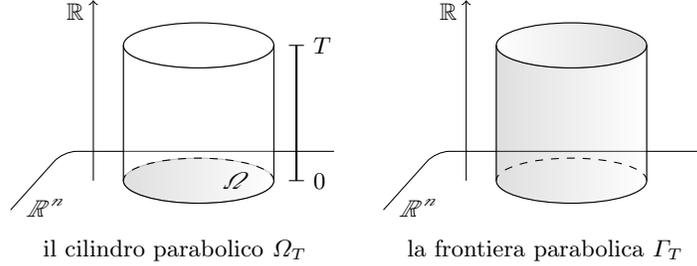
$$u(t) = \phi(t) * u_0 + \int_0^t \phi(t-\tau) * f(\tau) d\tau.$$

Scrivendo anche la dipendenza da x ed esplicitando i prodotti di convoluzione, otteniamo proprio la formula (2.5.2). Fino a questo punto abbiamo sviluppato un procedimento formale. L'effettiva validità di (2.5.2) va verificata in modo rigoroso. Per una dimostrazione si veda: L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS (1998), pag. 49–51.

2.6 Principio del massimo

Dato un dominio Ω in \mathbb{R}^n , per ogni $T > 0$ introduciamo i sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ così definiti:

$$\begin{aligned}\Omega_T &= (0, T] \times \Omega = \{(t, x) \mid 0 < t \leq T, x \in \Omega\} \\ \Gamma_T &= \partial\Omega_T \setminus (\{T\} \times \Omega) = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega).\end{aligned}$$



Dunque Ω_T è un cilindro in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, detto **cilindro parabolico**, la cui base è (essenzialmente) Ω e il cui spigolo laterale è dato dall'intervallo $(0, T]$. L'insieme Γ_T si chiama **frontiera parabolica** ed è la parte di frontiera di Ω_T consistente solo della superficie di base e di quella laterale. Notiamo che $\Omega_T \cap \Gamma_T = \emptyset$, mentre $\Omega_T \cup \Gamma_T = [0, T] \times \Omega =: \bar{\Omega}_T$ ($\bar{\Omega}_T$ è la chiusura di Ω_T).

Teorema 2.6.1. (principio del massimo) *Dato un dominio limitato Ω in \mathbb{R}^n , se u è soluzione dell'equazione del calore $u_t = \Delta u$ in Ω_T e u è continua in $\Omega_T \cup \Gamma_T$ allora $\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$v(t, x) = u(t, x) + \varepsilon|x|^2 \quad \forall (t, x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T .$$

Si ha che

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2n\varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega_T .$$

Ciò implica che il massimo di v non può essere assunto in Ω_T . Infatti se $(t, x) \in \Omega_T$ fosse punto di massimo per v dovrebbe essere $v_t(t, x) \geq 0$ e la matrice hessiana $H_v(t, x)$ semidefinita negativa. Siccome la matrice hessiana è simmetrica, essa è diagonalizzabile cioè è simile ad una matrice diagonale, gli elementi della cui diagonale sono esattamente gli autovalori di $H_v(t, x)$. Essendo tale matrice semidefinita negativa, i suoi autovalori sono tutti non positivi e così pure la loro somma. Ma la somma degli autovalori non è altro che la traccia della matrice e, dato che la traccia di $H_v(t, x)$ è uguale a $\Delta v(t, x)$, si avrebbe $\Delta v(t, x) \leq 0$ e allora $v_t(t, x) - \Delta v(t, x) \geq 0$, in contrasto con quanto trovato sopra. Dunque

$$\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} v = \max_{\Gamma_T} v$$

cioè esiste $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \Gamma_T$ tale che

$$v(t, x) \leq v(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \quad \forall (t, x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T .$$

Quindi

$$u(t, x) \leq v(t, x) \leq u(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + \varepsilon |x_\varepsilon|^2 \quad \forall (t, x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T .$$

Siccome Ω è limitato, esiste $R > 0$ indipendente da ε tale che $|x_\varepsilon| \leq R$. Pertanto abbiamo che

$$u(t, x) \leq \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon R^2 \quad \forall (t, x) \in \Omega_T \cup \Gamma_T .$$

Per l'arbitrarietà di ε otteniamo allora che

$$\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u .$$

Ovviamente vale anche che

$$\max_{\Omega_T \cup \Gamma_T} u \geq \max_{\Gamma_T} u .$$

Ciò completa la dimostrazione. \square

2.7 Unicità di soluzioni limitate

Teorema 2.7.1. *Data una funzione $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata, il problema di Cauchy*

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione limitata.

Dimostrazione. L'esistenza è stata provata nel teorema 2.3.1. Per provare l'unicità iniziamo a dimostrare che se u è una soluzione limitata di (P) allora

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ t > 0}} u(t, x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) .$$

Poniamo

$$M = \sup_{\substack{t > 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} u(t, x) \quad \text{e} \quad M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x)$$

e notiamo che per le ipotesi fatte $M, M_0 < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, definiamo

$$v(t, x) = u(t, x) - \varepsilon(2nt + |x|^2) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n .$$

Si ha che $v_t = \Delta v$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Osserviamo poi che

$$v(0, x) = u_0(x) - \varepsilon|x|^2 \leq M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre

$$\sup_{\substack{t \in (0, R] \\ |x|=R}} v(t, x) \leq \sup_{\substack{t \in (0, R] \\ |x|=R}} u(t, x) - 2(\varepsilon n t + R^2) \leq M - 2\varepsilon R^2 \leq M_0$$

per $R > 0$ sufficientemente grande. Allora per il principio del massimo

$$\sup_{\substack{t \in (0, R] \\ |x| \leq R}} v(t, x) \leq M_0$$

per ogni $R > 0$ grande e dunque

$$\sup_{\substack{t > 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} v(t, x) \leq M_0$$

cioè

$$u(t, x) - \varepsilon(2nt + |x|^2) \leq M_0 \quad \forall (t, x) \in \overline{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^n.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene la stima desiderata. Supponiamo ora che u e \bar{u} siano due soluzioni limitate di (P). Allora $w = u - \bar{u}$ è una soluzione limitata del problema di Cauchy

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ w(0, x) = 0 & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Quindi per quanto provato prima, $w \leq 0$ cioè $u \leq \bar{u}$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Considerando allo stesso modo la funzione $-w = \bar{u} - u$, si trova che $\bar{u} \leq u$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Quindi u e \bar{u} coincidono. \square

L'unicità della soluzione per il problema di Cauchy vale nella classe delle funzioni limitate. In realtà si può dimostrare un risultato più debole, e si prova unicità in una classe di funzioni che possono essere illimitate ma con un opportuno controllo, della forma

$$|u(t, x)| \leq A e^{\alpha|x|^2}$$

con $A, \alpha > 0$ (cfr. L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS (1998), pag. 58). Tale condizione di crescita però non è eliminabile, cioè non si tratta di un'ipotesi puramente tecnica, come dimostra la seguente costruzione, dovuta a Tychonoff.

Teorema 2.7.2. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ammette una soluzione non nulla data dalla funzione:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \quad (2.7.1)$$

dove $g^{(k)}$ denota la derivata k -esima della funzione $g(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$.

Dimostrazione. Abbiamo bisogno del seguente risultato, di cui postponiamo la dimostrazione.

Lemma 2.7.3. *Esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che per ogni $t > 0$ e per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ vale che*

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right).$$

Poniamo per comodità

$$f_k(t, x) = \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Grazie alla disuguaglianza

$$\frac{k!}{(2k)!} < \frac{1}{k!} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

verificabile per induzione, e grazie al lemma 2.7.3, otteniamo

$$|f_k(t, x)| \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^k \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right).$$

Quindi, dato che la serie $\sum \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^k$ converge ed ha per somma $\exp\left(\frac{x^2}{\theta t}\right)$ deduciamo che per ogni $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum f_k(t, x)$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, e la sua somma $u(t, x)$ verifica

$$|u(t, x)| \leq \exp\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{x^2}{\theta t}\right) \quad \forall t > 0 < x \in \mathbb{R}.$$

Da ciò segue che

$$u(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0^+, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo anzi affermare che per ogni $r > 0$

$$\sup_{|x| < r} |u(t, x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0^+$$

cioè si ha convergenza uniforme sui compatti. Esaminiamo la regolarità di u rispetto a x . Per $t > 0$ fissato la serie $\sum f_k(t, x)$ è una serie di potenze nella variabile reale x , con intervallo di convergenza \mathbb{R} . Dalla teoria delle serie di

potenze deduciamo che per ogni $t > 0$ fissato, la funzione $x \mapsto u(t, x)$ è infinite volte derivabile e le derivate si ottengono derivando la serie termine a termine. In particolare

$$u_x(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$u_{xx}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

essendo le serie a secondo membro convergenti (assolutamente) per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. Studiamo ora la derivabilità di u rispetto a t . Intendiamo applicare il seguente teorema

Teorema 2.7.4. *Data una successione di funzioni $F_k(t)$ di classe C^1 in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, se le serie $\sum F_k(t)$ e $\sum F'_k(t)$ convergono uniformemente in I , allora la funzione $F(t) = \sum F_k(t)$ (definita per $t \in I$) è di classe C^1 in I e $F'(t) = \sum F'_k(t)$ per ogni $t \in I$.*

Applichiamo tale teorema prendendo come intervallo I un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ in $(0, \infty)$ e come funzione

$$F_k(t) = \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

con $x \in \mathbb{R}$ fissato. Abbiamo già verificato che

$$|F_k(t)| \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{\theta t} \right)^k \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right)$$

e quindi, per $t \in [a, b]$

$$|F_k(t)| \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{\theta a} \right)^k \exp\left(-\frac{1}{2b^2}\right) =: c_k.$$

Siccome la serie numerica $\sum c_k$ converge, per il criterio di uniforme convergenza di Weierstrass deduciamo che la serie $\sum F_k(t)$ converge uniformemente in $[a, b]$. Le funzioni F_k sono di classe C^1 in \mathbb{R} e

$$F'_k(t) = \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Usando ancora il lemma 2.7.3 e stime analoghe a quelle già incontrate si verifica che

$$|F'_k(t)| \leq \frac{(k+1)!}{(2k)!} \frac{x^{2k}}{(\theta t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right) \leq \frac{k+1}{k!} \frac{x^{2k}}{(\theta t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{1}{2t^2}\right)$$

e quindi, per $t \in [a, b]$

$$|F'_k(t)| \leq \frac{k+1}{k!} \frac{x^{2k}}{(\theta a)^{k+1}} \exp\left(-\frac{1}{2b^2}\right) =: \tilde{c}_k.$$

Siccome la serie numerica $\sum \tilde{c}_k$ converge, per il criterio di uniforme convergenza di Weierstrass deduciamo che la serie $\sum F'_k(t)$ converge uniformemente in $[a, b]$. Dunque, per il teorema 2.7.4, esiste ed è continua la derivata $u_t(t, x)$ per ogni $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ ed è data da

$$u_t(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

In particolare vediamo che $u_t = u_{xx}$ in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Ciò completa la dimostrazione del teorema 2.7.2. \square

Dimostrazione del lemma 2.7.3. Estendiamo la funzione g al campo complesso ponendo

$$g(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che g è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Di conseguenza, fissato $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, per ogni intero $k \geq 0$ vale che

$$g^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad (2.7.2)$$

dove γ è una qualunque circonferenza centrata in z_0 , contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e percorsa in senso antiorario. Ricorriamo al seguente risultato.

Lemma 2.7.5. *Esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che per ogni $t > 0$ vale che*

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z^2} > \frac{1}{2t^2} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ tale che } |z - t| = \theta t.$$

Fissato $t > 0$, applichiamo la formula (2.7.2) prendendo $z_0 = t$ e $\gamma =$ circonferenza centrata in t e di raggio θt . Allora

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - t)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \mathcal{L}(\gamma) \max_{z \in \gamma} \left| \frac{g(z)}{(z - t)^{k+1}} \right| \quad (2.7.3)$$

dove $\mathcal{L}(\gamma) =$ lunghezza di $\gamma = 2\pi\theta t$. Per ogni $z \in \gamma$ si ha

$$\left| \frac{g(z)}{(z - t)^{k+1}} \right| = \frac{|e^{-\frac{1}{z^2}}|}{|z - t|^{k+1}} = \frac{e^{\operatorname{Re}(-\frac{1}{z^2})}}{(\theta t)^{k+1}} = \frac{e^{-\operatorname{Re}(\frac{1}{z^2})}}{(\theta t)^{k+1}} < \frac{e^{-\frac{1}{2t^2}}}{(\theta t)^{k+1}} \quad (2.7.4)$$

grazie al lemma 2.7.5. Perciò, da (2.7.3) e (2.7.4) segue la tesi. \square

Dimostrazione del lemma 2.7.5. Osserviamo che $\gamma = C_{\theta t}(t)$ dove in generale $C_r(z_0)$ denota la circonferenza di centro z_0 e raggio r . Proviamo in primo luogo che esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$\inf_{z \in C_\theta(1)} \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} > \frac{1}{2}. \quad (2.7.5)$$

Ciò si ottiene per continuità rispetto a θ e perché $\inf_{z \in C_0(1)} \operatorname{Re} \frac{1}{z^2} = 1$. Fissato $\theta \in (0, 1)$ per cui valga (2.7.5), osserviamo che per ogni $t > 0$ si ha che $z \in C_{\theta t}(t)$ se e solo se $z/t \in C_\theta(1)$. Quindi per ogni $t > 0$ e per ogni $z \in C_{\theta t}(t)$ vale che

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(z/t)^2} > \frac{1}{2}$$

cioè la tesi. \square

La soluzione di Tychonoff diverge per $|x| \rightarrow +\infty$ molto rapidamente ad ogni istante $t > 0$ (più rapidamente di $e^{\alpha|x|^2}$ per qualsiasi $\alpha > 0$). Siccome poi anche $v(t, x) = u(t, x + a)$ è soluzione, per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$, abbiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) \equiv 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni distinte. Evidentemente solo quella identicamente nulla è “fisicamente corretta”.

2.8 Altri risultati di unicità (metodo dell'energia)

Dato un dominio limitato e regolare Ω in \mathbb{R}^n , per ogni $T > 0$ sia $\Omega_T = (0, T] \times \Omega$ il corrispondente cilindro parabolico e sia Γ_T la frontiera parabolica, cioè $\Gamma_T = \partial\Omega_T \setminus (\{T\} \times \Omega)$ e introduciamo lo spazio $C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ delle funzioni $u: \overline{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$ che ammettono derivate parziali $u_t, u_{x_i x_j}: \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) che si possono estendere con continuità su $\overline{\Omega}_T$.

Vale il seguente risultato di unicità.

Teorema 2.8.1. *Siano $f \in C(\overline{\Omega}_T)$ e $g \in C(\Gamma_T)$. Allora il problema*

$$(P_T) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{in } \Gamma_T \end{cases}$$

ammette al più una soluzione in $C_1^2(\overline{\Omega}_T)$.

Dimostrazione. Siano $u_1, u_2 \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ due soluzioni di (P_T) . Detta $v = u_1 - u_2$ si ha che $v \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ e v risolve

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v = 0 & \text{in } \Gamma_T. \end{cases}$$

Poniamo

$$e(t) = \int_{\Omega} v(t, x)^2 dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Osserviamo che $e(0) = 0$ perché $v(0, x) \equiv 0$, $e(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Inoltre per ogni $t \in (0, T]$ si ha

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{\Omega} \partial_t(v(t, x)^2) dx && \text{per il teorema di derivazione di} \\ &= 2 \int_{\Omega} v v_t dx = 2 \int_{\Omega} v \Delta v dx && \text{integralsi dipendenti da parametro} \\ &= 2 \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma - 2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx && \text{perché } v \text{ verifica } v_t = \Delta v \text{ in } \Omega_T \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq 0 && \text{per il teorema della divergenza} \\ & && \text{applicato al campo } v \nabla_x v \\ & && \text{perché } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \times (0, T]. \end{aligned}$$

Dunque $e(t)$ è non crescente. In particolare $e(t) \leq e(0)$ per ogni $t \in [0, T]$. Allora deve essere $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Quindi, dalla definizione di $e(t)$ segue che $v = 0$ cioè $u_1 = u_2$ in $\overline{\Omega}_T$. \square

Vediamo ora un risultato di unicità “retrograda”.

Teorema 2.8.2. *Sia $g \in C([0, T] \times \partial\Omega)$. Siano $u_1, u_2 \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ due soluzioni di*

$$(P'_T) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{in } [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $u_1(T, x) = u_2(T, x)$ per ogni $x \in \Omega$ allora $u_1 = u_2$ in $\overline{\Omega}_T$.

Dimostrazione. Procediamo come per il teorema precedente. Detta $v = u_1 - u_2$ si ha che $v \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ e v risolve

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v = 0 & \text{in } [0, T] \times \partial\Omega \\ v(T, x) = 0 & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Poniamo

$$e(t) = \int_{\Omega} v(t, x)^2 dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Abbiamo che $e(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$, $e(T) = 0$ e, come già visto nel corso della dimostrazione del teorema 2.8.1,

$$e'(t) = -2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Calcoliamo anche

$$\begin{aligned}
e''(t) &= -2 \int_{\Omega} \partial_t (|\nabla v|^2) dx && \text{per il teorema di derivazione di} \\
& && \text{integrali dipendenti da parametro} \\
&= -4 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v_t dx && \text{perché } |\nabla v|^2 = \nabla v \cdot \nabla v \\
& && \text{e } \partial_t (|\nabla v|^2) = \nabla v_t \cdot \nabla v \\
&= 4 \int_{\Omega} \Delta v v_t dx - 4 \int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma && \text{per il teorema della divergenza} \\
& && \text{applicato al campo } v_t \nabla v \\
&= 4 \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx && \text{perché } v_t = \Delta v \text{ in } \Omega_T \text{ e } v \text{ è costante} \\
& && \text{è quindi } v_t = 0 \text{ su } \partial\Omega \times (0, T]
\end{aligned}$$

e stimiamo

$$\begin{aligned}
e'(t)^2 &= 4 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^2 = 4 \left(\int_{\Omega} v \Delta v dx \right)^2 \\
&\leq 4 \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx \right) = e(t) e''(t).
\end{aligned}$$

Abbiamo qui usato la disuguaglianza di Schwarz $\int_{\Omega} |fg| \leq \sqrt{\int_{\Omega} f^2} \sqrt{\int_{\Omega} g^2}$. Vogliamo provare che $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Per assurdo non sia così, cioè esista $t_1 \in [0, T]$ tale che $e(t_1) > 0$. Siccome $e(T) = 0$ deve essere $t_1 < T$ e deve esistere $t_2 \in (t_1, T]$ tale che $e(t_2) = 0$ ed $e(t) > 0$ per $t \in [t_1, t_2)$ (si può considerare $t_2 = \inf\{t > t_1 \mid e(t) = 0\}$). Per $t \in [t_1, t_2)$ poniamo $f(t) = \log e(t)$ e osserviamo che

$$f'(t) = \frac{e'(t)}{e(t)}, \quad f''(t) = \frac{e''(t)e(t) - e'(t)^2}{e(t)^2} \geq 0.$$

Quindi f è convessa in $[t_1, t_2)$ e, in particolare, inferiormente limitata (perché $f(t) \geq f(t_1) + f'(t_1)(t - t_1)$ per ogni $t \in [t_1, t_2)$). Ma $f(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow t_2^-$, che è una contraddizione. Dunque $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$, cioè $u_1 = u_2$ in Ω_T . \square

2.9 Problema di Cauchy-Dirichlet in una dimensione spaziale

Fissato un numero $L > 0$ e una funzione continua $u_0: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ cerchiamo soluzioni $u(t, x)$ del problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ u(t, 0) = 0 = u(t, L) & \text{per ogni } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in [0, L]. \end{cases} \quad (2.9.1)$$

Iniziamo a cercare soluzioni elementari di

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0, L) \\ u(t, 0) = 0 = u(t, L) & \text{per ogni } t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.9.2)$$

esprese in forma fattorizzata

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x).$$

Per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, L)$ deve valere che

$$0 = u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = \psi'(t)\varphi(x) - \psi(t)\varphi''(x)$$

cioè, separando le variabili,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

e quindi

$$\begin{cases} \psi'(t) = K\psi(t) & \forall t > 0 \\ \varphi''(x) = K\varphi(x) & \forall x \in (0, L) \end{cases} \quad (2.9.3)$$

per qualche costante $K \in \mathbb{R}$. La condizione al contorno presente in (2.9.2) diventa

$$\varphi(0) = 0 = \varphi(L). \quad (2.9.4)$$

Allora le soluzioni di (2.9.3)–(2.9.4) sono date da

$$\begin{cases} \psi(t) = e^{-n^2\pi^2 t/L^2} & t > 0 \\ \varphi(x) = \sin(n\pi x/L) & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$u_n(t, x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Dal momento che stiamo considerando l'equazione del calore omogenea, ogni combinazione lineare delle funzioni u_n risolve il problema (2.9.2). Inoltre una soluzione formale di (2.9.2) si ottiene come serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n$$

purché la successione dei coefficienti $c_n \in \mathbb{R}$ sia tale da garantire la convergenza della serie di funzioni ad una funzione sufficientemente regolare. Tale aspetto è discusso nel seguente

Lemma 2.9.1. (i) *Se la successione dei coefficienti (c_n) è limitata allora la serie di funzioni $\sum c_n u_n$ risulta uniformemente convergente in $[\tau, +\infty) \times [0, L]$ per ogni $\tau > 0$ e, detta u la funzione somma della serie, si ha che u è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ e risolve (2.9.2).*

(ii) *Inoltre, se la serie $\sum c_n$ converge assolutamente, allora la serie di funzioni $\sum c_n u_n$ è uniformemente convergente in $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ e u è continua in $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$.*

Dimostrazione. (i) Siccome

$$\left| c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n^2\pi^2 t/L^2} \right| \leq C e^{-n^2\pi^2 \tau/L^2} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [\tau, +\infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e la serie numerica $\sum e^{-n^2\pi^2 \tau/L^2}$ è convergente, la serie di funzioni $\sum c_n u_n$ risulta uniformemente convergente in $[\tau, +\infty) \times [0, L]$ per ogni $\tau > 0$. Se consideriamo la serie di funzioni

$$v(t, x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

definita dalle derivate termine a termine rispetto a t , troviamo che anch'essa risulta uniformemente convergente in $[\tau, +\infty) \times [0, L]$ per ogni $\tau > 0$ perché

$$\left| n^2 c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \right| \leq C n^2 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \tau} \quad \forall (t, x) \in [\tau, +\infty) \times [0, L], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e la serie numerica $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 e^{-n^2\pi^2 \tau/L^2}$ converge. Quindi per noti risultati sulla derivazione di serie di funzioni, possiamo concludere che $u(t, x)$ è derivabile rispetto a t e $u_t(t, x) = v(t, x)$. In modo del tutto analogo si prova che $u(t, x)$ è derivabile infinite volte, sia rispetto a t sia rispetto a x in $[\tau, +\infty) \times [0, L]$ per ogni $\tau > 0$, cioè in $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$. A questo punto si ottiene per verifica immediata che u soddisfa (2.9.2).

(ii) Basta osservare che

$$\left| c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \right| \leq |c_n| \quad \forall (t, x) \in \overline{\mathbb{R}^+} \times [0, L], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e, usando l'ipotesi di assoluta convergenza della serie $\sum c_n$, applicare noti criteri di convergenza sulle serie di funzioni. \square

Esaminiamo ora la condizione iniziale nel problema (2.9.1). In base a tale condizione andremo a scegliere i coefficienti c_n nella serie $\sum c_n u_n$. Supponendo che la serie numerica $\sum c_n$ sia assolutamente convergente, consideriamo funzione u definita come somma della serie di funzioni $\sum c_n u_n$. Siccome la funzione $x \mapsto u(0, x)$ è continua in $[0, L]$ e $u(0, 0) = u(0, L) = 0$, perché valga la condizione iniziale in ogni $x \in [0, L]$, chiediamo almeno che $u_0 \in C([0, L])$ con $u_0(0) = u_0(L) = 0$.

Quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_0^L u(0, x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{L}{2} \delta_{n,k} = \frac{L}{2} c_n \end{aligned}$$

dove $\delta_{n,k}$ è la delta di Kronecker, cioè $\delta_{n,k} = 0$ se $n \neq k$ e $\delta_{k,k} = 1$. Dunque, affinché sia $u(0, x) = u_0(x)$ per $x \in [0, L]$ si dovrà prendere

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.9.5)$$

Possiamo completare lo studio del problema con il seguente risultato.

Teorema 2.9.2. *Data $u_0 \in C^1([0, L])$ con $u_0(0) = 0 = u_0(L)$, la serie di funzioni $\sum c_n u_n$ con i coefficienti c_n dati da (2.9.5) fornisce una soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet (2.9.1).*

Dimostrazione. Essendo $u_0 \in C^1([0, L])$, integrando per parti e usando l'ipotesi $u_0(0) = 0 = u_0(L)$, calcoliamo

$$\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \int_0^L u_0'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

cioè

$$c_n = \frac{L}{n\pi} d_n, \quad \text{dove} \quad d_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per la disuguaglianza di Bessel, si ha che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 \leq \int_0^L u_0'(x)^2 dx$$

e quindi, per la disuguaglianza di Schwarz sulle serie,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|d_n|}{n} \leq \frac{L}{\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2} < +\infty. \quad (2.9.6)$$

Perciò possiamo applicare il lemma 2.9.1 e dedurre che la serie di funzioni $\sum c_n u_n$ converge uniformemente in $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ a una funzione $u: \overline{\mathbb{R}^+} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $\overline{\mathbb{R}^+} \times [0, L]$, di classe C^∞ in $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ e soluzione di (2.9.2). Resta da discutere la validità della condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$ in $[0, L]$. Sappiamo che

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dove la serie a secondo membro è convergente per ogni $x \in [0, L]$, per via di (2.9.6). Tale serie è la serie di Fourier corrispondente alla funzione u_0 , essendo i suoi coefficienti definiti da (2.9.5). La teoria delle serie di Fourier fornisce un risultato in base al quale la serie di Fourier di una data funzione converge (uniformemente) alla funzione stessa se questa è sufficientemente regolare, ad esempio di classe C^1 (non basta la sola continuità). Siccome per ipotesi $u_0 \in C^1([0, L])$, possiamo dedurre che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ converge puntualmente a $u_0(x)$ per ogni $x \in [0, L]$, cioè che $u(0, \cdot) = u_0$ in $[0, L]$. \square

Esercizio 2.9.3. *Trovare una soluzione del problema:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \\ u(t, 0) = 0 = u(t, \pi) & \text{per ogni } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = \sin x + \sin 3x & \text{per ogni } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

[Risposta: $u(t, x) = e^{-t} \sin x + e^{-9t} \sin 3x$.]

Equazioni del primo ordine

3.1 Introduzione

In questo capitolo prendiamo in esame una classe di equazioni alle derivate parziali del primo ordine. In particolare ci limitiamo a considerare equazioni che si prestano a descrivere fenomeni di trasporto e in cui la funzione incognita u dipenda da due variabili indipendenti, più precisamente, dal tempo t e da una variabile spaziale x unidimensionale.

Come visto nel capitolo 1, le equazioni in $u(t, x)$ atte alla descrizione di fenomeni di trasporto sono della forma

$$u_t + a(t, x, u)u_x = b(t, x, u) \quad (3.1.1)$$

dove in generale a e b sono funzioni reali definite su un dominio in \mathbb{R}^3 , sufficientemente regolari. Ricordiamo che la funzione incognita $u(t, x)$ ha il significato di densità.

Le equazioni (3.1.1) si classificano come *lineari* se i coefficienti a e b non dipendono dall'incognita u ; altrimenti si dicono *quasilineari*. Tra di esse riconosciamo:

- quelle della forma $u_t + au_x = b(x, t, u)$, con a costante non nulla, che descrivono fenomeni di trasporto passivo,
- le leggi di conservazione scalari $u_t + [F(u)]_x = 0$, dove $F \in C^1(\mathbb{R})$. Tali equazioni rientrano tra quelle (3.1.1) considerando $a(u) = F'(u)$. Questa classe di equazioni si presta a descrivere fenomeni di trasporto per convezione.

In generale, per *soluzione classica* di (3.1.1) intendiamo una funzione $u(t, x)$ definita su un dominio Ω di \mathbb{R}^2 , di classe C^1 in Ω , tale che $(t, x, u(t, x))$ appartenga al dominio di a e di b per ogni $(t, x) \in \Omega$ e che verifichi (3.1.1) puntualmente in Ω .

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione

$$u_t + au_x = 0 \quad (3.1.2)$$

dove a è una costante non nulla. Osserviamo che una funzione $u(t, x)$ è soluzione di (3.1.2) in un certo dominio di \mathbb{R}^2 se e solo se il suo gradiente è ortogonale al vettore costante $v := (1, a)$. Infatti, se denotiamo Du il gradiente di u , cioè $Du = (u_t, u_x)$, l'equazione (3.1.2) equivale a $v \cdot Du = 0$. Ma $v \cdot Du$ è la derivata direzionale di u lungo il vettore v , che denotiamo $\frac{\partial u}{\partial v}$. Quindi (3.1.2) non è altro che

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0$$

che significa che u è costante lungo le rette parallele a v , cioè

$$u(t, x) = u(t + s, x + as) \quad \forall (t, x) \text{ e } \forall s.$$

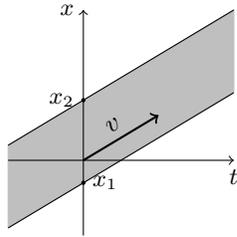
Scegliendo $s = -t$ troviamo che

$$u(t, x) = u(0, x - at) \quad \forall (t, x).$$

Dunque le soluzioni di (3.1.2) dipendono da t e x come funzioni di una variabile in $x - at$. Possiamo interpretare questo risultato dicendo che l'equazione (3.1.2) produce un'evoluzione del sistema che si realizza trasportando rigidamente la densità iniziale $u(0, x)$ con velocità costante a .

La discussione precedente si può riassumere in questo enunciato:

Proposizione 3.1.1. *Per ogni funzione $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 su un intervallo I di \mathbb{R} , la funzione $u(t, x) = g(x - at)$ definita in $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - at \in I\}$ è l'unica soluzione di (3.1.2) tale che $u(0, x) = g(x)$ per ogni $x \in I$.*



$$\begin{aligned} v &= (1, a) \\ I &= \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\} \\ \Omega &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - at \in I\} \end{aligned}$$

Osservazione 3.1.2. *A differenza dall'equazione del calore, l'equazione $u_t + au_x = 0$, la più semplice tra le equazioni del primo ordine, non ha alcun effetto regolarizzante sulla soluzione. La richiesta che il dato iniziale $g(x)$ sia di classe C^1 è essenziale per ottenere una soluzione classica.*

Condizione iniziale e problema di Cauchy

Nella discussione sulle equazioni lineari (3.1.2) abbiamo visto che per ogni “profilo iniziale” g esiste una soluzione di (3.1.2) che all’istante $t = 0$ coincide con g .

In generale si studiano problemi in cui un’equazione del primo ordine quale (3.1.1) è abbinata ad una condizione iniziale della forma $u(t_0, x) = g(x)$ dove t_0 è un fissato numero reale e g un’assegnata funzione, sufficientemente regolare. Più precisamente si considera il cosiddetto *problema di Cauchy* associato all’equazione (3.1.1) così definito

$$\begin{cases} u_t + a(t, x, u)u_x = b(t, x, u) \\ u(t_0, x) = g(x) \quad \forall x \in J \end{cases}$$

dove $t_0 \in \mathbb{R}$, J è un intervallo in \mathbb{R} e g è definita almeno in J . Si noti che tale problema è ben posto a patto che per ogni $x \in J$ il punto $(t_0, x, g(x))$ appartenga al dominio delle funzioni a e b .

3.2 Equazioni lineari non omogenee

Prendiamo in esame il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + au_x = b(t, x) \\ u(0, x) = g(x) \quad \forall x \in J. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

dove a è una costante in \mathbb{R} , b è una data funzione reale di classe C^1 su un dominio della forma $I \times J$ dove I e J sono intervalli aperti di \mathbb{R} , con $I \ni 0$, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ è assunta pure di classe C^1 . Notiamo che nel caso di una condizione iniziale del tipo $u(t_0, x) = g(x)$ ci si può sempre riportare al caso $t_0 = 0$ effettuando una traslazione sulla variabile temporale e considerando quindi l’equazione $u_t + au_x = b(t - t_0, x)$.

Osserviamo che l’equazione che compare nel problema (3.2.1) è lineare e non omogenea, per via della presenza del termine $b(t, x)$. Dato che conosciamo esplicitamente la soluzione del problema omogeneo corrispondente, possiamo cercare di costruire la soluzione di (3.2.1) utilizzando il principio di Duhamel, già incontrato nello studio dell’equazione del calore non omogenea. Più precisamente, sappiamo che per ogni fissata $g \in C^1(J)$ il problema

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(0, x) = g(x) \quad \forall x \in I. \end{cases}$$

è risolto da

$$u(t, x) = g(x - at).$$

Scriviamo tale soluzione nella forma

$$u(t) = S(t)g = g \circ \phi^t \quad \text{dove} \quad \phi^t(x) = x - at.$$

Il principio di Duhamel ci fornisce un'espressione (formale) per la soluzione del problema non omogeneo (3.2.1) e cioè

$$u(t) = S(t)g + \int_0^t S(t-\tau)b(\tau) d\tau.$$

Esplicitando $S(t)$ e la dipendenza da x , troviamo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= g(\phi^t(x)) + \int_0^t b(\tau, \phi^{t-\tau}(x)) d\tau \\ &= g(x - at) + \int_0^t b(\tau, x - a(t-\tau)) d\tau. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

In effetti vale questo risultato:

Teorema 3.2.1. *Dati I, J intervalli aperti di \mathbb{R} , con $0 \in I$, una costante $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $b \in C^1(I \times J)$, allora per ogni $g \in C^1(J)$ la funzione $u: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ definita da (3.2.2) è una soluzione del problema (3.2.1) in $I \times J$.*

Per dimostrare il teorema 3.2.1 è utile svolgere preliminarmente questo calcolo:

Lemma 3.2.2. *Sia $\varphi: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Allora*

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t, s) ds = \varphi(t, t) + \int_0^t \varphi_t(t, s) ds.$$

Dimostrazione. Effettuiamo un cambio di variabile nell'integrale:

$$\int_0^t \varphi(t, s) ds = t \int_0^1 \varphi(t, t\tau) d\tau.$$

Quindi calcoliamo la derivata e sviluppiamo integrando per parti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t, s) ds &= \int_0^1 \varphi(t, t\tau) d\tau + t \int_0^1 (\varphi_t(t, t\tau) + \tau\varphi_s(t, t\tau)) d\tau \\ &= \left[\tau\varphi(t, t\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=1} - \int_0^1 \tau t\varphi_s(t, t\tau) d\tau \\ &\quad + t \int_0^1 \varphi_t(t, t\tau) d\tau + t \int_0^1 \tau\varphi_s(t, t\tau) d\tau \\ &= \varphi(t, t) + \int_0^t \varphi_t(t, s) ds. \quad \square \end{aligned}$$

Dimostrazione del teorema 3.2.1. Chiaramente la funzione $u(t, x)$ definita in (3.2.2) verifica la condizione iniziale $u(0, x) = g(x)$ per ogni $x \in J$. Proviamo ora che u risolve l'equazione. Appliciamo il lemma precedente prendendo

$$\varphi(t, s) = b(s, x - a(t - s)) = b(s, x - at + as).$$

Abbiamo che

$$\varphi(t, t) = b(t, x) \quad \text{e} \quad \varphi_t(t, s) = -a \int_0^t b_x(s, x - at + as) ds.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= -a g'(x - at) + b(t, x) - a \int_0^t b_x(s, x - at + as) ds \\ &\quad + a g'(x - at) + a \int_0^t b_x(\tau, x - a(t - \tau)) d\tau = b(t, x). \end{aligned}$$

3.3 Equazioni quasilineari (metodo delle caratteristiche)

Esaminiamo l'equazione

$$u_t + a(t, x, u)u_x = b(t, x, u) \quad (3.3.1)$$

assumendo che le funzioni a e b siano di classe C^1 su un dato dominio \mathcal{D} di \mathbb{R}^3 . Si può dare un'interpretazione geometrica al problema della ricerca di soluzioni di (3.3.1), nel senso espresso dal seguente enunciato.

Teorema 3.3.1. *Una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è soluzione di (3.3.1) se e solo se il grafico di u*

$$G(u) = \{(t, x, u(t, x)) \mid (t, x) \in \Omega\}$$

è tangente in ogni suo punto al campo vettoriale $V(p) = (1, a(p), b(p))$.

Dimostrazione. Indichiamo con Du il gradiente di u , cioè $Du = (u_t, u_x)$. Dalla geometria differenziale è noto che, fissato un punto $p = (t, x, u(t, x)) \in G(u)$, il versore normale a $G(u)$ in p è dato da

$$N(p) = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{\|Du\|^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{u_t^2 + u_x^2 + 1}} (-u_t, -u_x, 1)$$

dove u_t, u_x, Du vanno calcolati in (t, x) . Siccome

$$N(p) \cdot V(p) = \frac{-u_t - u_x a(t, x, u) + b(t, x, u)}{\sqrt{u_t^2 + u_x^2 + 1}},$$

riconosciamo che u è soluzione di (3.3.1) se e solo se $V(p)$ è ortogonale a $N(p)$ in ogni punto $p \in G(u)$ cioè $V(p)$ giace nel piano tangente a $G(u)$ in p , cioè $G(u)$ è tangente in ogni suo punto al campo V . \square

Il teorema 3.3.1 esprime la versione per le equazioni alle derivate parziali di un fatto ben noto per le equazioni differenziali ordinarie: dato un campo (continuo) $F(p) \in \mathbb{R}^n$ definito in un certo dominio di \mathbb{R}^n , le curve (contenute in tale dominio) che sono tangenti in ogni loro punto al campo F sono tutte e sole quelle parametrizzabili da soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria (in \mathbb{R}^n) $\dot{p} = F(p)$. Tali curve si chiamano *curve caratteristiche del campo F* .

Questa osservazione costituisce il punto di partenza della trattazione che andiamo a sviluppare. Siccome il grafico di una soluzione di (3.3.1) è tangente in ogni suo punto al campo V introdotto nel teorema 3.3.1, ci aspettiamo che:

- ogni curva caratteristica del campo V che interseca $G(u)$ sia tutta contenuta in $G(u)$,
- $G(u)$ sia caratterizzabile come unione di curve caratteristiche di V .

Tali considerazioni costituiscono l'idea di base del cosiddetto *metodo delle caratteristiche* per la ricerca di soluzioni di (3.3.1). Questo metodo, introdotto da Hamilton a metà del XIX secolo, rimanda la ricerca di soluzioni dell'equazione alle derivate parziali (3.3.1) allo studio di un sistema di equazioni differenziali ordinarie e si rivela efficace per affrontare in linea di principio qualsiasi equazione alle derivate parziali, con un numero arbitrario di variabili indipendenti. Una trattazione generale si può trovare nel libro di L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS. Qui ci limitiamo a discutere tale tecnica solo per equazioni della forma (3.3.1).

Tenuto conto della definizione del campo V , le curve caratteristiche di V sono le curve in \mathcal{D} parametrizzate delle soluzioni $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 1 \\ \dot{\varphi}_2 = a(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ \dot{\varphi}_3 = b(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \end{cases}$$

Prendendo $\varphi_1(t) = t$ e ridefinendo $\varphi_2 = v$ e $\varphi_3 = w$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t, v, w) \\ \dot{w} = b(t, v, w). \end{cases}$$

Fissato un punto $p_0 = (t_0, x_0, u_0) \in \mathcal{D}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t, v, w) \\ \dot{w} = b(t, v, w) \\ v(t_0) = x_0 \\ w(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

ammette un'unica soluzione definita in un intorno I di t_0 . Esistenza (locale) e unicità della soluzione di (3.3.2) sono garantite dall'ipotesi di regolarità C^1 sulle funzioni a e b . Tale soluzione e il suo dominio I dipendono dal punto p_0 .

Ricordando che $\varphi(t) = (t, v(t), w(t))$, la curva caratteristica di V passante per p_0 è

$$\Gamma(p_0) = \{(t, v(t), w(t)) \mid t \in I, (v, w) \text{ soluzione di (3.3.2) in } I\}.$$

Con le notazioni appena introdotte possiamo enunciare un primo risultato, a conferma delle considerazioni fatte precedentemente in modo intuitivo.

Teorema 3.3.2. *Se una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in un dominio Ω di \mathbb{R}^2 è soluzione di (3.3.1) allora il suo grafico $G(u)$ è unione di curve caratteristiche, cioè*

$$G(u) = \bigcup_{p_0 \in G(u)} \Gamma(p_0).$$

Dimostrazione. Un'inclusione è ovvia, in quanto $p_0 \in \Gamma_{p_0}$ per ogni $p_0 \in \mathcal{D}$. Si tratta di verificare solo che se $p_0 \in G(u)$ allora $\Gamma(p_0) \subset G(u)$. Sia $t \mapsto (v(t), w(t))$ la soluzione di (3.3.2) definita per ogni $t \in I$, intorno di t_0 in generale dipendente da p_0 . Introduciamo la funzione

$$\psi(t) = w(t) - u(t, v(t)) \quad (t \in I).$$

Osserviamo che

$$\psi(t_0) = u_0 - u(t_0, x_0) = 0$$

perché $(t_0, x_0, u_0) = p_0 \in G(u)$. Inoltre calcoliamo

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \dot{w}(t) - u_t(t, v(t)) - u_x(t, v(t)) \dot{v}(t) \\ &= b(t, v(t), w(t)) - u_t(t, v(t)) - a(t, v(t), w(t)) u_x(t, v(t)). \end{aligned}$$

Quindi, posto per ogni $(t, q) \in I \times \mathbb{R}$

$$F(t, q) = b(t, v(t), q + u(t, v(t))) - u_t(t, v(t)) - a(t, v(t), q + u(t, v(t))) u_x(t, v(t)),$$

abbiamo che ψ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\psi} = F(t, \psi) \\ \psi(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Osserviamo che

$$F(t, 0) = 0 \quad \forall t \in I$$

perché u è soluzione di (3.3.1). Dunque anche la funzione identicamente nulla è soluzione di (3.3.3). Siccome abbiamo assunto a e b di classe C^1 , la funzione F è continua rispetto a t e di classe C^1 e quindi, in particolare, localmente lipschitziana rispetto a q . Ciò garantisce unicità di soluzione per il problema di Cauchy (3.3.3). Pertanto deve essere $\psi(t) = 0$ cioè $w(t) = u(t, v(t))$ per ogni $t \in I$. Ciò significa che $(t, v(t), w(t)) \in G(u)$ per ogni $t \in I$ ossia $\Gamma(p_0) \subset G(u)$. \square

Il teorema 3.3.2 fornisce un'indicazione su come procedere per cercare soluzioni dell'equazione (3.3.1). Consideriamo un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} u_t + a(t, x, u)u_x = b(t, x, u) \\ u(t_0, x) = g(x) \quad \forall x \in J \end{cases} \quad (3.3.4)$$

dove $t_0 \in \mathbb{R}$, J è un dato intervallo aperto e g è una funzione di classe C^1 da J in \mathbb{R} . Come già osservato, affinché il problema sia consistente occorre che sia $(t_0, x, g(x)) \in \mathcal{D}$ per ogni $x \in J$.

La condizione iniziale $u(t_0, x) = g(x)$ in J si traduce in una corrispondente condizione iniziale per il sistema di equazioni caratteristiche. Per ogni $r \in J$ si deve considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t, v, w) & v(t_0) = r \\ \dot{w} = b(t, v, w) & w(t_0) = g(r). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Consideriamo ora l'unione delle curve caratteristiche che (all'istante t_0) passano per il grafico di g

$$S(g) = \bigcup_{r \in J} \Gamma(t_0, r, g(r)).$$

Il nostro scopo è stabilire se $S(g)$ sia grafico di una soluzione del problema (3.3.4). Iniziamo ad esaminare la situazione con un esempio.

Esempio 3.3.3. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} tu_t + (t+u)u_x = x - t \\ u(1, x) = x + 1. \end{cases}$$

Riscriviamo il problema nella forma (3.3.4) prendendo

$$a(t, x, u) = 1 + \frac{u}{t}, \quad b(t, x, u) = \frac{x}{t} - 1, \quad t_0 = 1, \quad g(x) = x + 1, \quad J = \mathbb{R}.$$

Il problema (3.3.5) nel caso in esame si scrive

$$\begin{cases} \dot{v} = 1 + \frac{w}{t} & v(1) = r \\ \dot{w} = \frac{v}{t} - 1 & w(1) = r + 1. \end{cases}$$

Le equazioni in questione sono accoppiate. Per risolvere il sistema possiamo osservare che passando dalla coppia di funzioni incognite (v, w) alla coppia

$$(V, W) = (v + w, w - v)$$

riusciamo a disaccoppiare il sistema. In particolare si ha che

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{V}{t} \\ \dot{W} = -\frac{W}{t} - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} V(1) = 2r + 1 \\ W(1) = 1. \end{cases}$$

Il problema per (V, W) si risolve facilmente e si ottiene

$$\begin{cases} V(t, r) = (2r + 1)t \\ W(t, r) = \frac{2}{t} - t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} v(t, r) = rt - \frac{1}{t} + t \\ w(t, r) = rt + \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Per ogni $r \in \mathbb{R}$ fissato, l'insieme

$$\Gamma_r = \{(t, v(t, r), w(t, r)) \mid t > 0\}$$

è una curva caratteristica passante per $(1, r, g(r))$. Abbiamo preso $t > 0$ perché nel caso in esame $t_0 = 1 > 0$. Vogliamo trovare una funzione $u(t, x)$ tale che, detto $G(u)$ il suo grafico, si abbia

$$G(u) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \Gamma_r. \quad (3.3.6)$$

Siccome

$$\begin{aligned} \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \Gamma_r &= \{(t, v(t, r), w(t, r)) \mid t > 0, r \in \mathbb{R}\} \\ G(u) &= \{(t, x, u(t, x)) \mid (t, x) \in \Omega\} \end{aligned}$$

con Ω dominio di \mathbb{R}^2 da determinarsi, insieme a u , per ottenere (3.3.6) dobbiamo risolvere l'equazione

$$x = v(t, r)$$

rispetto all'incognita r . Nel nostro caso tale equazione è

$$x = rt - \frac{1}{t} + t$$

da cui

$$r = \frac{1}{t} \left(x - t + \frac{1}{t} \right).$$

Quindi definiamo $u(t, x) = w(t, r)$ con r espresso in funzione di t e x . Dunque

$$u(t, x) = rt + \frac{1}{t} = x - t + \frac{2}{t}.$$

La funzione u così ottenuta è definita in $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e, come si può verificare direttamente, soddisfa il problema preso in esame.

Esercizio 3.3.4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

1. $\begin{cases} u_t + u_x + u = 1 \\ u = u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad [u(t, x) = 1 + e^{-t} (g(x-t) - 1)]$
2. $\begin{cases} u_t + u_x = u^2 \\ u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad [u(t, x) = \frac{g(x-t)}{1-tg(x-t)}]$
3. $\begin{cases} xu_t - tu_x = u \\ u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad [u(t, x) = g(\sqrt{x^2 + t^2})e^{\arctan \frac{t}{x}}]$
4. $\begin{cases} u_t + xu_x = 2xu \\ u(0, x) = 1. \end{cases} \quad [u(t, x) = e^{2x}]$
5. $\begin{cases} 3t^{2/3}u_t + u_x = 2 \\ u(1, x) = x + 1. \end{cases} \quad [u(t, x) = x + \sqrt[3]{t}]$

L'esempio 3.3.3 mette in luce che per costruire una soluzione del problema di Cauchy (3.3.4) con il metodo delle caratteristiche dobbiamo:

- risolvere i problemi di Cauchy (3.3.5) relativi ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie,
- risolvere l'equazione $x = v(t, r)$ rispetto all'incognita r .

Da un punto di vista teorico, l'esistenza e unicità della soluzione dei problemi di Cauchy (3.3.5) e la sua dipendenza C^1 dal parametro $r \in J$ sono garantite dalla teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie. Per quanto riguarda la risoluzione dell'equazione $x = v(t, r)$ rispetto all'incognita r , si tratta di una questione di invertibilità che, in generale, può essere risolta mediante il teorema della funzione implicita⁽¹⁾. Tale teorema però fornisce una soluzione "locale", cioè definita nell'intorno di un punto. Quindi in generale possiamo ottenere un risultato di esistenza locale e precisamente:

Teorema 3.3.5. *Date $a, b \in C^1(\mathcal{D})$ con \mathcal{D} dominio in \mathbb{R}^3 e data una funzione $g \in C^1(J)$ con J intervallo aperto di \mathbb{R} , per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times J$ tale che $(t_0, x_0, g(x_0)) \in \mathcal{D}$ esiste un intorno N di (t_0, x_0) e una funzione $u \in C^1(N)$ che risolve il problema*

$$\begin{cases} u_t + a(t, x, u)u_x = b(t, x, u) & \text{in } N \\ u(t_0, x) = g(x) & \text{se } (t_0, x) \in N. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Dimostrazione. Fissiamo (t_0, x_0) come nelle ipotesi del teorema. Per ogni $r \in J$ il problema di Cauchy (3.3.5) ha un'unica soluzione (v, w) che dipende anche

¹ Il **teorema della funzione implicita**, nella versione che ci interessa, afferma quanto segue: siano dati un punto $(p_0, s_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, un suo intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 in U . Se $f(p_0, s_0) = 0$ e $f_s(p_0, s_0) \neq 0$ allora esistono un intorno V di p_0 e una funzione $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in V tali che: (i) $\varphi(p_0) = s_0$, (ii) $(p, \varphi(p)) \in U \forall p \in V$, (iii) $f(p, s) = 0$ in $V \times \varphi(V)$ se e solo se $s = \varphi(p)$.

da r . Fissiamo un intorno J_0 di x_0 tale che $J_0 \subset\subset J$. Allora, dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, per ogni $r \in J_0$ la soluzione (v, w) è definita in un intorno I di t_0 indipendente da $r \in J_0$. Inoltre le applicazioni $r \mapsto v(t, r)$ e $r \mapsto w(t, r)$ risultano di classe C^1 rispetto a $r \in J_0$ in quanto g è di classe C^1 (si tratta di applicare il teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali per le equazioni differenziali ordinarie). Consideriamo l'applicazione $f: I \times \mathbb{R} \times J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(t, x, r) = x - v(t, r).$$

Osserviamo che f è di classe C^1 sul suo dominio, perché $v \in C^1(I \times J_0)$. Inoltre

$$f(t_0, x, x) = 0 \quad \forall x \in J_0 \quad (3.3.8)$$

perché $v(t_0, r) = r$ per ogni $r \in J$, e

$$f_r(t_0, x, x) = -1 \quad (3.3.9)$$

perché $v_r(t_0, r) = 1$ e $f_r(t, x, r) = -v_r(t, r)$. Quindi per il teorema della funzione implicita esiste un intorno N di (t_0, x_0) contenuto in $I \times J_0$ ed esiste una funzione $R: N \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in N tale che

$$\begin{cases} f(t, x, r) = 0 \\ (t, x) \in N \end{cases} \Leftrightarrow r = R(t, x). \quad (3.3.10)$$

In particolare da (3.3.8) segue che

$$R(t_0, x) = x \quad \text{se } (t_0, x) \in N. \quad (3.3.11)$$

Definiamo infine $u: N \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$u(t, x) = w(t, R(t, x)) \quad \forall (t, x) \in N$$

e verifichiamo che u risolve il problema (3.3.7). Infatti $u \in C^1(N)$ perché $R \in C^1(N)$ e $w \in C^1(I \times J_0)$. Inoltre se $(t_0, x) \in N$ allora, tenuto conto di (3.3.11) e del fatto che $w(t_0, r) = g(r)$ per $r \in J$, si ha che $u(t_0, x) = g(x)$. Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} u_t + a(t, x, u) u_x &= w_t(t, R) + w_r(t, R) R_t + a(t, x, u) w_r(t, R) R_x \\ &= b(t, v(t, R), w(t, R)) + w_r(t, R) (R_t + a(t, x, u) R_x) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

perché $w_t = b(t, v, w)$ in $I \times J_0$. Usando la definizione di f e (3.3.10) otteniamo che

$$x = v(t, R(t, x)) \quad \forall (t, x) \in N.$$

Quindi, sostituendo in (3.3.12), troviamo che

$$u_t + a(t, x, u) u_x = b(t, x, u) + w_r(t, R) (R_t + v_t(t, R) R_x) \quad (3.3.13)$$

perché $v_t = a(t, v, w)$ in $I \times J_0$. Osserviamo che (3.3.10) implica anche che

$$r = R(t, v(t, r)) \quad (3.3.14)$$

se r appartiene all'immagine di R . Derivando (3.3.14) rispetto a t , otteniamo

$$0 = R_t(t, v(t, r)) + R_x(t, v(t, r)) v_t(t, r)$$

cioè, tenuto conto di (3.3.10),

$$R_t(t, x) + R_x(t, x) v_t(t, R(t, x)) = 0 \quad \forall (t, x) \in N.$$

Sostituendo in (3.3.13) otteniamo che $u_t + a(t, x, u) u_x = b(t, x, u)$ in N . \square

Osservazione 3.3.6. Consideriamo un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} u_t + a(t, x, u) u_x = 0 \\ u(t_0, x) = g(x) \quad \forall x \in J \end{cases} \quad (3.3.15)$$

dove $t_0 \in \mathbb{R}$, J è un dato intervallo aperto e g è una funzione di classe C^1 da J in \mathbb{R} tali che $(t_0, x, g(x))$ appartenga al dominio della funzione a per ogni $x \in J$. Fissato $x_0 \in J$, per il teorema 3.3.5, tale problema ammette una soluzione locale $u(t, x)$, cioè definita in un certo intorno N di (t_0, x_0) . In base alla costruzione effettuata nel corso della dimostrazione precedente, la soluzione u ha la seguente proprietà: per ogni fissato r in un opportuno intorno di x_0

$$x = v(t, r) \Leftrightarrow u(t, x) = w(t, r).$$

Ma nel caso del problema (3.3.15) la funzione w è soluzione di

$$\begin{cases} w_t = 0 \\ w(t_0, r) = g(r) \end{cases}$$

cioè $w(t, r) = g(r)$ per ogni t . Quindi

$$x = v(t, r) \Leftrightarrow u(t, x) = g(r). \quad (3.3.16)$$

Ciò significa che, per r fissato, la soluzione u è costante e vale $g(r)$ lungo la curva

$$\gamma(r) = \{(t, v(t, r)) \mid t \in I\}$$

dove I è un intorno di t_0 . Dunque la soluzione evolve nel tempo spostando il profilo iniziale, definito da $g(r)$ lungo le curve $\gamma(r)$. La derivata rispetto a t di $v(t, r)$ definisce la *velocità di propagazione* della soluzione lungo la curva $\gamma(r)$. Ma

$$v_t(t, r) = a(t, v(t, r), w(t, r)) = a(t, x, u(t, x)).$$

Quindi il coefficiente $a(t, x, u)$ individua la velocità di propagazione della soluzione u in un generico punto (t, x) del suo dominio.

3.4 Leggi di conservazione scalari unidimensionali

Data una funzione $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 studiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0 \\ u(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

dove nella condizione iniziale la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è assunta di classe C^1 .

Come già osservato nella sezione 3.1, l'equazione che compare nel problema (3.4.1) è una legge di conservazione scalare in dimensione spaziale 1. Infatti si può scrivere nella forma

$$u_t + [F(u)]_x = 0$$

dove la funzione F è una primitiva di a ed ha il significato di densità di flusso. Ricordiamo inoltre che il coefficiente $a(u)$ rappresenta la velocità di propagazione della densità u (cfr. osservazione 3.3.6). Spesso una soluzione $u(t, x)$ di (3.4.1) viene chiamata *onda* con profilo iniziale g . Siamo interessati a studiare la propagazione dell'onda nel futuro, cioè per $t > 0$.

L'aspetto più interessante per problemi del tipo (3.4.1) è che anche per condizioni iniziali molto regolari, la nonlinearietà presente nell'equazione può dare origine a soluzioni che sviluppano discontinuità. Chiameremo tali soluzioni **onde con fronti discontinui** o, più sinteticamente, **onde d'urto**, in inglese "shock waves".

Esempio 3.4.1. *Tra le leggi di conservazione scalari che rientrano nella situazione del problema (3.4.1) ne mettiamo in evidenza un paio. Un primo caso notevole è quello in cui $a(u) = u$. L'equazione risultante è*

$$u_t + uu_x = 0$$

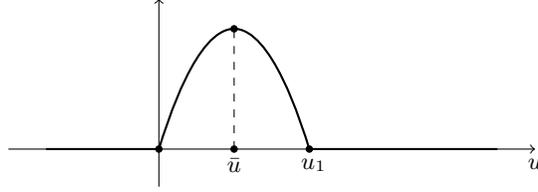
*nota come **equazione di Burgers**. Di fatto, l'equazione di Burgers vera e propria, che prende il nome del fisico olandese che la introdusse come modello in fluidodinamica, è*

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

dove u rappresenta la velocità del fluido e $\mu > 0$ è la costante di viscosità del fluido. Il caso $\mu = 0$ è l'equazione di Burgers non viscosa. Tale equazione in realtà non descrive alcun problema fisico reale; tuttavia costituisce un modello matematicamente semplice per evidenziare fenomeni di formazione e propagazione di "shock" ed è spesso utilizzato per testare programmi di simulazione numerica.

*Un altro caso significativo è quello dell'**equazione di Lighthill-Witham** per la descrizione del traffico veicolare. In questo caso l'incognita u rappresenta la densità di veicoli. Il coefficiente $a(u)$ è la derivata di una funzione $F(u)$ che rappresenta la densità di flusso ed è così caratterizzata: F è continua in*

\mathbb{R} , nulla per $u < 0$ e per $u > u_1$ ($u_1 > 0$ fissato), positiva e concava per $u \in (0, u_1)$ e tale che $F(u) \sim cu$ per $u \rightarrow 0^+$, con $c > 0$.



La funzione F ammette massimo in un certo $\bar{u} \in (0, u_1)$. L'intervallo $[0, \bar{u}]$ in cui F è crescente corrisponde ad una situazione di traffico leggero; l'intervallo $[\bar{u}, u_1]$ in cui F decresce corrisponde ad una situazione di traffico intenso. Le soluzioni fisicamente accettabili sono quelle tali che $u(t, x) \in [0, u_1]$ per ogni (x, t) .

Affrontiamo il problema (3.4.1) con il metodo delle caratteristiche. Scriviamo quindi il problema di Cauchy per il sistema di equazioni differenziali ordinarie corrispondente a (3.4.1):

$$\begin{cases} \dot{v} = a(w) \\ \dot{w} = 0 \\ v(0) = r \\ w(0) = g(r). \end{cases}$$

Esplicitando anche la dipendenza da r , la soluzione di tale problema è

$$\begin{cases} v(t, r) = a(g(r))t + r \\ w(t, r) = g(r). \end{cases}$$

Per costruire la soluzione $u(t, x)$ del problema (3.4.1) occorre risolvere l'equazione $x = v(t, r)$ cioè

$$x = a(g(r))t + r$$

rispetto all'incognita r . In generale tale equazione non è risolvibile esplicitamente. Dunque la soluzione $u(t, x)$ resta data in forma implicita mediante le relazioni

$$\begin{cases} u(t, x) = g(r) \\ x = a(g(r))t + r \end{cases} \quad (3.4.2)$$

o, equivalentemente, mediante l'equazione ottenuta eliminando il parametro r

$$u(t, x) = g(x - a(u(t, x))t). \quad (3.4.3)$$

Siamo interessati a studiare la soluzione per tempi positivi. A tale scopo introduciamo le *semirette caratteristiche*

$$\rho(r) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x = a(g(r))t + r\} \quad (r \in \mathbb{R})$$

e chiamiamo Ω il dominio della soluzione u . In base all'osservazione 3.3.6, tenuto conto di (3.4.2), per ogni $r \in \mathbb{R}$ fissato la soluzione $u(t, x)$ di (3.4.1) è costante nei punti $(t, x) \in \Omega \cap \rho(r)$ e il suo valore in tali punti è $g(r)$.

In generale le semirette $\rho(r)$ non hanno la stessa pendenza. La pendenza di $\rho(r)$ è data da $a(g(r))$ e quindi dipende sia dalla forma del coefficiente $a(u)$ (cioè, in ultima istanza, dalla relazione costitutiva $F = F(u)$) sia dal profilo iniziale dell'onda, definito dalla funzione g .

Proposizione 3.4.2. *Se il problema (3.4.1) ammette una soluzione u definita in $(0, \tau) \times \mathbb{R}$ allora per ogni punto $(t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{R}$ passa una sola semiretta caratteristica. Inoltre se $(t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{R}$ sta sulla semiretta caratteristica $\rho(r)$ allora*

$$u_x(t, x) = \frac{g'(r)}{1 + a'(g(r))g'(r)t}. \quad (3.4.4)$$

Dimostrazione. Sia $(t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{R}$. Se $(t, x) \in \rho(r_1) \cap \rho(r_2)$, allora, per (3.4.2),

$$\begin{cases} u(t, x) = g(r_1) \\ x = a(g(r_1))t + r_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u(t, x) = g(r_2) \\ x = a(g(r_2))t + r_2 \end{cases}$$

e quindi

$$r_1 - r_2 = (x - a(g(r_1))t) - (x - a(g(r_2))t) = (x - a(u(t, x))t) - (x - a(u(t, x))t) = 0$$

cioè $\rho(r_1) = \rho(r_2)$. Per calcolare $u_x(t, x)$ deriviamo (3.4.3) rispetto a x e usando (3.4.2) otteniamo (3.4.4). \square

In base alla proposizione 3.4.2, affinché ci sia una soluzione (classica) di (3.4.1) definita in $(0, \tau) \times \mathbb{R}$ occorre che

$$1 + a'(g(r))g'(r)t \neq 0 \quad \forall (t, r) \in (0, \tau) \times \mathbb{R}.$$

Siamo interessati a trovare il massimo istante τ per cui esista una soluzione di (3.4.1) in $(0, \tau) \times \mathbb{R}$. A tale scopo introduciamo l'insieme

$$T = \{t > 0 \mid 1 + a'(g(r))g'(r)t = 0 \text{ per qualche } r \in \mathbb{R}\} \quad (3.4.5)$$

e definiamo

$$t^* = \begin{cases} +\infty & \text{se } T = \emptyset \\ \inf T & \text{se } T \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Proposizione 3.4.3. *Se la funzione g è limitata e $t^* > 0$ (incluso $t^* = +\infty$) allora il problema (3.4.1) ammette una soluzione classica definita in $(0, t^*) \times \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per definizione di T e siccome $a, g \in C^1$, si ha che

$$1 + a'(g(r))g'(r)t > 0 \quad \forall (t, r) \in (0, t^*) \times \mathbb{R}. \quad (3.4.7)$$

Inoltre per ogni $(t, x) \in (0, t^*) \times \mathbb{R}$ passa una sola semiretta caratteristica. Infatti, fissato $t \in (0, t^*)$, posto $\varphi(r) = a(g(r))t + r$, abbiamo che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

e $\varphi'(r) = a'(g(r))g'(r)t + 1$. Da (3.4.7) segue che $\varphi'(r) > 0$ per ogni $r \in \mathbb{R}$. Inoltre, dato che g è per ipotesi limitata, $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} (a(g(r))t + r) = \pm\infty$. Quindi

$$\forall (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{R} \exists \text{ un unico } r = R(t, x) \text{ tale che } a(g(r))t + r = x.$$

Ora vogliamo provare che la funzione R così costruita è di classe C^1 in $(0, \tau) \times \mathbb{R}$. A tale scopo introduciamo la funzione

$$f(t, x, r) = a(g(r))t + r - x$$

definita e di classe C^1 in \mathbb{R}^3 . Si ha che

$$r = R(t, x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t, x, r) = 0 \\ (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Inoltre

$$f_r(t, x, r) = a'(g(r))g'(r)t + 1 = \frac{d}{dr} (a(g(r))t + r) > 0 \quad \text{in } (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Allora il teorema della funzione implicita garantisce che la funzione $R(t, x)$ è di classe C^1 . Ora definiamo

$$u(t, x) = g(R(t, x)) \quad \forall (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{R}.$$

Procedendo come nella parte finale della dimostrazione del teorema 3.3.5 si dimostra che u è una soluzione di (3.4.1) in $(0, t^*) \times \mathbb{R}$. \square

Proposizione 3.4.4. *Supponiamo che la funzione g sia limitata. Le semirette caratteristiche non si intersecano mai se e solo se la funzione $r \mapsto a(g(r))$ è non decrescente. In tal caso il problema di Cauchy (3.4.1) ammette una soluzione classica $u(t, x)$ definita in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dati $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ con $r_1 \neq r_2$ le corrispondenti semirette caratteristiche $\rho(r_1)$ e $\rho(r_2)$ si intersecano se e solo se esiste $t > 0$ tale che $r_2 - r_1 = t [a(g(r_1)) - a(g(r_2))]$ cioè se e solo se

$$\frac{a(g(r_1)) - a(g(r_2))}{r_2 - r_1} > 0.$$

Dunque le semirette caratteristiche non si intersecano mai se e solo se

$$\frac{a(g(r_1)) - a(g(r_2))}{r_2 - r_1} \leq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ con } r_1 \neq r_2$$

e ciò equivale a dire che la funzione $r \mapsto a(g(r))$ è non decrescente. In tal caso si ha che

$$1 + a'(g(r))g'(r)t = 1 + t(a \circ g)'(r) \geq 1 > 0 \quad \forall (t, r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Quindi l'insieme T definito in (3.4.5) è vuoto, $t^* = +\infty$ e la conclusione segue dalla proposizione 3.4.3. \square

Consideriamo ora il caso in cui esistano due semirette caratteristiche distinte che si intersecano. Possiamo interpretare tale situazione in questo modo: l'onda trasporta ciò che si trova inizialmente nella posizione r lungo la semiretta $\rho(r)$ con velocità $a(g(r))$. Se due semirette $\rho(r_1)$ e $\rho(r_2)$, con $r_1 < r_2$, si intersecano vuol dire che $a(g(r_1)) > a(g(r_2))$ e quindi ciò che inizialmente stava in $x = r_1$ viaggia con una velocità maggiore di ciò che inizialmente stava in $x = r_2$. Ad un certo istante, quello che corrisponde esattamente all'intersezione tra le due semirette e che, sostanzialmente, è il valore t^* definito in (3.4.6), la quantità che si trovava in $x = r_1$ al tempo $t = 0$ raggiunge (potremmo dire "collide con" o anche "urta", da ciò la denominazione "onde d'urto") la quantità che al tempo $t = 0$ occupava la posizione $x = r_2$.

Osserviamo che se $T \neq \emptyset$

$$t^* = \inf_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ a'(g(r))g'(r) < 0}} -\frac{1}{a'(g(r))g'(r)}.$$

Il valore t^* si chiama **tempo di shock** o **tempo critico** o, in inglese, **breaking time** (tempo di "rottura", perché l'onda si rompe a tale istante). Se $r^* \in \mathbb{R}$ è tale per cui $a'(g(r^*))g'(r^*) < 0$ e $a'(g(r^*))g'(r^*)t^* = 1$, il punto $x^* = a(g(r^*))t^* + r^*$ individua la posizione in cui si forma lo shock.

Esempio 3.4.5. *Determinare tempo e punto di shock per la soluzione dell'equazione di Burgers con condizione iniziale gaussiana $g(x) = e^{-x^2}$.*

Siamo nel caso $a(u) = u$. Quindi $a'(g(r))g'(r) = -2re^{-r^2}$ e

$$t^* = \inf_{r > 0} \frac{e^{r^2}}{2r}.$$

Da calcoli elementari si trova che la funzione $r \mapsto \frac{e^{r^2}}{2r}$ ha minimo assoluto in \mathbb{R}^+ per $r = r^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $t^* = \sqrt{e/2}$. Lo shock si forma al tempo t^* nel punto $x^* = \sqrt{2}$.

In generale all'avvicinarsi del tempo di shock il profilo della soluzione si fa sempre più ripido e per descrivere tale fenomeno si usa l'espressione "catastrofe di gradiente". Vale il seguente risultato.

Proposizione 3.4.6. *Se $0 < t^* < +\infty$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata di classe C^1 , allora $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(x, t)| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow t^*$.*

Dimostrazione. Per definizione di t^* esiste una successione $(r_n) \subset \mathbb{R}$ tale che

$$a'(g(r_n))g'(r_n) < 0 \quad \text{e} \quad t_n := -\frac{1}{a'(g(r_n))g'(r_n)} \rightarrow t^*.$$

Prendiamo una successione $s_n \rightarrow t^*$ e, preso

$$x_n = a'(g(r_n))s_n + r_n$$

valutiamo $u_x(s_n, x_n)$. Per la scelta fatta, si ha che (s_n, x_n) sta in $\rho(r_n)$ e nel dominio di u e quindi

$$|u_x(s_n, x_n)| = \frac{|g'(r_n)|}{|1 + a'(g(r_n))g'(r_n)s_n|} = \frac{|g'(r_n)|}{|1 - \frac{s_n}{t_n}|}.$$

Chiaramente $|1 - \frac{s_n}{t_n}| \rightarrow 0$. Non può essere che $g'(r_n) \rightarrow 0$ perché altrimenti, dato che $t_n \rightarrow t^* > 0$, dovrebbe essere $|a'(g(r_n))| \rightarrow +\infty$. Questo non può succedere perché se g è limitata anche la successione $a'(g(r_n))$ lo è, in quanto $a \in C^1$. In conclusione troviamo che $|u_x(s_n, x_n)| \rightarrow +\infty$ e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(s_n, x)| \rightarrow +\infty.$$

Siccome (s_n) è una qualsiasi successione tale che $s_n \rightarrow t_-^*$ otteniamo che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(t, x)| \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow t_-^*. \quad \square$$

In base alla proposizione precedente se $t^* < +\infty$, non ci può essere soluzione classica per tempi $t \geq t^*$.

3.5 Soluzioni deboli

L'impossibilità di considerare soluzioni in senso classico per tempi successivi al tempo critico t^* non significa che il fenomeno di propagazione dell'onda si esaurisca all'istante t^* . Piuttosto ci obbliga a rivedere il concetto di soluzione, dal momento che quello finora considerato di soluzione classica si rivela inadeguato per una trattazione completa del problema. Riprendiamo allora il problema di Cauchy (3.4.1) scrivendolo nella forma

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 \\ u(0, x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Qui F è una primitiva di a e, in particolare, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^2 . Nel discorso che segue, possiamo ammettere che $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua tranne che in un insieme finito di punti, dove comunque assumiamo che esistano finiti i limiti destro e sinistro.

Come detto in precedenza, anche per condizioni iniziali molto regolari, la nozione di soluzione classica non è del tutto idonea a descrivere il problema di Cauchy (3.5.1). Possiamo introdurre una nozione di soluzione che, sostanzialmente, abbia memoria solo della forma integrale della legge di conservazione e quindi comporti una richiesta di regolarità più blanda. La nuova nozione di soluzione che daremo è suggerita dalla seguente proprietà.

Proposizione 3.5.1. *Se $u: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione classica di (3.5.1) allora per ogni $\phi \in C_c^1((-\infty, T) \times \mathbb{R})$ ⁽²⁾*

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(0, x) dx = 0. \quad (3.5.2)$$

Dimostrazione. Presa una qualsiasi funzione $\phi \in C_c^1((-\infty, T) \times \mathbb{R})$ moltiplichiamo l'equazione differenziale $u_t + [F(u)]_x = 0$ per ϕ , integriamo rispetto a x e a t e applichiamo la formula di integrazione per parti. In particolare, preso $R > 0$ tale che $\text{supp } \phi \subset (-\infty, T) \times (-R, R)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u_t \phi dx dt &= \int_0^T \int_{-R}^R u_t \phi dx dt \\ &= \int_{-R}^R \int_0^T u_t \phi dt dx \\ &= \int_{-R}^R \left(u(T, x)\phi(T, x) - u(x, 0)\phi(0, x) - \int_0^T u\phi_t dt \right) dx \\ &= - \int_{-R}^R g(x)\phi(0, x) dx - \int_{-R}^R \int_0^T u\phi_t dt dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(0, x) dx - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_t dx dt \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} [F(u)]_x \phi dx dt &= \int_0^T \int_{-R}^R [F(u)]_x \phi dx dt \\ &= \int_0^T \left(F(u(t, R))\phi(t, R) - F(u(t, -R))\phi(t, -R) - \int_{-R}^R F(u)\phi_x dx \right) dt \\ &= - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\phi_x dx dt. \end{aligned}$$

Dunque, sommando, troviamo (3.5.2). \square

L'equazione integrale (3.5.2) non richiede più una regolarità C^1 sulla funzione u . Ora possiamo ammettere che u sia solo continua o che presenti anche dei salti. Arriviamo così a introdurre la seguente definizione.

Una funzione $u: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **soluzione debole** del problema di Cauchy (3.4.1) se:

² Si chiama **supporto** di una funzione $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la chiusura (in \mathbb{R}^n) dell'insieme $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$. La famiglia delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in un aperto A si indica $C_c(A)$; inoltre si denota $C_c^k(A) = C_c(A) \cap C^k(A)$.

- (1) esiste una curva di classe C^1 della forma $\Gamma = \{(t, \xi(t)) \mid t \in I\}$ (I intervallo aperto in \mathbb{R}^+) tale che u è continua in $([0, T) \times \mathbb{R}) \setminus \Gamma$ e per ogni $t \in I$ esistono finiti

$$u^+(t, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi(t)^+} u(t, x) \quad \text{e} \quad u^-(t, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi(t)^-} u(t, x).$$

- (2) per ogni $\phi \in C_c^1((-\infty, T) \times \mathbb{R})$ vale (3.5.2).

La curva Γ si chiama **curva di discontinuità** o **curva di salto**.

Per la proposizione 3.5.1 ogni soluzione classica è anche soluzione debole. Vale inoltre il seguente risultato.

Teorema 3.5.2. *Sia $u: [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una soluzione debole del problema di Cauchy (3.4.1) con curva di discontinuità Γ . Supponiamo inoltre che u sia di classe C^1 in $((0, T) \times \mathbb{R}) \setminus \Gamma$. Allora:*

- (i) u è soluzione classica fuori dalle curve di discontinuità, cioè

$$u_t + a(u)u_x = 0 \quad \text{in } ((0, T) \times \mathbb{R}) \setminus \Gamma,$$

- (ii) lungo la curva di discontinuità vale la **condizione di salto di Rankine-Hugoniot**:

$$(u^+(t, \xi) - u^-(t, \xi))\xi'(t) = F(u^+(t, \xi)) - F(u^-(t, \xi)) \quad \forall t \in I.$$

Posto

$$[[u]] = u^+ - u^- = \text{salto in } u \text{ attraverso la curva } \Gamma$$

$$[[F(u)]] = F(u^+) - F(u^-) = \text{salto in } F(u) \text{ attraverso la curva } \Gamma$$

la condizione di salto di Rankine-Hugoniot si scrive sinteticamente

$$[[F(u(t, \xi))]] = [[u(t, \xi)]]\xi'(t)$$

e $\xi'(t)$ dà la velocità di propagazione del salto lungo Γ .

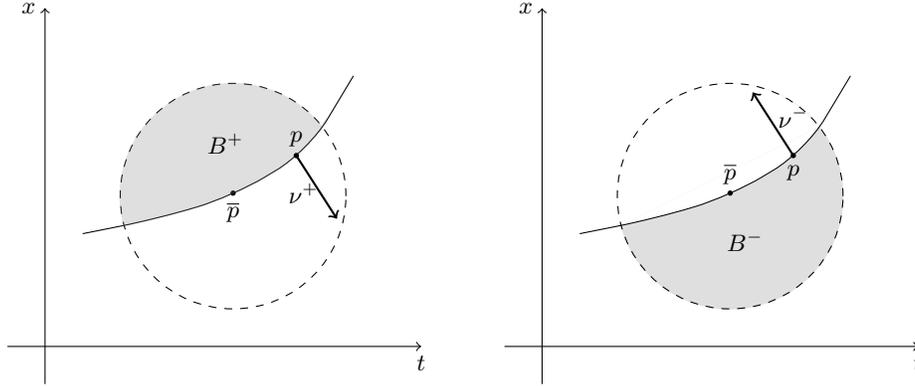
Dimostrazione. (i) Per ogni funzione test $\phi \in C_c^1(((0, T) \times \mathbb{R}) \setminus \Gamma)$ si ha che

$$0 = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt = - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t + [F(u)]_x) \phi dx dt.$$

Per l'arbitrarietà di ϕ deduciamo che $u_t + [F(u)]_x = 0$ in $((0, T) \times \mathbb{R}) \setminus \Gamma$.

(ii) Fissato $\bar{t} \in I$ sia $\delta > 0$ tale che $[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \subset I$. Sia B un disco nel piano centrato in $(\bar{t}, \xi(\bar{t}))$ e di raggio δ . Definiamo

$$B_+ = \{(t, x) \in B \mid x > \xi(t)\} \quad \text{e} \quad B_- = \{(t, x) \in B \mid x < \xi(t)\}.$$



Il grafico di ξ divide la palla centrata in $\bar{p} = (\bar{t}, \xi(\bar{t}))$ di raggio δ nei due domini B^+ e B^- . ν^+ = normale esterna a B_+ in $p = (t, \xi(t))$, $\nu^- = -\nu^+$ = normale esterna a B_- in p .

Fissiamo $\phi \in C_c^1(B)$ e applichiamo il teorema della divergenza al campo

$$\Phi: \bar{B}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \Phi = \begin{cases} (u\phi, F(u)\phi) & \text{in } B_+ \\ (u^+\phi, F(u^+)\phi) & \text{in } \Gamma \cap B. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione Φ è continua in \bar{B}_+ , $\Phi = 0$ su ∂B e

$$\operatorname{div} \Phi = [u\phi]_t + [F(u)\phi]_x = (u_t + [F(u)]_x)\phi + u\phi_t + F(u)\phi_x = u\phi_t + F(u)\phi_x$$

in B_+ e quindi, per continuità, in \bar{B}_+ . Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{B_+} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt &= \int_{B_+} \operatorname{div} \Phi dx dt \\ &= \int_{\partial B_+} \Phi \cdot \nu_+ d\sigma = \int_{\Gamma \cap B} (F(u^+)\nu_+^x + u^+\nu_+^t) \phi d\sigma \end{aligned}$$

essendo ν_+ la normale a $\Gamma \cap B$ rivolta verso l'esterno di B_+ , di componenti ν_+^t e ν_+^x . Analogamente si trova che

$$\int_{B_-} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt = \int_{\Gamma \cap B} (F(u^-)\nu_-^x + u^-\nu_-^t) \phi d\sigma$$

dove ora ν_- è la normale a $\Gamma \cap B$ rivolta verso l'esterno di B_- , di componenti ν_-^t e ν_-^x . Siccome u è soluzione debole, si ha che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_B (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt \\ &= \int_{B_+} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt + \int_{B_-} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt. \end{aligned}$$

Quindi, dato che $\nu_- = -\nu_+$, deduciamo che

$$\int_{\Gamma \cap B} [(F(u^+) - F(u^-)) \nu_+^x + (u^+ - u^-) \nu_+^t] \phi \, d\sigma = 0.$$

Per l'arbitrarietà di ϕ in $C_c^1(B)$, segue allora che

$$(F(u^+) - F(u^-)) \nu_+^x + (u^+ - u^-) \nu_+^t = 0 \quad \text{in } \Gamma \cap B.$$

Essendo

$$\nu_+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi'(t)^2}} (\xi'(t), -1)$$

troviamo in particolare che

$$F(u^+(\bar{t}, \xi)) - F(u^-(\bar{t}, \xi)) = (u^+(\bar{t}, \xi) - u^-(\bar{t}, \xi)) \xi'(\bar{t}). \quad \square$$

Osservazione 3.5.3. (i) *La definizione di soluzione debole e il teorema 3.5.2 si generalizzano in modo ovvio al caso in cui l'insieme di discontinuità sia unione di un numero finito di curve.*

(ii) *In letteratura si trova anche un'altra definizione di soluzione debole, in cui si chiede che valga*

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) \, dx + F(u(t, x_2)) - F(u(t, x_1)) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in (0, T).$$

Tale definizione alternativa implica la stessa condizione di salto espressa dall'equazione di Rankine-Hugoniot.

Esempio 3.5.4. *Consideriamo l'equazione di Burgers con la condizione iniziale*

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{per } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Una soluzione debole del corrispondente problema di Cauchy è data per $t \in [0, 1)$ da

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+t} & \text{per } -1 \leq x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{per } t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1. \end{cases}$$

L'istante $t = 1$ è il tempo di shock. Per $t \geq 1$ la soluzione diventa discontinua ed è data da

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+t} & \text{per } -1 \leq x \leq \xi(t) \\ 0 & \text{per } t > \xi(t) \end{cases}$$

dove $\xi(t)$ parametrizza la curva di salto, definita per $t > 1$. Dobbiamo determinare esplicitamente $\xi(t)$. A tale scopo usiamo la condizione di Rankine-Hugoniot in base alla quale

$$\xi' = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1+\xi}{1+t} \right)^2}{\frac{1+\xi}{1+t}} = \frac{1+\xi}{2(1+t)}.$$

Si tratta quindi di risolvere tale equazione differenziale per $t > 1$ con la condizione iniziale $\xi(1) = u(1,1) = 1$. Il risultato è $\xi(t) = -1 + \sqrt{2t+2}$. La velocità di propagazione lungo la curva di salto è $\sqrt{2}/(t+1)$.

Equazione delle onde

4.1 Un modello matematico per la corda vibrante

Studiamo il problema delle **piccole vibrazioni trasversali di una corda perfettamente flessibile**.

Si ha una corda infinitamente lunga nel piano che, a riposo (cioè ferma e non soggetta a forze esterne), si dispone su una retta orizzontale. Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'asse delle ascisse coincide con la posizione a riposo della corda. Supponiamo che:

- ogni elemento infinitesimo della corda possa spostarsi solo nella direzione verticale, cioè non avvengano spostamenti in orizzontale (da ciò l'espressione "vibrazioni trasversali"); indichiamo quindi con $u(t, x)$ lo spostamento (verticale) dalla posizione di riposo in corrispondenza del valore x delle ascisse, all'istante t ;
- la corda non offra resistenza alla flessione (da ciò l'espressione "corda perfettamente flessibile").

Dunque, per t fissato, il grafico della funzione $x \mapsto u(t, x)$ dà la configurazione della corda all'istante t . Invece per x fissato, la funzione $t \mapsto u(t, x)$ fornisce la legge del moto del punto della corda di ascissa x .

Per costruire un'equazione differenziale per u usiamo la legge di Newton secondo cui la derivata rispetto al tempo della quantità di moto è pari alla somma delle forze applicate. Dobbiamo fare attenzione che le varie grandezze coinvolte sono vettoriali. Supporremo che la densità di massa ρ della corda sia costante.

Fissiamo un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e consideriamo il corrispondente tratto di corda $\gamma(t) = \{(x, u(x, t)) \mid x \in [a, b]\}$. Denotiamo

$$\mathbf{M}(t) = \text{quantità di moto del tratto di corda } \gamma(t) \text{ al tempo } t.$$

La componente orizzontale di $\mathbf{M}(t)$ è nulla perché abbiamo supposto che non ci sia spostamento in orizzontale. Dunque $\mathbf{M}(t) = (0, M(t))$ dove $M(t)$ è la componente verticale, data da

$$M(t) = \int_{\gamma(t)} \rho u_t ds = \int_a^b \rho u_t \sqrt{1 + u_x^2} dx.$$

Quindi, supponendo che u sia una funzione sufficientemente regolare abbiamo che

$$\frac{d}{dt} M(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_t \sqrt{1 + u_x^2} \right) dx.$$

Dobbiamo ora scrivere le forze agenti sulla corda. Si hanno:

- Forze interne, più precisamente, **forze di tensione** che agiscono tra elementi infinitesimi di corda adiacenti e garantiscono che la corda non si spezzi;
- **forze esterne**, quali la gravità, la resistenza al movimento opposta dal mezzo in cui la corda è immersa.

Siccome sappiamo già che non si ha spostamento in orizzontale (e infatti la componente orizzontale della quantità di moto è nulla) anche la componente orizzontale delle forze agenti sulla corda, sia di tensione sia esterne, deve essere nulla. Dunque ci possiamo limitare a determinare l'espressione delle componenti verticali delle forze.

Sulla componente verticale T della forza di tensione in un dato punto $P = (x, u(t, x))$, assumiamo che sia proporzionale allo stiramento della corda nel punto P ; più precisamente utilizziamo la legge di Hooke (che è una legge empirica, cioè giustificata in base ad osservazioni sperimentali) secondo cui

$$T(P) = \kappa(P) u_x$$

dove $\kappa(P)$ è una grandezza scalare positiva caratteristica della corda, detta modulo di Young. Supponiamo che la corda abbia elasticità uniforme, cioè che κ sia costante.

Dunque la componente verticale delle forze agenti sul tratto di corda corrispondente all'intervallo $[a, b]$ è data da

$$F(t) = T(b, u(t, b)) - T(a, u(t, a)) + \int_{\gamma(t)} \varphi ds = \int_a^b \left(\kappa u_{xx} + \varphi \sqrt{1 + u_x^2} \right) dx$$

dove φ denota la componente verticale della densità lineare delle forze esterne. In generale $\varphi = \varphi(t, x, u, u_t, \dots)$.

Dall'equazione di Newton $\frac{d}{dt} M(t) = F(t)$ deduciamo quindi che

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_t \sqrt{1 + u_x^2} \right) dx = \int_a^b \left(\kappa u_{xx} + \varphi \sqrt{1 + u_x^2} \right) dx.$$

Dovendo valere tale uguaglianza per qualsiasi intervallo $[a, b]$, deduciamo che u deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_t \sqrt{1 + u_x^2} \right) = \kappa u_{xx} + \varphi \sqrt{1 + u_x^2}$$

cioè

$$\rho u_{tt} \sqrt{1 + u_x^2} + \rho \frac{u_t u_x u_{xt}}{\sqrt{1 + u_x^2}} = \kappa u_{xx} + \varphi \sqrt{1 + u_x^2}$$

per ogni t e x . Detto

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \quad \text{e} \quad f = \frac{\varphi}{\rho},$$

ponendoci nell'approssimazione di **piccole vibrazioni** (cioè $|u_x| \ll 1$), otteniamo l'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$$

che è nota come equazione delle onde.

- **Vibrazioni libere.** Si suppone che le uniche forze agenti sulla corda siano quelle di tensione. L'equazione risulta allora $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.
- **Vibrazioni forzate.** Si suppone che sulla corda agiscano anche forze esterne indipendenti dallo spostamento della corda. L'equazione risulta allora $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x)$.
- **Vibrazioni smorzate.** Si suppone che la corda sia immersa in un fluido che oppone resistenza al movimento. In tal caso agisce una forza esterna la cui componente verticale, nella situazione più semplice, si suppone proporzionale a u_t ma diretta in senso opposto a u_t . L'equazione risulta allora $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -b u_t$. Il caso di dipendenza non lineare può verificarsi ma costituisce un problema più complicato.
- **Corda finita con estremi fissati (condizioni al contorno).** Si suppone che la corda sia vincolata a due punti, fissati nelle posizioni $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (L, 0)$. In tal caso l'equazione delle onde va studiata per $x \in (0, L)$ e abbinata con le condizioni al contorno $u(t, 0) = 0 = u(t, L)$.
- **Condizioni iniziali.** Dal punto di vista matematico è importante conoscere la posizione iniziale della corda, individuata dalla funzione $u(0, x)$, e come la corda è lasciata evolvere a partire dalla sua posizione iniziale, cioè dalla velocità iniziale $u_t(0, x)$. In altri termini, si assegnano le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(0, x) = g(x) \\ u_t(0, x) = h(x). \end{cases}$$

Il sistema costituito dall'equazione delle onde con assegnate condizioni iniziali si chiama problema di Cauchy.

La generalizzazione n -dimensionale dell'equazione delle onde è

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f$$

dove l'incognita u dipende da $(n + 1)$ variabili $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Per $n = 2$ tale equazione descrive fenomeni di vibrazione di membrane elastiche, oppure di propagazione di onde sulla superficie dell'acqua. Per $n = 3$ l'equazione descrive, ad esempio, la propagazione di onde acustiche nell'aria o in altro fluido.

Normalizzazione. Possiamo limitarci a studiare l'equazione delle onde con $c = 1$. Infatti se $v(t, x)$ risolve $v_{tt} - \Delta v = f(t, x, v)$ allora $u(t, x) = v(ct, x)$ risolve $u_{tt} - c^2 \Delta u = \tilde{f}(t, x, u)$ dove $\tilde{f}(t, x, u) = c^2 f(ct, x, u)$.

4.2 Equazione delle onde in dimensione 1

Studiamo il problema di Cauchy associato all'equazione delle onde in dimensione (spaziale) 1 su tutto \mathbb{R} :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = h(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

dove $u = u(t, x)$ è l'incognita e le funzioni g e h sono assegnate. Proviamo il seguente risultato.

Teorema 4.2.1. *Date $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$, se $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 che risolve il problema (4.2.1), allora*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (4.2.2)$$

Viceversa, la funzione u definita mediante (4.2.2) è di classe C^2 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e risolve (4.2.1).

L'espressione (4.2.2) si chiama **formula di d'Alembert**.

Dimostrazione. Come primo passo, "fattorizziamo" l'equazione delle onde. Se poniamo

$$v = u_t - u_x,$$

assumendo che u sia di classe C^2 e risolva l'equazione delle onde $u_{tt} - u_{xx} = 0$, abbiamo che

$$v_t + v_x = 0.$$

Ricordiamo che il problema

$$\begin{cases} w_t + cw_x = f_1(t, x) & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ w(0, x) = f_2(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

ha per soluzione

$$w(t, x) = f_2(x - ct) + \int_0^t f_1(s, x + (s-t)c) ds.$$

Quindi l'equazione $v_t + v_x = 0$ ha per soluzione

$$v(x, t) = a(x - t)$$

dove

$$a(x) = v(0, x) = u_t(0, x) - u_x(0, x) = h(x) - g'(x).$$

Tornando alla u , si dovrà avere

$$\begin{cases} u_t - u_x = a(x - t) \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

che è ancora un problema della forma (4.2.3) (con $c = -1$, $f_1(t, x) = a(x - t)$ e $f_2(x) = g(x)$). Quindi troviamo che

$$\begin{aligned} u(t, x) &= g(x + t) + \int_0^t a(x - (s - t) - s) ds \\ &= g(x + t) - \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} a(y) dy \quad (\text{sostituzione } s \mapsto y = x + t - 2s) \\ &= g(x + t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy \\ &= g(x + t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} (g(x + t) - g(x - t)) \\ &= \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la formula di d'Alembert. Che u sia di classe C^2 si ottiene direttamente da tale formula sfruttando la regolarità delle funzioni g e h . Verifichiamo che u risolve il problema (4.2.1). Conviene scrivere

$$u(t, x) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(g(x + t) + \int_0^{x+t} h(y) dy \right)}_{F(x+t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(g(x - t) - \int_0^{x-t} h(y) dy \right)}_{G(x-t)}.$$

Allora

$$u_{tt}(t, x) = F''(x + t) + G''(x - t) \quad \text{e} \quad u_{xx}(t, x) = F''(x + t) + G''(x - t)$$

e quindi u risolve l'equazione delle onde. Inoltre, sempre dalla formula di d'Alembert, si ottiene subito che $u(0, x) = g(x)$. Infine

$$\begin{aligned} u_t(0, x) &= [F'(x + t) - G'(x - t)]_{t=0} = F'(x) - G'(x) \\ &= \frac{1}{2} (g'(x) + h(x)) - \frac{1}{2} (g'(x) - h(x)) = h(x). \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 4.2.2. *La rappresentazione della soluzione u nella forma*

$$u(t, x) = F(x + t) + G(x - t)$$

sta a significare che u è sovrapposizione di un'onda progressiva e una regressiva (in generale una funzione della forma $\phi(x - ct)$ "trasporta" nel tempo il profilo di $\phi(x)$ con velocità algebrica c).

4.3 Problema di Cauchy-Dirichlet in una dimensione spaziale

Fissati un numero $L > 0$ e due funzioni $g, h: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ sufficientemente regolari, studiamo il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, L) \\ u(t, 0) = 0 = u(t, L) & \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x) & \text{per ogni } x \in [0, L] \\ u_t(0, x) = h(x) & \text{per ogni } x \in [0, L]. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione spaziale 1 su un intervallo limitato, con condizioni di Dirichlet nulle agli estremi.

Possiamo procedere come nel caso dell'analogo problema per l'equazione del calore con il metodo di separazione delle variabili. Non ripetiamo i dettagli del ragionamento, che segue esattamente la stessa linea ma enunciamo direttamente il risultato principale.

Teorema 4.3.1. *Se $g \in C^3([0, L])$ verifica $g(0) = g(L) = g''(0) = g''(L) = 0$ e $h \in C^2([0, L])$ verifica $h(0) = h(L) = 0$ allora, posto*

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \quad (k \in \mathbb{N}),$$

la serie di funzioni così definita:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L}$$

converge puntualmente ad una funzione $u(t, x)$ di classe C^2 che risolve il problema (4.3.1).

Le ipotesi su g e h agli estremi dell'intervallo $[0, L]$ costituiscono le cosiddette *condizioni di compatibilità* e sono analoghe a quelle incontrate sulla condizione iniziale per il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore. Allo stesso modo, le ipotesi di regolarità su g e h servono a garantire (anche) la corretta convergenza puntuale della funzione somma della serie $u(t, x)$ e della sua derivata $u_t(t, x)$ per $t \rightarrow 0$. Anche in questo caso valgono considerazioni simili a quelle già discusse nel caso dell'equazione del calore.

Osservazione 4.3.2. (Interpretazione fisica) *Il problema di Cauchy-Dirichlet (4.3.1) può essere utilizzato come modello matematico per descrivere la propagazione di un'onda sonora emessa da una corda vibrante fissata a due estremi a partire da una certa condizione iniziale definita mediante le funzioni g e h . La propagazione dell'onda sonora è rappresentata dalla funzione*

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t, x) \quad \text{dove} \quad u_k(t, x) = \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Per ogni intero positivo k la funzione u_k si chiama armonica k -esima e rappresenta un modo di vibrazione della corda. Possiamo riscrivere u_k nella forma seguente:

$$u_k(t, x) = c_k \sin \left(\frac{k\pi t}{L} + \varphi_k \right) \sin \frac{k\pi x}{L}$$

dove c_k e φ_k sono costanti esprimibili in termini di a_k e b_k . Rispetto a questa scrittura, possiamo interpretare u_k come un'onda sonora dalle seguenti caratteristiche:

- ampiezza = $|c_k \sin \frac{k\pi t}{L}|$,
- fase = φ_k ,
- altezza del suono = frequenza di oscillazione = $\frac{k\pi x}{L}$,
- intensità = $|c_k|$.

Il suono descritto dalla soluzione $u(t, x)$ è ottenuto come sovrapposizione delle infinite armoniche $u_k(t, x)$ e il suo timbro è determinato dalla struttura dell'insieme delle ampiezze.

Esercizio 4.3.3. Trovare una soluzione $u(t, x)$ del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \pi) \\ u(t, 0) = 0 = u(t, \pi) & \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = \sin x & \text{per ogni } x \in [0, \pi]. \\ u_t(0, x) = \sin 2x & \text{per ogni } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

[Risposta: $u(t, x) = (\cos t)(\sin x) + \frac{1}{2}(\sin 2t)(\sin 2x)$.]

4.4 Equazione delle onde in dimensione 3

Siamo ora interessati a studiare il problema di Cauchy associato all'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $n > 1$ qualunque su tutto \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0, x) = h(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.4.1)$$

dove $u = u(t, x)$ è l'incognita, definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e le funzioni g e h sono assegnate. Seguiremo il **metodo delle medie sferiche** che permette di trasformare il problema (4.4.1) in $(n + 1)$ variabili, in un problema di Cauchy associato ad un'equazione iperbolica in due variabili. La risoluzione di quest'ultimo problema è più facile quando $n = 3$. Qui ci limiteremo a discutere solo questa situazione.

Equazione di Eulero-Poisson-Darboux

Supponiamo di avere una soluzione $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ del problema (4.4.1). Per $x \in \mathbb{R}^3$ fissato, poniamo

$$U(t, r) = \oint_{S_r(x)} u(t, y) d\sigma_y \quad \forall t \in \mathbb{R}, r > 0$$

dove

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - x| = r\}.$$

Notiamo che se conosciamo $U(t, r)$, possiamo recuperare $u(t, x)$ prendendo il limite di $U(t, r)$ per $r \rightarrow 0$. Vogliamo ora costruire un'equazione differenziale per U . Iniziamo ad osservare che

$$U_{tt}(t, r) = \oint_{S_r(x)} u_{tt}(t, y) d\sigma_y.$$

Per derivare rispetto a r conviene scrivere esplicitamente la media ed effettuare il cambio di variabile $y = x + rz$; così facendo, otteniamo che

$$U(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} u(t, x + rz) d\sigma_z.$$

Tale formula è più utile anche perché ci permette di estendere U per ogni r di qualsiasi segno. Deriviamo ora rispetto a r :

$$\begin{aligned} U_r(t, r) &= \oint_{S_1(0)} \nabla u(t, x + rz) \cdot z d\sigma_z && (\partial_r(u(t, x + rz)) = \nabla u(t, x + rz) \cdot z) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_1(0)} \operatorname{div}_z [\nabla u(t, x + rz)] dz && \text{(per il teorema della divergenza)} \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_{B_1(0)} \Delta u(t, x + rz) dz \\ &= \frac{r}{4\pi} \int_{B_1(0)} u_{tt}(t, x + rz) dz && \text{(perché } u \text{ risolve } u_{tt} = \Delta u) \\ &= \frac{r^{-2}}{4\pi} \int_{B_r(x)} u_{tt}(t, y) dy && \text{(sostituzione } z \mapsto y = x + rz) \\ &= r^{-2} \int_0^r \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_s(x)} u_{tt}(t, y) d\sigma_y \right) ds. \end{aligned}$$

Dunque

$$r^2 U_r(t, r) = \int_0^r \left(s^2 \oint_{S_s(x)} u_{tt}(t, y) d\sigma_y \right) ds = \int_0^r s^2 U_{tt}(t, s) ds$$

e derivando ancora rispetto a r troviamo

$$2r U_r(t, r) + r^2 U_{rr}(t, r) = r^2 U_{tt}(t, r).$$

In conclusione, se u risolve l'equazione delle onde, allora U verifica l'equazione

$$rU_{tt} - 2U_r - rU_{rr} = 0.$$

nota come **equazione di Eulero-Poisson-Darboux**. Se poniamo

$$\tilde{U}(t, r) = rU(t, r),$$

abbiamo che

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt}, \quad \tilde{U}_r = U + rU_r, \quad \tilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}.$$

Quindi l'equazione per \tilde{U} risulta

$$\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0$$

cioè l'equazione delle onde in dimensione 1. Dobbiamo ora individuare le condizioni iniziali per \tilde{U} , che costruiamo a partire dalle condizioni iniziali per u . Supponiamo $g, h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e poniamo

$$G(r) = \int_{S_r(x)} g(y) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} g(x + rz) d\sigma_z$$

$$H(r) = \int_{S_r(x)} h(y) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} h(x + rz) d\sigma_z.$$

Osserviamo che

- (i) l'espressione fornita dal secondo integrale nelle due formule permette di definire G e H per ogni $r \in \mathbb{R}$,
- (ii) in base a tale espressione G e H risultano funzioni pari,
- (iii) le funzioni G e H hanno la stessa regolarità di g e h , rispettivamente.

Dato che $u(0, x) = g(x)$ e $u_t(0, x) = h(x)$, si ha che

$$\tilde{U}(0, r) = rG(r) =: \tilde{G}(r) \quad \text{e} \quad \tilde{U}_t(0, r) = rH(r) =: \tilde{H}(r).$$

Dalla formula di d'Alembert otteniamo quindi che

$$\tilde{U}(t, r) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)) + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds$$

e, di conseguenza,

$$U(t, r) = \frac{\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds.$$

Infine calcoliamo

$$u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} U(t, r) = \underbrace{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)}{2r}}_{L_1} + \underbrace{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds}_{L_2}.$$

Per calcolare L_1 osserviamo che, essendo \tilde{G} è dispari,

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)) = \tilde{G}(t) + \tilde{G}(-t) = 0$$

e quindi possiamo usare la regola di de l'Hôpital, per cui

$$L_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{G}'(r+t) + \tilde{G}'(r-t)}{2} = \frac{\tilde{G}'(t) + \tilde{G}'(-t)}{2} = \tilde{G}'(t).$$

Allo stesso modo, siccome \tilde{H} è dispari, si ha che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds = \int_{-t}^t \tilde{H}(s) ds = 0$$

e quindi possiamo valutare L_2 ancora usando la regola di de l'Hôpital. Conviene scrivere cosicché

$$\begin{aligned} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds &= \int_{r-t}^0 \tilde{H}(s) ds + \int_0^{r+t} \tilde{H}(s) ds \\ &= - \int_t^r \tilde{H}(s-t) ds + \int_{-t}^r \tilde{H}(s+t) ds \\ \frac{d}{dr} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds &= -\tilde{H}(r-t) + \tilde{H}(r+t) \end{aligned}$$

e dunque, essendo \tilde{H} una funzione dispari,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s) ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\tilde{H}(r-t) + \tilde{H}(r+t)}{2} \\ &= \frac{-\tilde{H}(-t) + \tilde{H}(t)}{2} = \tilde{H}(t). \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato che

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \\ &= G(t) + tG'(t) - tH(t) \\ &= \int_{S_t(x)} g(y) d\sigma_y + t \frac{d}{dt} \left(\int_{S_t(x)} g(y) d\sigma_y \right) + t \int_{S_t(x)} h(y) d\sigma_y; \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

osserviamo che, essendo u di classe \mathcal{C}^2 , anche \tilde{G}' e \tilde{H} devono esserlo, quindi g ed h saranno di classe \mathcal{C}^3 e \mathcal{C}^2 rispettivamente.

Essendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{S_t(x)} g(y) d\sigma_y \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} g(x+tz) d\sigma_z \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} \nabla g(x+tz) \cdot z d\sigma_z \\ &= \frac{1}{t} \int_{S_t(x)} \nabla g(y) \cdot (y-x) d\sigma_y \end{aligned}$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{S_t(x)} g(y) d\sigma_y + \int_{S_t(x)} \nabla g(y) \cdot (y - x) d\sigma_y + t \int_{S_t(x)} h(y) d\sigma_y \\ &= \int_{S_t(x)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Tale espressione per $u(t, x)$ si chiama **formula di Kirchhoff**. Abbiamo così provato il seguente risultato:

Teorema 4.4.1. *Date due funzioni $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, se $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 che risolve il problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(0, x) = h(x) & \forall x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (4.4.3)$$

allora u è data dalla formula di Kirchhoff.

Viceversa, si può provare che, sotto le stesse ipotesi su g e h , la funzione $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita mediante la formula di Kirchhoff è di classe C^2 e risolve il problema (4.4.3).

Osservazione 4.4.2. *Notiamo come la soluzione u di (4.4.3) risulti essere meno regolare dei dati iniziali. Inoltre il valore di u nel punto (t, x) dipende unicamente dai valori di g ed h sulla superficie sferica $S_t(x)$ (che prende il nome di dominio di dipendenza del punto (t, x)).*

Nel caso in cui $\text{dom}g = \text{dom}h = D$ sia un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^3 allora

$$u(t, x) = 0 \text{ se } t < d_{\min} = \min_{y \in D} |x - y| \vee t > d_{\max} = \max_{y \in D} |x - y|$$

mentre il valore di $u(t, x)$ viene influenzato dal dato iniziale quando $t \in (d_{\min}, d_{\max})$.

Se in particolare D si riduce ad un punto, ξ (sorgente puntiforme di segnale) allora $u(t, x)$ viene influenzato dal dato iniziale se e solo se $t = |x - \xi|$. Il segnale si propaga quindi su superfici sferiche centrate nella sorgente puntiforme ξ (Principio di Kirchhoff).

4.5 Equazione delle onde in dimensione 2

Ci proponiamo ora di studiare il problema di Cauchy associato all'equazione delle onde (4.4.1) in dimensione $n = 2$. Utilizzeremo il *metodo della discesa* di Hadamard, ovvero immergeremo il problema bidimensionale in uno tridimensionale e otterremo una soluzione per l'equazione delle onde in \mathbb{R}^2 sfruttando la formula di Kirchhoff.

Supponiamo di avere una soluzione $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ del problema (4.4.1) con $n = 2$. Allora possiamo aggiungere una terza variabile fittizia per ottenere che la funzione

$$\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3) := u(t, x_1, x_2)$$

sia soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = \bar{g}(x) & \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(0, x) = \bar{h}(x) & \forall x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

dove

$$\bar{g}(t, x_1, x_2, x_3) := g(t, x_1, x_2) \quad \text{e} \quad \bar{h}(t, x_1, x_2, x_3) := h(t, x_1, x_2).$$

Sfruttando l'espressione per la soluzione del problema tridimensionale (4.4.2) otteniamo, per ogni $x \in \mathbb{R}^2$,

$$u(t, x) = \bar{u}(t, \bar{x}) = \frac{d}{dt} t \left(\int_{S_t(\bar{x})} \bar{g}(y) d\sigma_y \right) + t \int_{S_t(\bar{x})} \bar{h}(y) d\sigma_y,$$

dove $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) = (x, 0) \in \mathbb{R}^3$. Per far scomparire la terza dimensione al secondo membro osserviamo che $S_t(\bar{x})$ è l'unione di due emisferi di equazione

$$y_3 = F(y_1, y_2) = x_3 \pm \sqrt{t^2 - r^2}, \quad r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$

quindi gli integrali di superficie presenti nell'espressione di u possono essere interpretati come somma di due integrali su superfici cartesiane, ovvero di integrali bidimensionali. Essendo

$$d\sigma_y = \sqrt{1 + |\nabla F|^2} dy_1 dy_2 \quad \text{e} \quad \sqrt{1 + |\nabla F|^2} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{t^2 - r^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{S_t(\bar{x})} \bar{g}(y) d\sigma_y &= \frac{1}{4\pi t^2} 2 \int_{B_t(x)} g(y) \sqrt{1 + |\nabla F|^2} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{t}{2} \int_{B_t(x)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

dove $B_t(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq t^2\}$. Sostituendo nell'espressione di u si ricava la **formula di Poisson**

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(t^2 \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy,$$

dove r è la distanza tra il centro della palla $B_t(x)$ e il punto y . Rimaneggiamo ora la formula di Poisson in modo da trovare un'espressione più significativa,

in particolare ci proponiamo di scrivere la soluzione come un unico integrale, come per il caso tridimensionale. Ancora una volta, per svolgere la derivazione rispetto alla variabile t , è opportuno fare il cambiamento di variabili

$$y = x + tz, \quad dy = t^2 dz, \quad r^2 = t^2 |z|^2$$

in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(t^2 \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{\pi t^2} \int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{t\sqrt{1 - |z|^2}} t^2 dz \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(t \int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) \\ &= \int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz + t \int_{B_1(0)} \frac{\nabla g(x + tz)z}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \\ &= t \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy + t \int_{B_t(x)} \frac{\nabla g(y)(x - y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy. \end{aligned}$$

Dalla formula di Poisson ricaviamo quindi

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t\nabla g(y)(x - y) + t^2 h(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} dy.$$

Osservazione 4.5.1. *Il valore di u nel punto x all'istante t dipende quindi da quelli di g , ∇g e h in tutto il cerchio di raggio t centrato in x . Ad esempio se il domini di g ed h si riducono ad un unico punto, ξ , allora l'effetto di questo segnale si fa sentire nel punto x a partire dal tempo $t_{\min} = |x - \xi|$. A differenza del caso tridimensionale, l'effetto di questo segnale continua ad esserci quando $t > t_{\min}$ poiché $\xi \in B_t(x)$ per ogni $t > t_{\min}$.*