

Paolo Caldirolì

Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino

Lezioni di Equazioni differenziali

Prima parte: funzioni armoniche ed equazione di Poisson

(versione: marzo 2014)

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Gradiente, divergenza, laplaciano	5
1.2	Richiami utili	6
1.3	Problema generale dell'elettrostatica	8
1.4	Superfici minimali non parametriche	9
1.5	Esercizi	14
2	Funzioni armoniche	16
2.1	Definizione ed esempi elementari	16
2.2	Funzioni armoniche e funzioni olomorfe	17
2.3	Integrazione su sfere	20
2.4	Media superficiale e media volumetrica	23
2.5	Proprietà della media	25
2.6	Regolarità delle funzioni armoniche	26
2.7	Teorema di Liouville	28
2.8	Funzioni subarmoniche e principio del massimo	29
2.9	Esercizi	31
3	Equazione di Poisson	33
3.1	Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace	33
3.2	Identità di Stokes	36
3.3	Interpretazione fisica dell'identità di Stokes	38
3.4	Equazione di Poisson su \mathbb{R}^n con dato C_c^2	41
3.5	Equazione di Poisson su dominio limitato con dato C^2	43
3.6	Equazione di Poisson con dato lipschitziano	45
3.7	Esercizi	50
4	Problema di Dirichlet per il laplaciano	51
4.1	Risultati preliminari sul problema di Dirichlet	52
4.2	Estensioni armoniche sul disco bidimensionale	52
4.3	Funzione di Green per il problema di Dirichlet su un dominio limitato	64
4.4	Calcolo della funzione di Green per la palla unitaria	65
4.5	La formula di Poisson sulla palla unitaria	68
4.6	Principio di Dirichlet	70
4.7	Esercizi	72

Notazioni

x_i	i -esima componente di $x \in \mathbb{R}^n$
e_i	i -esimo vettore della base standard di \mathbb{R}^n
$x \cdot y$	prodotto scalare tra x e y , elementi di \mathbb{R}^n : $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$
$ x $	modulo o norma di $x \in \mathbb{R}^n$: $ x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
δ_{ij}	simbolo di Kronecker: $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$
$f_{x_i}, \partial_{x_i} f$	derivata parziale i -esima di una funzione f
∇f	gradiente di f : $\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$
$f_{x_i x_j}$	derivata parziale del secondo ordine di f rispetto a x_i e x_j
Δf	laplaciano di f : $\Delta f = f_{x_1 x_1} + \dots + f_{x_n x_n}$
Ω	aperto non vuoto di \mathbb{R}^n
$\overline{\Omega}$	chiusura di Ω
$\partial\Omega$	frontiera di Ω
$B_r(x)$	palla aperta di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$: $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y - x < r\}$
$\overline{B_r(x)}$	palla chiusa di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$: $\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y - x \leq r\}$
$\partial B_r(x)$	sfera di centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$: $\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y - x = r\}$
B_r	palla aperta centrata nell'origine e di raggio $r > 0$: $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x < r\}$
\mathbb{B}^n	palla unitaria di \mathbb{R}^n , cioè $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x < 1\}$
ω_n	volume n -dimensionale di \mathbb{B}^n : $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ dove Γ è la funzione Gamma di Eulero

$ B_r(x) $	volume n -dimensionale di $B_r(x)$: $ B_r(x) = r^n \omega_n$
$ \partial B_r(x) $	area $(n-1)$ -dimensionale di $\partial B_r(x)$: $ \partial B_r(x) = nr^{n-1} \omega_n$
$A \subset\subset \Omega$	A è ben contenuto in Ω , cioè $\bar{A} \subset \Omega$ e \bar{A} è compatto
$C(E)$	spazio delle funzioni continue da un sottoinsieme non vuoto E di \mathbb{R}^n a valori reali; E sarà Ω o $\bar{\Omega}$ o $\partial\Omega$
$C(E, \mathbb{R}^n)$	spazio delle funzioni continue da un sottoinsieme non vuoto E di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R}^n , cioè $C(E, \mathbb{R}^n) = (C(E))^n$
$\ f\ $	norma dell'estremo superiore di f , cioè $\ f\ = \sup_{x \in E} f(x) $ dove $E = \text{dominio di } f$
$\text{supp } f$	supporto di f , definito come la chiusura dell'insieme $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$ dove $E = \text{dominio di } f$
$C^k(\Omega)$	spazio delle funzioni da Ω in \mathbb{R} che ammettono tutte le derivate parziali fino all'ordine k in $C(\Omega)$, k intero positivo fissato
$C^k(\bar{\Omega})$	spazio delle funzioni in $C^k(\Omega)$ le cui derivate parziali fino all'ordine k ammettono estensione continua in $\bar{\Omega}$
$C_c^k(\Omega)$	spazio delle funzioni $f \in C^k(\Omega)$ con $\text{supp } f$ compatto
$C^\infty(\Omega)$	spazio delle funzioni da Ω in \mathbb{R} che ammettono tutte le derivate parziali di tutti gli ordini
$C_c^\infty(\Omega)$	spazio delle funzioni $f \in C^\infty(\Omega)$ con $\text{supp } f$ compatto
$\int_{\Omega} f(x) dx$	integrale n -dimensionale di f in Ω
$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma_x$	integrale di superficie di f su $\partial\Omega$
$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$	flusso del campo $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ attraverso $\partial\Omega$; $\nu = \nu(x)$ è il versore normale a $\partial\Omega$ in $x \in \partial\Omega$ rivolto verso l'esterno di Ω
$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma$	flusso del gradiente di f attraverso $\partial\Omega$; $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$ è la derivata normale di f in un generico punto di $\partial\Omega$

1 Introduzione

Le equazioni alle derivate parziali sono equazioni la cui incognita è una funzione di più variabili e la cui formulazione è data da una relazione di tipo funzionale tra l'incognita e le sue derivate parziali. Considerando per semplicità il caso di due sole variabili indipendenti, la generica equazione alle derivate parziali del primo ordine si scrive così:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.1)$$

dove x e y denotano le variabili indipendenti, Ω è un aperto non vuoto di \mathbb{R}^2 in cui viene presa la coppia (x, y) , u è l'incognita, funzione di x e y , e u_x e u_y sono le sue derivate parziali rispetto a x e a y , rispettivamente. La funzione F , definita in $\Omega \times \mathbb{R}^3$, è assegnata. L'equazione (1.1) si dice del prim'ordine perché coinvolge solo le derivate parziali del prim'ordine di u .

In generale un'equazione alle derivate parziali si dice di ordine k se k è il massimo ordine di derivazione della funzione incognita. Ad esempio, limitandoci sempre al caso di due variabili indipendenti, la generica equazione alle derivate parziali del secondo ordine è

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.2)$$

dove il significato dei vari simboli è del tutto analogo a quello visto in precedenza. La differenza rispetto al caso incontrato prima è che in (1.2) compaiono anche le derivate parziali del secondo ordine u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} (non è detto che siano coinvolte tutte).

Le equazioni alle derivate parziali sono strumenti forniti dalla matematica per modellizzare problemi delle scienze applicate, *in primis* della fisica, o problemi di natura geometrica e quindi, per così dire, "interni" alla matematica stessa.

In queste note ci concentriamo principalmente sull'equazione di Poisson:

$$u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n} = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{in } \Omega. \quad (1.3)$$

Qui Ω è un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , la variabile indipendente è la n -upla (x_1, \dots, x_n) che va presa in Ω , l'incognita è la funzione $u = u(x_1, \dots, x_n)$ che va richiesta (almeno) due volte derivabile in Ω , mentre la funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che compare a secondo membro è assegnata come dato del problema. Se $f = 0$ l'equazione (1.3) si dice equazione di Laplace.

L'equazione (1.3) si presenta sia in fisica sia in geometria. Al fine di motivarne lo studio, inizieremo col presentare alcuni problemi di fisica e di geometria che la generano. Prima di ciò, conviene precisare alcune notazioni ed introdurre i principali operatori differenziali coinvolti.

1.1 Gradiente, divergenza, laplaciano

Dati un aperto non vuoto Ω di \mathbb{R}^n , una funzione continua $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, in breve $f \in C(\Omega)$, e un punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ indichiamo $f_{x_i}(x)$ o anche $\partial_{x_i} f(x)$ la derivata parziale i -esima di f in x , quando tale derivata esista. Denotiamo $\nabla f(x)$ il *gradiente di f in x* , cioè il vettore

$$\nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)).$$

Diciamo che una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 in Ω , e scriviamo $f \in C^1(\Omega)$, se esistono in ogni punto $x \in \Omega$ tutte le derivate parziali $f_{x_i}(x)$ ($i = 1, \dots, n$), e le funzioni $x \mapsto f_{x_i}(x)$ sono continue in Ω . Notiamo che se $f \in C^1(\Omega)$ allora $f \in C(\Omega)$ e $\nabla f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Scrivendo

$f \in C^1(\overline{\Omega})$ intendiamo che $f \in C^1(\Omega)$ e che f e tutte le sue derivate parziali f_{x_i} ammettono estensione continua su $\overline{\Omega}$.

Data una funzione vettoriale $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, di componenti F_1, \dots, F_n , e un punto $x \in \Omega$, indichiamo $\operatorname{div} F(x)$ la *divergenza di F in x* , cioè il numero

$$\operatorname{div} F(x) = \partial_{x_1} F_1(x) + \dots + \partial_{x_n} F_n(x).$$

Questa posizione richiede l'esistenza delle derivate parziali $\partial_{x_i} F_i(x)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Data una funzione $f \in C^1(\Omega)$, per ogni $x \in \Omega$ poniamo

$$F(x) = \nabla f(x).$$

Osserviamo che la componente i -esima di F è $F_i = f_{x_i}$. Se in punto $x \in \Omega$ esistono le derivate parziali $\partial_{x_i} F_i(x)$ per ogni $i = 1, \dots, n$, possiamo calcolare la divergenza di F in x e, siccome $\partial_{x_i} F_i(x) = \partial_{x_i} f_{x_i}(x) = f_{x_i x_i}(x)$, troviamo che

$$\operatorname{div} [\nabla f](x) = f_{x_1 x_1}(x) + \dots + f_{x_n x_n}(x).$$

L'espressione così ottenuta si chiama *laplaciano di f in x* e si denota $\Delta f(x)$.

Il gradiente, la divergenza e il laplaciano sono esempi di *operatori differenziali* cioè applicazioni tra spazi di funzioni, costruite mediante derivate parziali.

In particolare il gradiente è un operatore differenziale dallo spazio $C^1(\Omega)$ nello spazio $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, la divergenza trasforma funzioni dello spazio

$$C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid F_i \in C^1(\Omega) \forall i = 1, \dots, n\}$$

in funzioni che stanno in $C(\Omega)$. Il laplaciano è un operatore differenziale da

$$C^2(\Omega) = \{f \in C^1(\Omega) \mid f_{x_i} \in C^1(\Omega) \forall i = 1, \dots, n\}$$

in $C(\Omega)$. Il gradiente e la divergenza sono operatori del primo ordine perché coinvolgono solo derivate parziali del primo ordine, mentre il laplaciano è un operatore differenziale del secondo ordine.

1.2 Richiami utili

Domini regolari

Per *dominio in \mathbb{R}^n* intendiamo un sottoinsieme di \mathbb{R}^n aperto, non vuoto e connesso. Un dominio Ω si dice *di classe C^k* (con $k \in \mathbb{N}$) se ogni punto $x \in \partial\Omega$ ammette un intorno N tale che, a meno di rotazioni, $N \cap \partial\Omega$ sia grafico di una funzione di classe C^k e $N \cap \Omega$ sia il suo sottografico.

Con l'espressione *dominio regolare* intendiamo un dominio di classe C^1 . Se Ω è un dominio regolare, esiste una funzione continua $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ che associa ad ogni punto $x \in \partial\Omega$ la normale esterna $\nu(x)$ a Ω in x dove per normale esterna a Ω in x si intende un vettore di norma unitaria, ortogonale al piano tangente a Ω nel punto x e rivolto verso l'esterno di Ω , cioè tale che $x + \varepsilon\nu(x) \notin \Omega$ per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.

Esempio 1.1 Se Ω è la palla n -dimensionale centrata nell'origine e di raggio R , la sua frontiera è $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\}$ e per ogni $x \in \partial\Omega$ la normale esterna è $\nu(x) = \frac{x}{R}$.

Consideriamo un aperto regolare Ω . Allora per ogni fissato $\bar{x} \in \partial\Omega$ esiste un intorno N di \bar{x} tale che l'insieme $\Omega \cap N$ risulta rappresentabile, a meno di rotazioni, come sottografico di una certa funzione di classe C^1 . Più precisamente, supponiamo che esistano un dominio $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ed una funzione $\varphi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$\begin{aligned}\Omega \cap N &= \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \Omega', x_n < \varphi(x')\} \cap N \\ \partial\Omega \cap N &= \{(x', \varphi(x')) \mid x' \in \Omega'\}\end{aligned}$$

dove $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Allora la normale esterna ad Ω in ogni punto $x \in \partial\Omega \cap N$ risulta essere

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla\varphi(x'), 1)}{\sqrt{|\nabla\varphi(x')|^2 + 1}} \quad \text{essendo } x = (x', \varphi(x')).$$

Data una funzione $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, per ogni $x \in \partial\Omega$ fissato, si definisce **derivata normale di u in x** il numero

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x + t\nu(x)) - u(x)}{t}$$

purché tale limite esista finito, essendo $\nu(x)$ il versore normale a $\partial\Omega$ in x rivolto verso l'esterno. Se la funzione u è definita e di classe C^1 in un intorno di un fissato punto $x \in \partial\Omega$ allora

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x).$$

Integrazione su superfici

Teorema 1.2 *Sia S una superficie in \mathbb{R}^n rappresentabile come grafico di una funzione regolare cioè*

$$S = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \bar{\Omega}\},$$

dove Ω è un dominio di \mathbb{R}^{n-1} e $\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Sia $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'integrale superficiale $\int_S f \, d\sigma$ può essere calcolato mediante la formula:

$$\int_S f \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x, \varphi(x)) J(x) \, dx \quad \text{dove } J(x) = \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x)|^2}. \quad (1.4)$$

Inoltre

$$\text{area}(S) = \int_{\Omega} J(x) \, dx$$

dove per "area" si intende la misura $(n-1)$ -dimensionale.

Esempio 1.3 *Utilizziamo il teorema 1.2 per calcolare l'area della sfera bidimensionale S . Siamo nel caso $n = 3$. La superficie S non è rappresentabile come grafico di alcuna funzione di due variabili. Possiamo però considerare la semisfera S_+ , che si rappresenta come grafico:*

$$S_+ = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \bar{B}\} \quad \text{dove } B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\} \text{ e } \varphi(x) = \sqrt{1 - |x|^2}.$$

Quindi possiamo calcolare $\text{area}(S) = 2 \text{area}(S_+)$ e

$$\text{area}(S_+) = \int_B J(x) \, dx.$$

Nel caso in considerazione

$$J(x) = \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x)|^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}$$

e quindi, in coordinate polari,

$$\int_B J(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr \right) d\theta = 2\pi.$$

In conclusione $\text{area}(S) = 4\pi$.

Teorema della divergenza

Teorema 1.4 Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^n limitato e regolare e sia $G \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Allora

$$\int_{\Omega} \text{div } G(x) dx = \int_{\partial\Omega} G \cdot \nu d\sigma$$

dove ν denota la normale esterna in ogni punto di $\partial\Omega$.

Osserviamo che la condizione di regolarità di Ω garantisce la buona definizione e la continuità della funzione che ad ogni punto x della frontiera di Ω associa la normale esterna $\nu(x)$.

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale

Teorema 1.5 Siano Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $f(t, x)$ una funzione continua da $I \times \overline{\Omega}$ a valori reali. Se f ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial t}$ continua in $I \times \overline{\Omega}$ allora la funzione

$$F(t) = \int_{\Omega} f(t, x) dx$$

è derivabile in I e

$$F'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx \quad \text{per ogni } t \in I.$$

1.3 Problema generale dell'elettrostatica

È noto che se in un punto x_0 dello spazio tridimensionale è presente una carica puntiforme di intensità q , il potenziale elettrostatico da essa generato è dato da

$$V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x - x_0|} \quad (x \in \mathbb{R}^3, x \neq x_0)$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto. Se in una regione Ω di \mathbb{R}^3 è presente una distribuzione di carica elettrica di densità $\rho(x)$, in condizioni stazionarie il potenziale elettrostatico da essa generato è dato da

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

Dimostreremo in seguito che se la funzione $\rho(x)$ è lipschitziana in Ω allora U è di classe C^2 in Ω e soddisfa l'equazione di Poisson

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{in } \Omega.$$

La stessa equazione descrive il potenziale gravitazionale indotto da una distribuzione di massa ρ in condizioni stazionarie.

Il modello matematico è incompleto se non si prescrive un'ulteriore condizione su u al bordo della regione Ω . Generalmente si considera una di queste condizioni:

$$\begin{aligned} u &= g \quad \text{su } \partial\Omega && \text{(condizione di Dirichlet)} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{su } \partial\Omega && \text{(condizione di Neumann)} \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{su } \partial\Omega && \text{(condizione di Robin, o condizione mista)} \end{aligned}$$

dove g è una fissata funzione reale definita su $\partial\Omega$. Nella condizione di Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ denota la derivata normale di u in un generico punto di $\partial\Omega$. Nella condizione di Robin α e β sono funzioni assegnate, da $\partial\Omega$ in \mathbb{R} , tali che $|\alpha| + |\beta| > 0$ in $\partial\Omega$. Tale condizione permette di considerare situazioni in cui in una parte della frontiera di Ω si fissa il valore di u e nella parte restante si assegna il valore della derivata normale di u .

Il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equazione differenziale in un dato dominio } \Omega \\ \text{condizione al bordo di } \Omega \end{array} \right.$$

si dice problema di Dirichlet/Neumann/Robin a seconda del tipo di condizione al contorno considerata.

1.4 Superfici minimali non parametriche

Prendiamo un filo metallico precedentemente modellato a formare una curva chiusa, immergiamolo in una soluzione saponosa ed estraiamolo avendo cura che si formi una lamina di liquido racchiusa dal filo. Ci chiediamo quale sia la forma della pellicola di soluzione saponosa.

Il problema può essere formulato matematicamente in questo modo. Supponiamo che la superficie possa essere descritta come grafico di una certa funzione reale $u(x_1, x_2)$ definita sulla chiusura di un certo aperto limitato Ω di \mathbb{R}^2 . La superficie è quindi l'insieme

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, x_3 = u(x_1, x_2)\}.$$

Se u è sufficientemente regolare, l'area di S è data da

$$I(u) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1} \, dx$$

essendo $x = (x_1, x_2)$, $dx = dx_1 dx_2$. Dato che $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$, si ha che $|\nabla u|^2 = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2$. La forma del filo metallico è definita da una curva chiusa γ individuabile anch'essa come grafico di una data funzione $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, cioè

$$\gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \partial\Omega, x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

Dunque la funzione u il cui grafico definisce la superficie S soddisfa la condizione al bordo

$$u = f \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Per ragioni fisiche e come osservato già da Joseph-Louis Lagrange nel 1760, la superficie S descritta dalla lamina di liquido che si forma sul profilo metallico è quella di area minima tra tutte le superfici appoggiate sulla curva γ . Dunque, detto

$$\mathcal{A} = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = f\}$$

l'insieme delle funzioni ammissibili, si ha che

$$I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}. \quad (1.5)$$

Fatte queste premesse, il nostro obiettivo è provare il seguente risultato:

Teorema 1.6 *Dati un dominio regolare Ω in \mathbb{R}^2 e una funzione $f \in C(\partial\Omega)$, se $u \in C^1(\bar{\Omega})$ è un minimo per il funzionale dell'area nella classe \mathcal{A} delle funzioni ammissibili e se $u \in C^2(\Omega)$, allora u soddisfa l'equazione*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.6)$$

In particolare la superficie S definita come grafico di u ha curvatura media nulla in ogni punto.

Dimostrazione. Fissiamo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Estendendo φ a zero fuori da Ω , possiamo supporre $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. Osserviamo che, essendo il supporto di φ compatto e contenuto in Ω ,

$$u + t\varphi \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Infatti la funzione $x \mapsto u(x) + t\varphi(x)$ sta in $C^1(\bar{\Omega})$ e $(u + t\varphi)|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = f$. Allora da (1.5) segue che

$$I(u) \leq I(u + t\varphi) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Proviamo ora il seguente risultato.

Lemma 1.7 *La funzione*

$$F(t) = I(u + t\varphi) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R})$$

è derivabile. In particolare

$$F'(t) = \int_{\Omega} \frac{t|\nabla\varphi(x)|^2 + \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)}{\sqrt{|\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)|^2 + 1}} dx.$$

Dimostrazione. Ci serviamo del teorema 1.5 di derivazione sotto il segno di integrale. Siamo nel caso

$$F(t) = \int_{\Omega} f(t, x) dx \quad \text{con} \quad f(t, x) = \sqrt{|\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)|^2 + 1}.$$

Siccome $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, la funzione f è continua in $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$. Inoltre è derivabile rispetto a t e

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{t|\nabla\varphi(x)|^2 + \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)}{\sqrt{|\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)|^2 + 1}}.$$

Evidentemente anche la funzione $\frac{\partial f}{\partial t}$ è continua in $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ e quindi si può applicare il teorema 1.5 e concludere. \square

Riprendiamo la dimostrazione del teorema 1.6. La condizione (1.7) si scrive in termini di F nella forma

$$F(0) \leq F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In base al lemma 1.7, la funzione F è derivabile. Quindi per il teorema di Fermat $F'(0) = 0$ cioè

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x)}{\sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1}} dx = 0. \quad (1.8)$$

A questo punto applichiamo il teorema della divergenza prendendo

$$G(x) = \frac{\varphi(x)\nabla u(x)}{\sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1}}.$$

Tale scelta è ammissibile per le ipotesi di regolarità fatte su u e perché $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Infatti, anche se $u \in C^2(\Omega)$, risulta $G \in C^1(\bar{\Omega})$ perché $\nabla\varphi = 0$ in un intorno di $\partial\Omega$. Vale che

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} G(x) dx = \int_{\partial\Omega} G \cdot \nu d\sigma$$

dove ν denota la normale esterna in ogni punto di $\partial\Omega$. Nel caso qui considerato

$$\operatorname{div} G = \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} + \varphi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} \right).$$

Siccome φ è una funzione a supporto compatto in Ω , si ha che $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$. Dunque $G = 0$ su $\partial\Omega$ e quindi per il teorema della divergenza e per (1.8)

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} G(x) dx = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} \right) dx.$$

Ricordiamo che φ è una fissata ma arbitraria funzione in $C_c^1(\Omega)$. La dimostrazione del teorema si completa utilizzando il seguente risultato, che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia identicamente nulla:

Lemma 1.8 *Dati un dominio Ω in \mathbb{R}^n e una funzione continua $g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, se*

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

allora $g = 0$ in Ω .

Concludiamo la dimostrazione del teorema 1.6 osservando che si può applicare il lemma precedente con

$$g(x) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1}} \right).$$

Dunque u verifica l'equazione delle superfici minimali. Dalla geometria differenziale sappiamo che, detta S la superficie definita come grafico di u , la curvatura media di S in un suo punto $p = (x, u(x))$ vale

$$\mathfrak{M}(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{|\nabla u(x)|^2 + 1}} \right).$$

Pertanto, dato che u risolve l'equazione (1.6), la superficie S ha curvatura media identicamente nulla. \square

Dimostrazione del lemma 1.8. Per assurdo, supponiamo che ci sia un punto $\bar{x} \in \Omega$ in cui $g(\bar{x}) \neq 0$. Possiamo supporre $g(\bar{x}) > 0$ (altrimenti si ragiona con la funzione $-g$). Per il teorema di permanenza del segno, esiste una palla $B_r(\bar{x})$ contenuta in Ω e tale che $g(x) > \frac{1}{2}g(\bar{x})$ per ogni $x \in B_r(\bar{x})$. È possibile costruire una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $\varphi = 1$ in $B_{\frac{r}{2}}(\bar{x})$, $\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_r(\bar{x})$ e $0 \leq \varphi \leq 1$ ovunque. Allora

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = \int_{B_r(\bar{x})} g(x)\varphi(x) dx \geq \int_{B_{\frac{r}{2}}(\bar{x})} g(x)\varphi(x) dx \geq \int_{B_{\frac{r}{2}}(\bar{x})} \frac{g(\bar{x})}{2} dx > 0$$

in contraddizione con l'ipotesi. \square

Le superfici che si rappresentano come grafici di funzioni e che in ogni punto hanno curvatura media nulla si dicono **superfici minimali**. L'equazione (1.6) si chiama **equazione delle superfici minimali in forma non parametrica**.

Qui stiamo considerando superfici bidimensionali nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 e in tal caso l'equazione (1.6) va considerata come equazione alle derivate parziali in due variabili. Formalmente non c'è nessuna differenza, se non nel numero di variabili, nel considerare l'equazione (1.6) in un dominio Ω di \mathbb{R}^n . Così facendo il problema si generalizza alle ipersuperfici n -dimensionali in \mathbb{R}^{n+1} rappresentabili come grafici di funzioni di n variabili.

Il teorema 1.6 afferma che le superfici di area minima tra quelle con bordo assegnato e rappresentabili come grafici di funzioni sono superfici minimali. Andiamo ora a provare che vale l'inverso e cioè che le superfici minimali sono minimi per l'area. Più precisamente:

Teorema 1.9 *Dati un dominio regolare Ω in \mathbb{R}^2 e una funzione $f \in C(\partial\Omega)$, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ verifica il problema*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} \right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

allora u è un minimo assoluto per il funzionale dell'area nella classe delle funzioni $v \in C^1(\bar{\Omega})$ tali che $v = f$ su $\partial\Omega$. Inoltre il problema (1.9) ammette al più una soluzione.

Sketch della dimostrazione. Fissata una funzione $v \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $v \neq u$ e $v = f$ su $\partial\Omega$, poniamo $\varphi = v - u$ e consideriamo la funzione

$$F(t) = I(u + t\varphi) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ragionando come nella dimostrazione del lemma 1.7, introduciamo la funzione

$$f(t, x) = \sqrt{|\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)|^2 + 1}$$

e osserviamo che f ammette derivate parziali di ogni ordine rispetto a t . In particolare le funzioni f_t e f_{tt} sono continue in $\mathbb{R} \times \Omega$. Da ciò, applicando due volte il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, deduciamo che F è due volte derivabile in \mathbb{R} e

$$F''(t) = \int_{\Omega} f_{tt}(t, x) dx.$$

Dal calcolo esplicito di f_{tt} e sfruttando il fatto che φ è non costante e Ω è connesso, possiamo dedurre che $f_{tt}(t, x) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in \Omega$ e che se $t \neq 0$ allora la funzione $x \mapsto f_{tt}(t, x)$ non può essere identicamente nulla. Quindi $F''(t) > 0$ per ogni $t \neq 0$. Dunque F è strettamente convessa. Essendo $F'(0) = 0$ si deduce che $F(t) > 0$ se $t \neq 0$. In particolare $F(1) > F(0)$ cioè $F(v) > F(u)$. Pertanto u è minimo assoluto. Proviamo infine l'unicità di soluzione per il problema (1.9). Se u_1 e u_2 sono soluzioni, allora sono entrambi minimi assoluti. In particolare se $u_1 \neq u_2$ allora il ragionamento precedente con $u = u_1$ e $v = u_2$ porta a concludere che $F(u_1) < F(u_2)$, in contraddizione col fatto che u_2 è minimo assoluto. \square

I teoremi 1.6 e 1.9 esprimono la sostanziale equivalenza tra superfici minimali e superfici di area minima. Tuttavia in generale tale equivalenza è valida solo nella classe delle superfici non parametriche, cioè rappresentabili come grafici. Si possono infatti costruire esempi di superfici che in ogni punto hanno curvatura media nulla ma che non minimizzano l'area nella classe delle superfici che hanno lo stesso bordo (cfr. M. Struwe, *Plateau's problem and the Calculus of Variations*, Princeton University Press (1988)).

L'equazione delle superfici minimali è nonlineare, e richiede una trattazione non elementare, al di là dai nostri obiettivi. Una sua versione semplificata si ottiene per linearizzazione nell'approssimazione $|\nabla u| \ll 1$ (ciò significa considerare superfici con pendenze piccole). Siccome

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} \right) = \frac{\Delta u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} - \frac{\langle \nabla u, D^2 u \nabla u \rangle}{(|\nabla u|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

l'equazione (1.6) si può anche scrivere nella forma

$$\Delta u + |\nabla u|^2 \Delta u - \langle \nabla u, D^2 u \nabla u \rangle = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Questa formulazione mette in maggior evidenza che l'equazione delle superfici minimali è del second'ordine.

Se supponiamo $|\nabla u| \ll 1$ e trascuriamo i termini contenenti ∇u , tale equazione si riduce all'equazione di Laplace in Ω e il problema (1.9) si approssima così nella forma seguente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dunque risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace significa trovare in approssimazione di piccole pendenze le superfici di area minima delimitate dalla curva definita come grafico del dato al bordo f .

Un'annotazione storica: il problema di Bernstein

Nel 1916 Bernstein dimostrò che le uniche superfici bidimensionali minimali rappresentabili come grafici su \mathbb{R}^2 sono i piani. Più precisamente:

Teorema 1.10 *Se $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione di classe C^∞ dell'equazione*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + 1}} \right) = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2$$

allora u è una funzione lineare affine, cioè esistono un vettore $a \in \mathbb{R}^2$ e una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $u(x) = a \cdot x + \alpha$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

Tale risultato si estende in dimensione maggiore ma non in tutte. In particolare fu dimostrato nel caso $n = 3$ da De Giorgi, per $n = 4$ da Almgren e per $n = 5, 6, 7$ da Simons. Nel 1969 Bombieri, De Giorgi e Giusti per ogni dimensione $n \geq 8$ costruirono una soluzione non lineare affine dell'equazione delle superfici minimali su \mathbb{R}^n , quindi trovarono una ipersuperficie minimale su \mathbb{R}^n diversa dagli iperpiani (cfr. E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations*, Birkhäuser (1984)).

1.5 Esercizi

1. (Laplaciano bidimensionale in coordinate polari)

Data una funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e posto

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \forall r > 0, \theta \in \mathbb{R},$$

verificare che

$$\Delta f = g_{rr} + r^{-1}g_r + r^{-2}g_{\theta\theta} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

2. Data una funzione $G: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e posto $F(x) = G(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, verificare che $\operatorname{div} F(x) = |x|^{-1}G'(|x|) \cdot x$. Inoltre, data una funzione $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 e posto $f(x) = g(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, verificare che

$$\Delta f(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} (r^{n-1}g'(r)) = g''(r) + \frac{n-1}{r}g'(r) \quad \text{dove } r = |x|.$$

3. Per ogni funzione $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , si denoti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x) := \nabla \varphi(x) \cdot \frac{x}{|x|}.$$

Preso ora una funzione $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^3 e posto $f(x) = g(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, verificare che $\frac{\partial f}{\partial r}(x) = g'(|x|)$ e calcolare $\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\partial(\Delta f)}{\partial r}$.

4. Verificare le seguenti proprietà:

(i) Date $f, g \in C^1(\Omega)$, si ha che $\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$.

(ii) Date $f \in C^1(\Omega)$ e $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, si ha che $\operatorname{div}(fF) = (\nabla f) \cdot F + f \operatorname{div} F$.

(iii) Date $f, g \in C^2(\Omega)$, si ha che $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$.

5. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, vale che

$$\partial_{x_i} |x| = \frac{x_i}{|x|}, \quad \nabla |x| = \frac{x}{|x|}. \quad (1.10)$$

Inoltre, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, provare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, si ha

$$\partial_{x_i} |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i, \quad \nabla |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-2} x, \quad \Delta |x|^\alpha = \alpha(n-2+\alpha)|x|^{\alpha-2}.$$

6. Data una funzione u di classe C^2 in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e detta

$$v(x) = u(\hat{x}) \quad \text{dove} \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

verificare che

$$\begin{aligned} \nabla v(x) &= |x|^{-2} \nabla u(\hat{x}) - 2|x|^{-4} (x \cdot \nabla u(\hat{x}))x \\ \Delta v(x) &= 2(2-n)|x|^{-4} x \cdot \nabla u(\hat{x}) + |x|^{-4} \Delta u(\hat{x}). \end{aligned}$$

Inoltre, fissata una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ e detta $w(x) = |x|^\alpha v(x)$, verificare che

$$\Delta w(x) = (n-2+\alpha)|x|^{\alpha-2} [\alpha u(\hat{x}) - 2\hat{x} \cdot \nabla u(\hat{x})] + |x|^{\alpha-4} \Delta u(\hat{x}). \quad (1.11)$$

7. Siano ∂B la frontiera della palla unitaria e $f: \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Verificare che se f è dispari allora $\int_{\partial B} f \, d\sigma = 0$.

8. Sia F campo vettoriale di classe C^1 su una palla chiusa B di \mathbb{R}^n centrata nell'origine. Provare che se F è radialmente simmetrico, cioè $F(x) = G(|x|)$ per qualche $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, allora $\int_B \operatorname{div} F(x) \, dx = 0$.

2 Funzioni armoniche

In questo capitolo studiamo una classe di funzioni di n variabili, definite in un aperto non vuoto Ω di \mathbb{R}^n , che ammettono tutte le derivate parziali fino al secondo ordine continue in Ω e soddisfano l'equazione di Laplace in Ω . Le funzioni con questa proprietà si dicono *funzioni armoniche in Ω* .

Primi esempi di funzioni armoniche saranno presentati in sezione 2.1. Quindi, nella sezione 2.2 verrà data una caratterizzazione delle funzioni armoniche di due variabili e sarà messa in evidenza la stretta relazione con le funzioni olomorfe.

Successivamente si discuteranno le funzioni armoniche di n variabili. In particolare nella sezione 2.5 si darà una caratterizzazione equivalente, espressa mediante una condizione in forma integrale che fa uso delle medie superficiale e volumetrica di una funzione. Tali nozioni saranno preliminarmente richiamate nella sezione 2.4.

A seguire, nella sezione 2.8 si presenterà il principio del massimo, che svolge un ruolo fondamentale nello studio delle equazioni ellittiche e non solo. L'ultima proprietà che vedremo sulle funzioni armoniche è la regolarità C^∞ , nella sezione 2.6. Infine si proverà un teorema di Liouville che riguarda le soluzioni limitate dell'equazione di Laplace su tutto lo spazio (sezione 2.7).

2.1 Definizione ed esempi elementari

Definizione 2.1 Una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice armonica in Ω se $u \in C^2(\Omega)$ e soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω .

Osservazione 2.2 (Principio di sovrapposizione) L'equazione di Laplace è lineare, cioè se u e v sono soluzioni di $\Delta u = 0$ in Ω , anche $\alpha u + \beta v$ lo è per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ne consegue che la famiglia delle funzioni armoniche in un fissato aperto non vuoto di \mathbb{R}^n costituisce uno spazio vettoriale. Notiamo inoltre che, per la linearità, se u è una funzione armonica in Ω , anche $u + c$ lo è per ogni $c \in \mathbb{R}$ (invarianza dell'equazione di Laplace per traslazione sull'immagine) e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λu è armonica in Ω (invarianza per dilatazione sull'immagine).

Sono funzioni armoniche in \mathbb{R}^n le funzioni lineari $u(x) = a \cdot x + b$, dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$. In dimensione 1 le funzioni lineari sono tutte e sole le funzioni armoniche in un dato intervallo. Invece in dimensione $n \geq 2$ la classe di soluzioni dell'equazione di Laplace in Ω è molto più ampia e dipende anche dal dominio Ω considerato. Tale ricchezza rende interessante lo studio delle funzioni armoniche.

Esempio 2.3 La funzione $x \mapsto |x|^{2-n}$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (cfr. esercizio 3, capitolo 1). Evidentemente, in dimensione $n \neq 2$ tale funzione non si può estendere ad una soluzione dell'equazione di Laplace su \mathbb{R}^n . Questo semplice esempio mette in risalto il fatto che anche il dominio preso in considerazione gioca un ruolo importante. Notiamo che in dimensione 3 la funzione $x \mapsto |x|^{-1}$ è molto significativa da un punto di vista fisico perché, a meno di costanti moltiplicative, rappresenta sia il potenziale gravitazionale, sia quello elettrostatico.

Esercizio 2.4 Vogliamo caratterizzare le funzioni armoniche in \mathbb{R}^n , quadratiche. Ricordiamo che una funzione $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è quadratica quando si può scrivere nella forma

$$u(x) = x \cdot Ax$$

dove A è una fissata matrice $n \times n$. Una tale funzione u risulta armonica in \mathbb{R}^n se e solo se A ha traccia nulla. Infatti, se a_{ij} denota l'elemento di A che occupa la i -esima riga e la j -esima colonna, si ha che

$$\begin{aligned}\Delta(x \cdot Ax) &= \operatorname{div} \left(\nabla \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right) \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{j1}) x_j, \dots, \sum_{j=1}^n (a_{nj} + a_{jn}) x_j \right) = 2 \sum_{j=1}^n a_{jj} = 2 \operatorname{tr} A.\end{aligned}$$

2.2 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe

In dimensione 2, identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , associando ad ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ il numero complesso $z = x + iy$, dove i è l'unità immaginaria. La nozione di funzione armonica è strettamente legata a quella di funzione olomorfa come espresso nel seguente enunciato.

Teorema 2.5 *Sia Ω un aperto non vuoto di \mathbb{C} .*

- (i) *Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in Ω , allora la parte reale e la parte immaginaria di f sono funzioni armoniche in Ω .*
- (ii) *Se Ω è semplicemente connesso e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione armonica in Ω allora esiste una funzione $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armonica in Ω tale che $u + iv$ è olomorfa in Ω (una tale funzione v si chiama armonica coniugata a u).*

Dimostrazione. (i) Siano $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di f . Quindi u e v sono funzioni a valori reali definite in Ω e $f(z) = u(z) + iv(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Dalla teoria delle funzioni olomorfe, sappiamo che valgono le equazioni di Cauchy–Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} \quad \text{in } \Omega. \quad (2.1)$$

Tenuto conto del fatto che una funzione olomorfa è derivabile infinite volte, si ha che

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \\ \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega.$$

Dunque abbiamo ottenuto che u e v sono funzioni armoniche in Ω .

(ii) La forma differenziale $dF = -u_y dx + u_x dy$ è chiusa in Ω perché u è armonica. Siccome Ω è semplicemente connesso, dF è esatta. Quindi esiste $v \in C^1(\Omega)$ tale che $\nabla v = (-u_y, u_x)$ cioè $v_x = -u_y$ e $v_y = u_x$ in Ω . Poniamo

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Siccome u e v sono di classe C^1 in Ω , anche f lo è. Inoltre valgono le condizioni di Cauchy–Riemann in Ω e quindi f è olomorfa in Ω . \square

Osservazione 2.6 Sia $k \in \mathbb{N}$. In base alla proposizione precedente, siccome la funzione $z \mapsto z^k$ è olomorfa in \mathbb{C} , la sua parte reale e la sua parte immaginaria costituiscono due polinomi omogenei di grado k , linearmente indipendenti, che sono funzioni armoniche in \mathbb{R}^2 . Ad esempio, per $k = 2$, si ha che $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ e dunque sono armoniche le funzioni

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad e \quad v(x, y) = xy.$$

Per $k = 3$ si ha che $z^3 = [(x^2 - y^2) + 2ixy](x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ e quindi sono armoniche le funzioni

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad e \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Diamo ora una classe di esempi di funzioni armoniche su tutto il piano, nella famiglia dei polinomi di due variabili. Ricordiamo che i polinomi di due variabili omogenei di grado k sono le funzioni della forma

$$(x, y) \mapsto a_0x^k + a_1x^{k-1}y + \dots + a_{k-1}xy^{k-1} + a_ky^k$$

con a_0, \dots, a_k costanti reali fissate.

Proposizione 2.7 Un polinomio di due variabili, omogeneo di grado $k \in \mathbb{N}$ è una funzione armonica in \mathbb{R}^2 se e solo se è combinazione lineare delle parti reale e immaginaria della funzione complessa $f(z) = z^k$.

Dimostrazione. Le parti reale e immaginaria della funzione complessa $f(z) = z^k$ sono funzioni armoniche in \mathbb{R}^2 perché f è olomorfa in \mathbb{C} e per via del teorema 2.5. Inoltre ogni loro combinazione lineare è armonica in \mathbb{C} per il principio di sovrapposizione (cfr. osservazione 2.2). Viceversa sia u un polinomio omogeneo di grado k che verifichi l'equazione di Laplace su \mathbb{R}^2 . Posto

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

abbiamo che

$$\Delta u = v_{rr} + r^{-1}v_r + r^{-2}v_{\theta\theta}$$

(cfr. esercizio 1, capitolo 1). Osserviamo che $u(tz) = t^k u(z)$ per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $t \geq 0$. In particolare, se $z = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $t = r$, otteniamo

$$u(z) = r^k \varphi(\theta) \quad \text{dove} \quad \varphi(\theta) = u(\cos \theta, \sin \theta).$$

Quindi $v(r, \theta) = r^k \varphi(\theta)$ e

$$\Delta u = k(k-1)r^{k-2}\varphi + kr^{k-2}\varphi + r^{k-2}\varphi'' = r^{k-2}(k^2\varphi + \varphi'').$$

Dunque se u è armonica in \mathbb{R}^2 , allora, prendendo $r =$ troviamo in particolare che φ deve risolvere il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + k^2\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \end{cases}$$

Si verifica facilmente che per $k \in \mathbb{N}$ la soluzione generale è

$$\varphi(\theta) = A \cos k\theta + B \sin k\theta$$

con A e B costanti arbitrarie. Quindi

$$u(z) = r^k (A \cos k\theta + B \sin k\theta) \quad \forall z = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Siccome, usando l'identità di Eulero e le proprietà dell'esponenziale,

$$z^k = (re^{i\theta})^k = r^k \cos(k\theta) + ir^k \sin(k\theta),$$

otteniamo che u è combinazione lineare delle parti reale e immaginaria della funzione $f(z) = z^k$.
□

Invarianza conforme in dimensione 2

Due domini Ω_1 e Ω_2 in \mathbb{R}^2 si dicono **conformemente equivalenti** se esiste un diffeomorfismo $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tale che $|f_x| = |f_y|$ e $f_x \cdot f_y = 0$ in Ω_1 . Tale equazioni costituiscono le **condizioni di conformalità**. Una funzione $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 che verifica le condizioni di conformalità sul proprio dominio si dice **conforme**.

Identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , mediante le equazioni di Cauchy-Riemann (2.1) si verifica subito che una funzione $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ è conforme se e solo se è olomorfa, come funzione complessa di variabile complessa. Ne segue che ogni funzione conforme è di classe C^∞ , poiché tale è ogni funzione olomorfa. Data l'identità tra le proprietà di olomorficità e di conformalità, due domini conformemente equivalenti si dicono anche **biolomorfi**.

L'equazione di Laplace è invariante per conformalità nel senso espresso dal seguente risultato.

Proposizione 2.8 *Siano Ω_1 e Ω_2 due domini in \mathbb{R}^2 conformemente equivalenti mediante un diffeomorfismo conforme f . Siano $u: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $u = v \circ f$. Allora u è armonica in Ω_1 se e solo se v è armonica in Ω_2 .*

Dimostrazione. Facendo i conti si trova che, se $f = (\phi, \psi)$

$$\begin{aligned} \Delta v &= (u_{xx} \circ f)(\phi_x^2 + \phi_y^2) + (u_{yy} \circ f)(\psi_x^2 + \psi_y^2) \\ &\quad + 2(u_{xy} \circ f)(\phi_x \psi_x + \phi_y \psi_y) + (u_x \circ f)(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + (u_y \circ f)(\psi_{xx} + \psi_{yy}). \end{aligned}$$

Dalle equazioni di Cauchy-Riemann (2.1) segue che

$$\phi_x \psi_x + \phi_y \psi_y = 0, \quad \phi_x^2 + \phi_y^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2, \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 = \psi_{xx} + \psi_{yy}.$$

Quindi

$$\Delta v(x, y) = (\phi_x(x, y)^2 + \phi_y(x, y)^2) \Delta u(f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega_2$$

e da ciò si conclude. □

La teoria delle funzioni olomorfe ci fornisce il seguente importante risultato:

Teorema 2.9 (Teorema della mappa di Riemann) *Ogni aperto in \mathbb{R}^2 semplicemente connesso e diverso da \mathbb{R}^2 è conformemente equivalente al disco unitario aperto.*

Un aspetto piuttosto sorprendente di questo teorema è l'assenza di ipotesi di regolarità sulla frontiera dell'aperto. Grazie alla proposizione 2.8 e al teorema di Riemann 2.9 l'equazione di Laplace in un dominio semplicemente connesso del piano è equivalente all'equazione di Laplace nel disco unitario aperto.

2.3 Integrazione su sfere

Fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e un numero $r > 0$ denotiamo

$$S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = r\}$$

la sfera di centro x_0 e raggio r . Inoltre, data una funzione continua $f: S_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, denotiamo

$$\int_{S_r(x_0)} f(y) d\sigma_y \quad \text{o, più sinteticamente,} \quad \int_{S_r(x_0)} f d\sigma$$

l'integrale di superficie di f sulla sfera $S_r(x_0)$. Esistono vari modi, tutti equivalenti tra loro, per definire tale integrale. La definizione che si sceglie deve comunque esser tale da garantire le seguenti proprietà:

(1) Traslazione:
$$\int_{S_r(x_0)} f(y) d\sigma_y = \int_{S_r(0)} f(y + x_0) d\sigma_y.$$

(2) Dilatazione:
$$\int_{S_r(0)} f(y) d\sigma_y = r^{n-1} \int_{S_1(0)} f(y) d\sigma_y.$$

(3) Integrazione radiale: se $f: \overline{B_R(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_{B_R(x_0)} f(y) dy = \int_0^R \left(\int_{S_r(x_0)} f d\sigma \right) dr. \quad (2.2)$$

(4) Derivabilità: se $f: \overline{B_R(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\frac{d}{dr} \int_{B_r(x_0)} f(y) dy = \int_{S_r(x_0)} f d\sigma \quad \forall r \in (0, R). \quad (2.3)$$

La proprietà espressa da (2.2) è un caso particolare di una formula più generale nota come formula di co-area.

Osserviamo che basta definire l'integrale su sfere centrate nell'origine e poi estendere la definizione al caso di sfere centrate in un punto qualunque utilizzando la proprietà di traslazione come definizione.

Un modo per definire l'integrale su sfere (centrate nell'origine) è basato sulla parametrizzazione della sfera $S_r(0)$ in coordinate sferiche. Ad esempio, in dimensione 2, la sfera ∂B_r è una circonferenza e, usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta, \end{cases}$$

possiamo definire

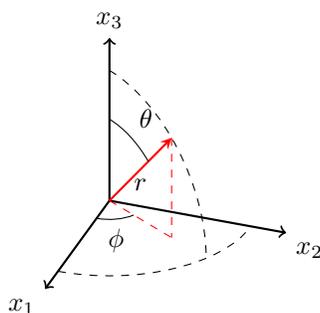
$$\int_{\partial B_r} f(y) d\sigma_y = r \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

In dimensione 3, usando le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \phi \sin \theta \\ x_2 = r \sin \phi \sin \theta \\ x_3 = r \cos \theta, \end{cases}$$

vale che

$$\int_{\partial B_r} f(y) d\sigma_y = r^2 \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) d\phi \right) \sin \theta d\theta .$$



Coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 :

r = modulo,

θ = colatitudine,

ϕ = longitudine.

È possibile introdurre coordinate sferiche anche in dimensione n ma non procediamo in tal senso. Piuttosto forniamo una definizione alternativa dell'integrale di superficie su sfere in dimensione qualunque indipendente dalla parametrizzazione della sfera. Si pone

$$\int_{S_1(0)} f d\sigma = n \int_{B_1(0)} f \left(\frac{y}{|y|} \right) dy \quad (2.4)$$

e si estende la definizione ad una sfera qualunque imponendo le proprietà di traslazione e dilatazione.

Osservazione 2.10 La definizione di integrale sulla sfera data da (2.4) è coerente con il teorema della divergenza: se f si assume di classe C^1 in un intorno di $S_1(0)$ e si applica il teorema della divergenza al campo vettoriale $F(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)x$, si ottiene (2.4).

Dimostrazione delle proprietà (4) via teorema della divergenza. Supponiamo $x_0 = 0$. Il caso x_0 qualunque si può recuperare grazie alla proprietà di traslazione. Poniamo $S_r = S_r(0)$ e $B_r = B_r(0)$. Supponiamo per il momento $f \in C^1(\overline{B_R})$. Dato che

$$\int_{B_r} f(y) dy = r^n \int_{B_1} f(ry) dy$$

si ha che

$$\frac{d}{dr} \int_{B_r} f(y) dy = nr^{n-1} \int_{B_1} f(ry) dy + r^n \int_{B_1} \nabla f(ry) \cdot y dy .$$

Ora poniamo $F(y) = f(ry)y$ ed osserviamo che $\operatorname{div} F(y) = \nabla f(ry) \cdot y + nf(ry)$. Quindi

$$nr^{n-1} \int_{B_1} f(ry) dy + r^n \int_{B_1} \nabla f(ry) \cdot y dy = r^{n-1} \int_{B_1} \operatorname{div} F(y) dy = r^{n-1} \int_{\partial B_1} F \cdot \nu d\sigma .$$

Ma $\partial B_1 = S_1$ e la normale esterna ad un generico punto $y \in S_1$ è $\nu(y) = y$. Pertanto

$$r^{n-1} \int_{\partial B_1} F \cdot \nu \, d\sigma = r^{n-1} \int_{S_1} f(ry) y \cdot y \, d\sigma = r^{n-1} \int_{S_1} f(ry) \, d\sigma = \int_{S_r} f \, d\sigma.$$

Dunque, mettendo insieme tutte le precedenti uguaglianze, si ottiene la tesi. Il caso in cui f è solo continua si ottiene utilizzando un argomento di approssimazione che descriviamo solo a grandi linee. Si può costruire una successione di funzioni $f_k \in C^1(\overline{B_R})$ tale che $f_k \rightarrow f$ uniformemente. Quindi si introducono le funzioni

$$\varphi_k(r) = \int_{B_r} f_k(y) \, dy, \quad \varphi(r) = \int_{B_r} f(y) \, dy, \quad \psi(r) = \int_{S_r} f \, d\sigma$$

e si osserva che, fissato un intervallo chiuso $[r_1, r_2] \subset (0, R)$, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ puntualmente in $[r_1, r_2]$ e $\varphi'_k \rightarrow \psi$ uniformemente in $[r_1, r_2]$. Ciò basta per dedurre che esiste $\phi'(r)$ (in (r_1, r_2)) e $\phi'(r) = \psi(r)$. \square

Calcolo del volume della palla n -dimensionale e dell'area della sfera $(n-1)$ -dimensionale

Denotiamo ω_n la costante positiva, dipendente dalla dimensione n fissata, definita come il volume n -dimensionale della palla unitaria \mathbb{B}^n di \mathbb{R}^n . Ad esempio $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Osserviamo che

$$\text{volume di } B_r(x) = |B_r(x)| = \int_{B_r(x)} dy = \int_{\mathbb{B}^n} r^n dz = r^n \omega_n$$

(abbiamo effettuato il cambio di variabili $y = x + rz$, per il quale $dy = r^n dz$). Dalla proprietà (2.3), applicata con $f \equiv 1$, segue che

$$\text{area } (n-1)\text{-dimensionale di } S_r(x) = |S_r(x)| = \int_{S_r(x)} d\sigma = \frac{d(r^n \omega_n)}{dr} = nr^{n-1} \omega_n. \quad (2.5)$$

In particolare l'area $(n-1)$ -dimensionale di $S_1(0)$ vale $n\omega_n$.

In generale il valore ω_n si può esprimere mediante la funzione Gamma di Eulero, così definita:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \, dx \quad (t > 0).$$

Proposizione 2.11 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$. In particolare:

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} & \text{se } n = 2k \\ \frac{\pi^{k-1}}{(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\dots\frac{1}{2}} & \text{se } n = 2k-1. \end{cases}$$

La dimostrazione si basa sul seguente risultato:

Lemma 2.12 La funzione Gamma di Eulero soddisfa l'equazione $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ per ogni $t > 0$. In particolare $\Gamma(n) = (n-1)!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. La prima identità si ottiene integrando per parti:

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_0^\infty + t \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t).$$

La seconda relazione segue dalla prima e dal calcolo di $\Gamma(1) = 1$. \square

Dimostrazione della proposizione 2.11. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Allo stesso tempo

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r} e^{-|x|^2} d\sigma_x \right) dr = n\omega_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{n\omega_n}{2} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s} ds.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $r^2 = s$. Quindi dalla definizione della funzione Gamma di Eulero e dal lemma 2.12 segue che

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{n\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Se $n = 2k$ allora $\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \Gamma(k+1) = k!$. Se $n = 2k - 1$ allora $\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ e poiché da un calcolo diretto si ha che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, anche in questo caso si ottiene il valore riportato nell'enunciato. \square

2.4 Media superficiale e media volumetrica

In questa sezione introduciamo la nozione di media superficiale e media volumetrica di una funzione continua definita in un aperto di \mathbb{R}^n . Tale nozione servirà nella sezione successiva per presentare la proprietà della media, che risulterà caratterizzare completamente le funzioni armoniche.

Definizione 2.13 *Data una funzione $f \in C(B_{r_0}(x))$, per ogni $r \in (0, r_0)$ si definisce media superficiale di f sulla sfera $S_r(x)$ il numero*

$$\oint_{S_r(x)} f(y) d\sigma_y := \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} f(y) d\sigma_y$$

e si definisce media volumetrica di f sulla palla $B_r(x)$ il numero

$$\int_{B_r(x)} f(y) dy := \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} f(y) dy.$$

Teorema 2.14 *Data una funzione $f \in C(B_{r_0}(x))$, si ha che*

$$\oint_{S_r(x)} f(y) d\sigma_y \rightarrow f(x) \quad e \quad \int_{B_r(x)} f(y) dy \rightarrow f(x) \quad \text{per } r \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Se inoltre $f \in C^2(B_{r_0}(x))$ allora la funzione

$$\varphi(r) = \int_{S_r(x)} f(y) d\sigma_y$$

è derivabile in $(0, r_0)$ e

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta f(y) dy. \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Siccome f è continua in x , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in (0, r_0)$ tale che

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x).$$

Quindi per ogni $r \in (0, \delta)$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_r(x)} f(y) d\sigma_y - f(x) \right| &= \left| \int_{S_r(x)} (f(y) - f(x)) d\sigma_y \right| \\ &\leq \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} |f(y) - f(x)| d\sigma_y \\ &< \frac{1}{nr^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} \varepsilon d\sigma_y = \varepsilon \end{aligned}$$

ciò vale il primo limite in (2.6). In modo analogo si dimostra il secondo limite. Discutiamo ora la formula (2.7). Usando le proprietà di traslazione e dilatazione dell'integrale su sfere troviamo che

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_1} f(x + ry) d\sigma_y.$$

Intendiamo ora applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale nella sua versione per integrali superficiali:

Teorema 2.15 *Sia S una ipersuperficie orientata regolare, $f(r, x)$ una funzione continua da $I \times S$ a valori reali. Se f ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial r}$ continua in $I \times S$ allora la funzione*

$$F(r) = \int_S f(r, x) d\sigma_x \quad \forall r \in I$$

è derivabile in I e

$$F'(r) = \int_S \frac{\partial f}{\partial r}(r, x) d\sigma_x \quad \forall r \in I.$$

Allora

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_1} \frac{\partial}{\partial r} [f(x + ry)] d\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_1} \nabla_x f(x + ry) \cdot y d\sigma_y.$$

Ora osserviamo che, essendo B_1 la palla unitaria, il versore normale a S_1 nel generico punto $y \in \partial B_1$ è $\nu(y) = y$. Se, fissato x , poniamo

$$G(y) = \nabla_x f(x + ry),$$

possiamo scrivere

$$\int_{S_1} \nabla_x f(x + ry) \cdot y \, d\sigma_y = \int_{S_1} G(y) \cdot \nu(y) \, d\sigma_y.$$

Proseguiamo i calcoli andando ad applicare il teorema della divergenza (teorema 1.4):

$$\int_{S_1} G(y) \cdot \nu(y) \, d\sigma_y = \int_{B_1} \operatorname{div} G(y) \, dy.$$

Nel caso in questione

$$\operatorname{div}_y [\nabla_x f(x + ry)] = r \Delta f(x + ry)$$

e quindi

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n\omega_n} \int_{B_1} \Delta f(x + ry) \, dy = \frac{r}{nr^n \omega_n} \int_{B_r(x)} \Delta f(y) \, dy$$

cioè (2.7). \square

2.5 Proprietà della media

In questa sezione presentiamo una caratterizzazione equivalente delle funzioni armoniche. Tale caratterizzazione si esprime mediante la cosiddetta *proprietà della media* che si può interpretare come formulazione integrale dell'equazione di Laplace. La proprietà della media risulterà utile in seguito per dedurre parecchie ulteriori informazioni interessanti sulle funzioni armoniche.

Teorema 2.16 *Sia Ω un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n e sia $u \in C^2(\Omega)$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *u è armonica in Ω*

(ii) *u verifica la proprietà della media superficiale:*

$$u(x) = \int_{S_r(x)} u(y) \, d\sigma_y \quad \text{per ogni palla chiusa } \overline{B_r(x)} \subset \Omega. \quad (2.8)$$

(iii) *u verifica la proprietà della media volumetrica:*

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) \, dy \quad \text{per ogni palla chiusa } \overline{B_r(x)} \subset \Omega. \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Fissato $x \in \Omega$, per ogni $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$ definiamo

$$\varphi(r) = \int_{S_r(x)} u(y) \, d\sigma_y. \quad (2.10)$$

Per il teorema 2.14, φ è di classe C^1 sul proprio intervallo di definizione e

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) \, dy. \quad (2.11)$$

(i) \Rightarrow (ii). Se u è armonica, $\Delta u = 0$ in $B_r(x)$ e dunque, da (2.11), $\varphi'(r) = 0$ per ogni $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$. Pertanto φ è costante e in particolare

$$\varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y = u(x)$$

per (2.6). Quindi vale (2.8).

(ii) \Rightarrow (iii). Usando (2.2) calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u(y) dy &= \int_0^r \left(\int_{S_\rho(x)} u(y) d\sigma_y \right) d\rho = \int_0^r u(x) |S_\rho(x)| d\rho \\ &= u(x) \int_0^r \left(\int_{S_\rho(x)} 1 d\sigma_y \right) d\rho = u(x) |B_r(x)| \end{aligned}$$

cioè vale (2.9).

(iii) \Rightarrow (ii). Usando (2.3), (iii) e (2.5) abbiamo che

$$\int_{S_r(x)} u(y) d\sigma_y = \frac{1}{|S_r(x)|} \frac{d}{dr} \left(\omega_n r^n \int_{B_r(x)} u(y) dy \right) = u(x)$$

cioè (2.8).

(ii) \Rightarrow (i). Per assurdo, esista un punto $x \in \Omega$ tale che $\Delta u(x) \neq 0$. Possiamo supporre $\Delta u(x) > 0$ (se no, prendiamo $-u$ al posto di u). Siccome $u \in C^2$, la funzione Δu è continua e quindi esiste $\bar{r} \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ tale che

$$\Delta u(y) > 0 \quad \text{per ogni } y \in B_{\bar{r}}(x). \quad (2.12)$$

Consideriamo la funzione φ definita in (2.10). Da (2.11) e (2.12) segue che $\varphi'(\bar{r}) > 0$, in contraddizione col fatto che, valendo (2.8), $\varphi'(\bar{r}) = 0$. \square

2.6 Regolarità delle funzioni armoniche

In questa sezione dimostriamo il seguente risultato di regolarità:

Teorema 2.17 *Dato un dominio Ω in \mathbb{R}^n , se $u \in C(\Omega)$ verifica la proprietà della media superficiale (2.8) (o equivalentemente la proprietà della media volumetrica (2.9)) allora $u \in C^\infty(\Omega)$. In particolare, se u è una funzione armonica in Ω allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prima di vederne la dimostrazione, osserviamo che i teoremi 2.17 e 2.16 implicano subito il seguente risultato:

Teorema 2.18 *Dato un dominio Ω in \mathbb{R}^n , se $u \in C(\Omega)$ verifica la proprietà della media superficiale (2.8) (o equivalentemente la proprietà della media volumetrica (2.9)) allora u è una funzione armonica in Ω .*

Per provare il teorema 2.17 ci serviamo di un procedimento di regolarizzazione di uso frequente, che andiamo ora a presentare.

Definizione 2.19 Chiamiamo famiglia regolarizzante o famiglia di mollificatori una famiglia di funzioni $\eta_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parametrizzata da $\varepsilon > 0$ con le seguenti proprietà:

(i) η_ε è di classe C^∞ su \mathbb{R}^n ,

(ii) $\eta_\varepsilon \geq 0$ in \mathbb{R}^n ,

(iii) $\text{supp } \eta_\varepsilon \subseteq \overline{B_\varepsilon}$,

(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) dy = 1$.

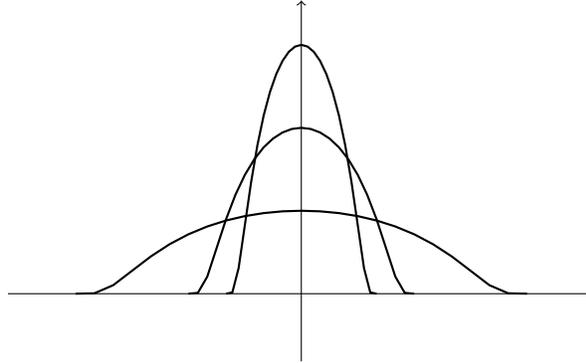
Esempio 2.20 Consideriamo la funzione $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$\eta(r) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{r^2-1}} & \text{per } |r| < 1 \\ 0 & \text{per } |r| \geq 1 \end{cases}$$

con $C = C_n$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(|x|) dx = 1$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $\eta_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right).$$

Risulta che $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia regolarizzante. Le funzioni η_ε così costruite si chiamano mollificatori di Friedrichs.



Grafici di η e di η_ε per $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Le curve si possono distinguere in base al supporto: $\text{supp } \eta = [-1, 1]$, $\text{supp } \eta_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Dati un aperto non vuoto Ω in \mathbb{R}^n e una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in Ω poniamo

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \quad \text{per ogni } x \in \Omega_\varepsilon.$$

Affinché sia Ω_ε non vuoto, si dovrà prendere ε sufficientemente piccolo. Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ (e quindi $\partial\Omega = \emptyset$) si ha che $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n$ per ogni $\varepsilon > 0$. La funzione f_ε si chiama ε -regolarizzata di f . Utilizzeremo il seguente risultato.

Lemma 2.21 Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in Ω allora per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Siccome Ω_ε è aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $\overline{B_\delta(x_0)} \subset \Omega_\varepsilon$. Quindi, se $x \in B_\delta(x_0)$ allora $B_\varepsilon(x) \subset \overline{B_{\delta+\varepsilon}(x_0)} \subset \Omega$. L'insieme $K = \overline{B_{\delta+\varepsilon}(x_0)}$ è compatto e

$$f_\varepsilon(x) = \int_K \eta_\varepsilon(x-y)f(y) dy \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

A questo punto, dato che la funzione η_ε è di classe C^∞ su \mathbb{R}^n , si può applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e si deduce

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_K \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y) dy \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x}).$$

Con un argomento induttivo si prova che f_ε ammette tutte le derivate di ogni ordine in ogni punto di $B_\delta(x_0)$ e quindi in Ω_ε . \square

Dimostrazione del teorema 2.17. Per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (in modo tale da garantire che $\Omega_\varepsilon \neq \emptyset$) sia $u_\varepsilon: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ε -regolarizzata di u mediante la famiglia di mollificatori descritta nell'esempio 2.20. Fissato $x \in \Omega_\varepsilon$ si ha che

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \left(\int_{S_r(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) d\sigma_y \right) dr = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{S_r(x)} u(y) d\sigma_y \right) dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(x) n\omega_n r^{n-1} dr = \frac{u(x)n\omega_n}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r^{n-1} dr \\ &= u(x) \int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y) dy = u(x). \end{aligned}$$

Quindi $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε . Siccome $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ segue che $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e, siccome ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e $\bigcup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon = \Omega$, si deduce che $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

2.7 Teorema di Liouville

Teorema 2.22 Se $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è armonica e limitata su \mathbb{R}^n allora è costante.

Dimostrazione. Siccome $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta u = 0$ in \mathbb{R}^n , derivando rispetto a x_i si trova

$$0 = \partial_{x_i} \Delta u = \Delta u_{x_i} \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

cioè u_{x_i} è una funzione armonica in \mathbb{R}^n . Allora possiamo applicare la proprietà della media volumetrica alla funzione u_{x_i} e quindi

$$u_{x_i}(x) = \int_{B_r(x)} u_{y_i}(y) dy = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u_{y_i}(y) dy.$$

Ora osserviamo che, denotato e_i l' i -esimo versore della base canonica di \mathbb{R}^n , e introdotto il campo vettoriale $G(y) = u(y)e_i$, si ha che $\operatorname{div} G(y) = u_{y_i}(y)$. Andiamo quindi ad applicare il teorema della divergenza (teorema 1.4) scrivendo

$$\int_{B_r(x)} u_{y_i}(y) dy = \int_{\partial B_r(x)} u(y)e_i \cdot \nu(y) d\sigma_y$$

dove $\nu(y)$ è la normale esterna a $\partial B_r(x)$ in y . Pertanto

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(x)} |u(y)| d\sigma_y \leq \frac{1}{\omega_n r^n} n\omega_n r^{n-1} C = \frac{nC}{r}$$

dove C è una costante tale che $|u(y)| \leq C$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ (qui si sta usando la limitatezza di u). Prendendo il limite per $r \rightarrow \infty$ si ottiene che $u_{x_i}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $i = 1, \dots, n$, cioè $\nabla u \equiv 0$ in \mathbb{R}^n , in quanto \mathbb{R}^n è connesso. Dunque u è costante. \square

2.8 Funzioni subarmoniche e principio del massimo

Dato un aperto Ω di \mathbb{R}^n , una funzione $u \in C(\Omega)$ che verifica

$$u(x) \leq \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad \text{per ogni palla chiusa } \overline{B_r(x)} \subset \Omega$$

si dice *subarmonica in Ω* . Se invece soddisfa

$$u(x) \geq \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad \text{per ogni palla chiusa } \overline{B_r(x)} \subset \Omega$$

allora si dice *superarmonica in Ω* .

Teorema 2.23 *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , non vuoto e limitato, e sia $u \in C(\overline{\Omega})$.*

(i) (Principio del massimo) *Se u è subarmonica in Ω , allora*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

(ii) (Principio del massimo forte) *Se in più Ω è connesso, allora o u è costante in Ω oppure*

$$u(x) < \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Iniziamo a dimostrare la parte (ii). Siano

$$m = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \quad \text{e} \quad M = \{x \in \Omega \mid u(x) = m\}.$$

Proviamo che se $M \neq \emptyset$ allora $M = \Omega$. Sia $\bar{x} \in M$. Fissato $r \in (0, \operatorname{dist}(\bar{x}, \partial\Omega))$ si ha che

$$m = u(\bar{x}) \leq \int_{B_r(\bar{x})} u(y) dy \leq \int_{B_r(\bar{x})} m dy = m$$

e quindi

$$\int_{B_r(\bar{x})} (m - u(y)) dy = 0 .$$

Siccome la funzione $y \mapsto m - u(y)$ è continua e non negativa, la precedente uguaglianza può valere se e solo se $u \equiv m$ in $B_r(\bar{x})$. Ciò prova che $B_r(\bar{x}) \subset M$, cioè M è aperto. Inoltre, per la continuità di u , tale insieme è anche chiuso nella metrica indotta in Ω . Pertanto, essendo Ω connesso, deve essere $M = \Omega$, cioè u costante in Ω .

Ora proviamo (i). Fissato $x \in \Omega$ sia Ω_x la componente connessa di Ω contenente x . Usando la parte (ii) già dimostrata e il fatto che $\partial\Omega_x \subset \partial\Omega$ deduciamo che $u(x) \leq \max_{\partial\Omega_x} u \leq \max_{\partial\Omega} u$. \square

Scambiando u con $-u$ otteniamo la versione gemella del teorema precedente.

Teorema 2.24 *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , non vuoto e limitato, e sia $u \in C(\overline{\Omega})$.*

(i) (Principio del minimo) *Se u è superarmonica in Ω , allora*

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

(ii) (Principio del minimo forte) *Se in più Ω è connesso, allora o u è costante in Ω oppure*

$$u(x) > \min_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

In base al teorema 2.16, una funzione $u \in C^2(\Omega)$ è armonica in Ω se e solo se è allo stesso tempo subarmonica e superarmonica in Ω . Pertanto, dai teoremi 2.23 e 2.24 deduciamo il seguente risultato.

Corollario 2.25 *Se $u \in C(\overline{\Omega})$ è armonica in Ω , aperto di \mathbb{R}^n non vuoto e limitato, allora*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

Se inoltre Ω è connesso, allora o u è costante, oppure

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

Vediamo ora una versione equivalente dei principi del massimo e del minimo, di uso frequente nello studio delle equazioni ellittiche.

Teorema 2.26 *Sia Ω un dominio limitato in \mathbb{R}^n e sia $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.*

(i) *Se $-\Delta u \geq 0$ in Ω e u non è costante allora $u(x) > \min_{\partial\Omega} u$ per ogni $x \in \Omega$.*

(ii) *Se $-\Delta u \leq 0$ in Ω e u non è costante allora $u(x) < \max_{\partial\Omega} u$ per ogni $x \in \Omega$.*

Dimostrazione. (i) Iniziamo a provare che se $-\Delta u \geq 0$ in Ω allora u è superarmonica in Ω . Fissiamo $x \in \Omega$ e consideriamo la funzione $\varphi(r)$ definita in (2.10) come la media superficiale di u su una sfera $\partial B_r(x)$ contenuta in Ω . Da (2.11) segue che φ è non crescente sul proprio intervallo di definizione $(0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$. Quindi per ogni r in tale intervallo vale che

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) \geq \varphi(r) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y$$

cioè

$$n\omega_n r^{n-1} u(x) \geq \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y.$$

Integrando rispetto a $r \in [0, r_0]$ e usando (2.2), troviamo che

$$\omega_n r_0^n u(x) \geq \int_{B_{r_0}(x)} u(y) dy.$$

Ciò vale per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r_0 \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$, cioè u è superarmonica in Ω . La conclusione segue dal teorema 2.24. In modo analogo si ragiona per provare la parte (ii). \square

Osservazione 2.27 *Il principio del massimo si può anche dimostrare senza utilizzare la proprietà della media, procedendo in questo modo: data una funzione armonica u in Ω , u continua in $\bar{\Omega}$, per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$. Si ha che $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 2\varepsilon n > 0$ e quindi u_ε non ammette punti di massimo in Ω . Allora esiste $x_\varepsilon \in \partial\Omega$ tale che*

$$u(x_\varepsilon) + \varepsilon|x_\varepsilon|^2 = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon = \max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon \geq \max_{\bar{\Omega}} u.$$

Tenuto conto che $\partial\Omega$ è compatto, passando al limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene che $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

2.9 Esercizi

1. Verificare che la funzione $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ è armonica in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ma non ammette nessuna armonica coniugata in Ω .
2. Siano V un aperto di \mathbb{R}^{n-1} e, posto $\Omega = \mathbb{R} \times V$, sia u una funzione armonica in Ω . Detto e_1 il versore di componenti $(1, 0, \dots, 0)$ e posto $v(x) = u(x + se_1)$ con $s \in \mathbb{R}$ fissato, verificare che v è armonica in Ω .
3. Sia Ω un cono aperto di \mathbb{R}^n con vertice nell'origine (cioè un aperto tale che se $x \in \Omega$ allora $tx \in \Omega$ per ogni $t > 0$). Sia u una funzione armonica in Ω e fissato un numero $\lambda > 0$, sia $v(x) = u(\lambda x)$ per ogni $x \in \Omega$. Verificare che v è armonica in Ω .
4. Sia A una matrice ortogonale $n \times n$ e sia u una funzione di classe C^2 in un dominio Ω di \mathbb{R}^n radialmente simmetrico (cioè un insieme della forma $r_1 < |x| < r_2$ con $-\infty < r_1 < r_2 \leq \infty$). Verificare che la funzione $v(x) = u(Ax)$ soddisfa $\Delta v(x) = (\Delta u)(Ax)$. In particolare, se u è armonica in Ω anche v lo è.

5. Dati un aperto non vuoto Ω in \mathbb{R}^n e una funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, siano

$$\Omega_1 = \left\{ \frac{x}{|x|^2} \mid x \in \Omega, x \neq 0 \right\} \quad \text{e} \quad \hat{u}(x) = |x|^{2-n} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \quad \text{per ogni } x \in \Omega_1.$$

Verificare che u è armonica in Ω se e solo se \hat{u} lo è in Ω_1 .

6. Sia $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di Heaviside: $h(t) = 0$ per $t < 0$ e $h(t) = 1$ per $t \geq 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, calcolare la funzione

$$h_\varepsilon(t) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} h(s) ds.$$

Verificare che h_ε è una funzione continua su \mathbb{R} e calcolare $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(t)$, se esiste.

7. Fissati due numeri $0 < r < R$, sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, lineare a tratti così fatta

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq r \\ \frac{R-|t|}{R-r} & \text{se } r < |t| < R \\ 0 & \text{se } |t| \geq R. \end{cases}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $f_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la ε -regolarizzata di f . Verificare che

- (i) $f_\varepsilon(t) = 1$ se $|t| < r - \varepsilon$, $0 \leq f_\varepsilon(t) \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e il supporto di f_ε è l'intervallo $[-R - \varepsilon, R + \varepsilon]$.
(ii) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ ed esiste una costante $C > 0$ indipendente da ε tale che $|f'_\varepsilon(t)| \leq C$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Fissato un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, sia $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$\varphi_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(|x - \bar{x}|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Verificare che

- (iii) $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ se $x \in B_{r-\varepsilon}(\bar{x})$, $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e il supporto di φ_ε è la palla chiusa $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - \bar{x}| \leq R + \varepsilon\}$.
(iv) $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una costante $C > 0$ indipendente da ε tale che $|\nabla \varphi'_\varepsilon(x)| \leq C$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
8. Sia B_R la palla aperta in \mathbb{R}^n centrata nell'origine e di raggio R e sia data una funzione $f \in C^2(B_R)$. Si definisca

$$\varphi(r) = \int_{S_r} f d\sigma \quad \forall r \in (0, R).$$

Verificare che φ è di classe C^2 in $(0, R)$ e verifica l'equazione

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r) = \int_{S_r} \Delta f d\sigma \quad \forall r \in (0, R).$$

Infine calcolare i limiti di $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$ e $\varphi'(r)/r$ per $r \rightarrow 0$.

9. Dati un aperto Ω di \mathbb{R}^n e una funzione $f \in C(\Omega)$ e detta f_ε la sua ε -regolarizzata, dimostrare che per ogni compatto K contenuto in Ω si ha che $f_\varepsilon \rightarrow f$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente in K .
- 10.

3 Equazione di Poisson

In questo capitolo siamo interessati a studiare l'*equazione di Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{3.1}$$

dove Ω è un dominio in \mathbb{R}^n e f è una assegnata funzione continua in Ω . L'incognita è la funzione $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Diciamo che u è *soluzione* dell'equazione (3.1) se $u \in C^2(\Omega)$ e $-\Delta u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \Omega$. I risultati principali di questo capitolo stabiliscono:

- esistenza di una soluzione di $-\Delta u = f$ su \mathbb{R}^n con $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$,
- esistenza e unicità di una soluzione di un problema ai limiti della forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow \ell & \text{per } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

con $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $\ell \in \mathbb{R}$ e $n \geq 3$,

- esistenza di una soluzione di (3.1) quando Ω è un dominio limitato regolare di \mathbb{R}^n e f è una data funzione lipschitziana in Ω .

In tutti i casi la soluzione di (3.1) è espressa mediante la formula

$$u(x) = \int_{\Omega} G(y-x)f(y) dy$$

dove G è la cosiddetta *soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace* o *funzione di Green per il laplaciano* su tutto lo spazio.

La costruzione di G è il primo passo del ragionamento e viene presentata nella sezione 3.1. Una proprietà chiave di G è data dall'indentità di Stokes, discussa nella sezione 3.2. Tale indentità si presta ad una lettura significativa nell'ambito dell'elettrostatica (cfr. sezione 3.3).

I risultati relativi all'equazione di Poisson su \mathbb{R}^n sono presentati nella sezione 3.4, mentre lo studio dell'equazione di Poisson su dominio Ω limitato è sviluppato in due passi: dapprima con dato f di classe C^2 nella sezione 3.5, e quindi con dato f lipschitziano nella sezione 3.6.

3.1 Soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace

Definizione 3.1 Chiamiamo *soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace su \mathbb{R}^n* una funzione $u: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ che verifichi le seguenti proprietà:

- (i) u è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- (ii) u è radialmente simmetrica, cioè della forma $u(x) = v(|x|)$, essendo v una funzione da $(0, \infty)$ in \mathbb{R} ;

- (iii) $\int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = -1$.

Nella condizione (iii) ∂B_1 è la frontiera della palla unitaria n -dimensionale, cioè $\partial B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ è la derivata normale di u che, per la regolarità di u e tenuto conto del dominio di integrazione, si può calcolare mediante la formula

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x) = \nabla u(x) \cdot x \quad \forall x \in \partial B_1. \quad (3.2)$$

L'integrale superficiale che compare nella condizione (iii) rappresenta il flusso del campo vettoriale definito da ∇u attraverso la superficie ∂B_1 . Come vedremo più avanti, tale condizione esprime il fatto che nell'origine è presente una sorgente puntiforme di intensità unitaria del campo vettoriale stesso.

Osserviamo inoltre che le funzioni costanti, che verificano banalmente le prime due condizioni, non soddisfano la terza.

Teorema 3.2 *La funzione*

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

è una soluzione fondamentale per l'equazione di Laplace su \mathbb{R}^n . La costante ω_n è il volume della palla unitaria in \mathbb{R}^n (cfr. notazioni e sezione 2.4). Ogni altra soluzione fondamentale secondo la definizione 3.1 differisce da G per una costante additiva.

Si noti che per $n \geq 3$ la funzione G è positiva e, tra tutte le possibili soluzioni fondamentali, è l'unica che tende a zero all'infinito. La funzione G è spesso chiamata **funzione di Green** per il laplaciano su \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Che G sia soluzione fondamentale si può verificare mediante un calcolo diretto. Vediamo piuttosto che ogni soluzione fondamentale è della forma $G + \text{costante}$. Cerchiamo tutte le funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ che siano radialmente simmetriche cioè della forma

$$u(x) = v(r) \quad \text{dove } r = |x|.$$

Tenuto conto di (1.10) calcoliamo

$$u_{x_i}(x) = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i}(x) = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

e quindi

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Grazie a questo calcolo, l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ diventa l'equazione differenziale ordinaria

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0.$$

Si tratta di un'equazione lineare, risolvibile esplicitamente. Infatti, posto $w = v'$, otteniamo l'equazione

$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$

la cui soluzione è

$$w(r) = C \exp\left(-\int \frac{n-1}{r} dr\right) = Ce^{-(n-1)\log r} = \frac{C}{r^{n-1}}$$

con C costante reale. Essendo $v' = w$, troviamo infine

$$v(r) = \begin{cases} a \log r + b & \text{se } n = 2 \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

con a e b costanti reali. Pertanto le funzioni

$$u(x) = \begin{cases} a \log |x| + b & \text{se } n = 2 \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + b & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

sono tutte e sole le soluzioni radialmente simmetriche dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La costante a va fissata imponendo la condizione (iii) nella definizione di soluzione fondamentale. Siccome u è radialmente simmetrica, tenuto conto di (3.2) abbiamo che per ogni $x \in \partial B_1$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = v'(1)$$

e quindi

$$\int_{\partial B_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = n\omega_n v'(1).$$

Se $n = 2$, la condizione (iii) diventa $-1 = 2\pi a$. Se $n \geq 3$ si ottiene invece l'equazione $-1 = -n\omega_n(n-2)a$. Pertanto in tutti i casi $u(x) = G(x) + b$. \square

Completiamo questa sezione discutendo le proprietà di integrabilità della funzione di Green. Iniziamo con un'utile definizione: una funzione misurabile $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice **localmente integrabile su \mathbb{R}^n** se

$$\int_{B_R} |f(x)| dx < \infty \quad \forall R > 0$$

dove, come al solito, B_R denota la palla n -dimensionale di raggio R e centrata nell'origine e gli integrali sono da intendere nel senso di Lebesgue. La classe delle funzioni localmente integrabili su \mathbb{R}^n verrà denotata $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Si può verificare che una funzione è localmente integrabile su \mathbb{R}^n se e solo se è integrabile su ogni compatto di \mathbb{R}^n .

Ovviamente ogni funzione continua su \mathbb{R}^n risulta localmente integrabile su \mathbb{R}^n . La soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è singolare nell'origine e possiede le seguenti proprietà di integrabilità.

Lemma 3.3 *La funzione di Green G è localmente integrabile su \mathbb{R}^n ma non è integrabile su \mathbb{R}^n .*

Dimostrazione. Per $n \geq 3$ si calcola

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |G(x)| dx &= \int_0^R \left(\int_{\partial B_r} |G(x)| d\sigma_x \right) dr \\ &= \int_0^R \frac{|\partial B_r|}{n(n-2)\omega_n r^{n-2}} dr = \int_0^R \frac{r}{n-2} dr = \frac{R^2}{2(n-2)}. \end{aligned}$$

Ciò prova entrambi gli enunciati. Il calcolo per $n = 2$ è lasciato come esercizio. \square

3.2 Identità di Stokes

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$G^x(y) = G(y-x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\},$$

dove G è la funzione di Green per l'equazione di Laplace su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Osserviamo che G^x è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. La funzione G^x si chiama *soluzione fondamentale con polo in x* .

Teorema 3.4 (Identità di Stokes) *Sia Ω un dominio limitato e regolare di \mathbb{R}^n . Per ogni funzione $f \in C^2(\bar{\Omega})$ e per ogni $x \in \Omega$ vale che*

$$f(x) = - \int_{\Omega} G^x(y) \Delta f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(f(y) \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) - G^x(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma_y.$$

Per provare il teorema 3.4 ci serve il seguente risultato ausiliario.

Lemma 3.5 (Formola di Gauss-Green) *Sia Ω un dominio limitato e regolare di \mathbb{R}^n . Per ogni coppia di funzione $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$ vale che*

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Dimostrazione. Definiamo $F = f \nabla g - g \nabla f$ e osserviamo che $F \in C^1(\bar{\Omega})$ e $\operatorname{div} F = f \Delta g - g \Delta f$. Quindi basta applicare il teorema della divergenza (teorema 1.4) per ottenere l'identità voluta. \square

Dimostrazione dell'identità di Stokes. Applichiamo la formola di Gauss-Green considerando il dominio $D_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ e le funzioni f e G^x e troviamo che

$$\int_{D_\varepsilon} (f(y) \Delta G^x(y) - G^x(y) \Delta f(y)) dy = \int_{\partial D_\varepsilon} \left(f \frac{\partial G^x}{\partial \nu} - G^x \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Siccome G^x è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ e $D_\varepsilon \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, si ha che

$$\int_{D_\varepsilon} f(y) \Delta G^x(y) dy = 0.$$

Inoltre $\partial D_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x)$ e quindi

$$-\int_{\Omega} G^x(y)\Delta f(y) dy + \int_{B_\varepsilon(x)} G^x(y)\Delta f(y) dy = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial G^x}{\partial \nu} - G^x \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma \\ + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(f \frac{\partial G^x}{\partial \nu} - G^x \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Per arrivare alla formula finale andremo a provare che, passando al limite $\varepsilon \rightarrow 0$ risulta

$$\int_{B_\varepsilon(x)} G^x(y)\Delta f(y) dy \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f \frac{\partial G^x}{\partial \nu} d\sigma \rightarrow f(x) \quad (3.4)$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} G^x \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Verifica di (3.3). Si ha che

$$\left| \int_{B_\varepsilon(x)} G^x(y)\Delta f(y) dy \right| \leq \|\Delta f\| \int_{B_\varepsilon(x)} |G^x(y)| dy = \|\Delta f\| \int_{B_\varepsilon} |G(y)| dy$$

dove in generale $\|\varphi\|$ denota la norma dell'estremo superiore di φ . Siccome G è integrabile in ogni intorno dell'origine, per la proprietà di assoluta integrabilità dell'integrale, si ottiene che $\int_{B_\varepsilon} |G(y)| dy \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Verifica di (3.4). Effettuando una traslazione si ha che

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y) \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon} f(y+x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(y) d\sigma_y.$$

Osserviamo che $\frac{\partial G}{\partial \nu}(y)$ è la derivata direzionale di G in $y \in \partial B_\varepsilon$ lungo il versore $\nu(y)$ normale a ∂B_ε e diretto verso l'esterno di D_ε cioè verso l'interno di B_ε . Dunque

$$\nu(y) = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$$

e quindi

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(y) = \nabla G(y) \cdot \nu(y) = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

Così arriviamo a trovare che

$$\int_{\partial B_\varepsilon} f(y+x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(y) d\sigma_y = \int_{\partial B_\varepsilon} f(y+x) d\sigma_y \rightarrow f(x) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Verifica di (3.5). Si ha che

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G^x(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) d\sigma_y \right| \leq \|\nabla f\| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} |G^x(y)| d\sigma_y = \|\nabla f\| \int_{\partial B_\varepsilon} |G(y)| d\sigma_y.$$

Un calcolo diretto ci dà

$$\int_{\partial B_\varepsilon} |G(y)| d\sigma_y = \frac{|\partial B_\varepsilon|}{n(n-2)\omega_n \varepsilon^{n-2}} = \frac{\varepsilon}{n-2} \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0. \quad \square$$

Corollario 3.6 *Dato un dominio limitato e regolare Ω in \mathbb{R}^n si ha che*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(y) d\sigma_y = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \notin \bar{\Omega} \\ -1 & \text{se } 0 \in \Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo $0 \in \Omega$. Applichiamo l'identità di Stokes prendendo $f \equiv 1$ e $x = 0$ e otteniamo che $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma = -1$. Se invece $0 \notin \bar{\Omega}$ possiamo applicare la formula di Gauss-Green con $f = G$ (armonica in Ω e di classe C^2 in $\bar{\Omega}$, in quanto la singolarità di G sta fuori da $\bar{\Omega}$) e $g \equiv 1$. Così troviamo che $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma = 0$. \square

Siccome l'integrale di superficie $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma$ rappresenta il flusso associato a G attraverso $\partial\Omega$, il fatto che tale integrale valga -1 se Ω contiene l'origine, indipendentemente dalla dimensione e forma di Ω sta a significare che la funzione di Green descrive una situazione in cui è presente una sorgente puntiforme unitaria (con segno negativo) posta nell'origine.

3.3 Interpretazione fisica dell'identità di Stokes

È noto dall'elettrostatica che una carica puntiforme di intensità q posta in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^3$ genera un campo elettrico

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}$$

(in unità normalizzate in modo che la costante dielettrica nel vuoto valga 1). Il campo elettrico è esprimibile come gradiente di una funzione scalare. Più precisamente

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla V(x)$$

dove

$$V(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}.$$

La funzione V è detta potenziale elettrostatico generato dalla carica q posta in x_0 .

L'analogo n -dimensionale si ottiene considerando il campo vettoriale

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{n\omega_n} \frac{x - x_0}{|x - x_0|^n}.$$

Anche in questo caso il campo \mathbf{E} si può rappresentare come gradiente di un potenziale. In particolare $\mathbf{E} = -\nabla V$, con

$$V(x) = \begin{cases} \frac{q}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \quad \text{se } n \neq 2 \\ -\frac{q}{2\pi} \log |x - x_0| & \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\} \quad \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Possiamo riconoscere che il potenziale elettrostatico in dimensione n generato da una carica puntiforme unitaria posta in un fissato punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è la funzione di Green G^{x_0} .

Supponiamo di avere una distribuzione di carica in un dominio Ω in \mathbb{R}^n la cui densità di carica è definita da una funzione $\rho_v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'integrale (volumetrico)

$$U(\Omega, x, \rho_v) = \int_{\Omega} \rho(y) G^x(y) dy$$

corrisponde al *potenziale elettrostatico nel punto $x \in \Omega$ generato da una distribuzione di carica in Ω con densità (volumetrica) ρ_v* .

Consideriamo ora il caso di una distribuzione di carica su una superficie regolare $(n-1)$ -dimensionale orientabile Σ in \mathbb{R}^n la cui densità di carica è definita da una funzione $\rho_s: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Si chiama *potenziale (di strato semplice) generato in un punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ dalla distribuzione di carica ρ_s su Σ* la funzione definita come integrale di superficie nel modo seguente

$$V(\Sigma, x, \rho_s) = \int_{\Sigma} G^y(x) \rho_s(y) d\sigma_y = \int_{\Sigma} G^x(y) \rho_s(y) d\sigma_y \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma).$$

Consideriamo ora il caso di dipoli. Ricordiamo che un dipolo elettrico è costituito da due cariche di uguale intensità q ma segno opposto, collocate in due punti x_0^- e x_0^+ . Poniamo

$$\delta = |x_0^+ - x_0^-|, \quad \nu = \frac{x_0^+ - x_0^-}{|x_0^+ - x_0^-|}, \quad x_0 = \frac{x_0^+ + x_0^-}{2}$$

cosicché

$$x_0^{\pm} = x_0 \pm \frac{\delta}{2} \nu.$$

Il campo elettrico (in dimensione n) risulta essere

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{n\omega_n} \left(\frac{x - x_0^+}{|x - x_0^+|^n} - \frac{x - x_0^-}{|x - x_0^-|^n} \right)$$

e il corrispondente potenziale è

$$V(x) = q \left(G^{x_0^+}(x) - G^{x_0^-}(x) \right).$$

In realtà siamo interessati all'espressione di V in punti la cui distanza da x_0 è molto grande rispetto a δ . Facendo i conti nel caso $n \geq 3$ si trova che

$$V(x) = \frac{q}{n(n-2)\omega_n} \left(\frac{1}{|x - x_0^+|^{n-2}} - \frac{1}{|x - x_0^-|^{n-2}} \right)$$

con

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - x_0^{\pm}|^{n-2}} &= \frac{1}{\left(|x - x_0|^2 \mp \delta \nu \cdot (x - x_0) + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{\frac{n-2}{2}}} \\ &= \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} \frac{1}{\left(1 \mp \frac{\delta \nu \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|^2} + \frac{\delta^2}{4|x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}} \\ &\approx \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} \left(1 \pm \frac{n-2}{2} \frac{\delta \nu \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|^2} \right). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo considerato $\frac{\delta}{|x-x_0|} \ll 1$ e abbiamo sfruttato l'espansione $(1+t)^a \approx 1+at$ per $|t| \ll 1$ e $a \in \mathbb{R}$ costante fissata. Così arriviamo a trovare che

$$V(x) \approx \frac{q}{n\omega_n} \frac{\delta\nu \cdot (x-x_0)}{|x-x_0|^n}$$

(lo stesso risultato si trova anche per $n=2$). La funzione

$$W(x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{p \cdot (x-x_0)}{|x-x_0|^n}$$

definisce il potenziale generato da un dipolo di momento $p = q\delta\nu$ posto in x_0 , in un punto $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x-x_0| \gg \delta$.

Infine consideriamo il caso di una distribuzione superficiale di dipoli. Su una superficie regolare $(n-1)$ -dimensionale Σ in \mathbb{R}^n si ha una distribuzione di dipoli di densità $\rho_d: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Ciò corrisponde alla situazione di una doppia distribuzione di carica, una posta in $\Sigma^+ = \{y + \frac{1}{2}\delta\nu(y) \mid y \in \Sigma\}$ con densità

$$\rho_d^+(y) = \rho_d(y - \frac{1}{2}\delta\nu(y)) \quad \forall y \in \Sigma^+,$$

l'altra in $\Sigma^- = \{y - \frac{1}{2}\delta\nu(y) \mid y \in \Sigma\}$ con densità

$$\rho_d^-(y) = -\rho_d(y + \frac{1}{2}\delta\nu(y)) \quad \forall y \in \Sigma^-.$$

Il potenziale corrispondente è dato da

$$\begin{aligned} V(\Sigma^+, x, \rho_d^+) + V(\Sigma^-, x, \rho_d^-) &= \int_{\Sigma^+} G^y(x) \rho_d^+(y) d\sigma_y + \int_{\Sigma^-} G^y(x) \rho_d^-(y) d\sigma_y \\ &= \int_{\Sigma} \rho_d(y) (G(y + \frac{1}{2}\delta\nu(y) - x) - G(y - \frac{1}{2}\delta\nu(y) - x)) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Anche in questo caso siamo interessati ad un'espressione approssimata in punti $x \in \mathbb{R}^n$ la cui distanza da Σ è molto grande rispetto a δ . Con conti analoghi a quelli svolti nel caso di un dipolo semplice, si trova che

$$V(\Sigma^+, x, \rho_d^+) + V(\Sigma^-, x, \rho_d^-) \approx \frac{\delta}{n\omega_n} \int_{\Sigma} \rho_d(y) \frac{\nu(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^n} d\sigma_y$$

se $\text{dist}(x, \Sigma) \gg \delta$. Fissato $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, l'integrale di superficie

$$W(\Sigma, x, \rho_d) = -\frac{1}{n\omega_n} \int_{\Sigma} \rho_d(y) \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{|x-y|^n} d\sigma_y = -\int_{\Sigma} \rho_d(y) \frac{\partial G^x(y)}{\partial \nu} d\sigma_y$$

definisce il cosiddetto *potenziale di doppio strato nel punto x generato da una distribuzione di dipoli presente sulla superficie Σ con densità ρ_d* .

In base a quanto discusso finora, usando le notazioni sopra introdotte, l'identità di Stokes si può riscrivere in questo modo:

$$u(x) = U(\Omega, x, \rho_v) + V(\partial\Omega, x, \rho_s) + W(\partial\Omega, x, \rho_d)$$

dove

$$\rho_v = -\Delta u \text{ in } \Omega, \quad \rho_s = \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ su } \partial\Omega, \quad \rho_d = u \text{ su } \partial\Omega,$$

che esprime il fatto che il potenziale elettrostatico in un punto $x \in \Omega$ si ottiene come somma del potenziale volumetrico generato da una distribuzione di carica in Ω con densità $-\Delta u$, e dei potenziali di strato semplice e di strato doppio relativi rispettivamente ad uno strato di cariche su $\partial\Omega$ di densità $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ e ad uno strato di dipoli su $\partial\Omega$ di densità u .

3.4 Equazione di Poisson su \mathbb{R}^n con dato C_c^2

Teorema 3.7 Per ogni $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ la funzione

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G^x(y) f(y) dy$$

è di classe C^2 in \mathbb{R}^n ed è soluzione di $-\Delta u = f$ su \mathbb{R}^n . Inoltre, in dimensione $n \geq 3$ si ha che $u(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Siccome G^x è integrabile sui compatti ed f ha supporto compatto, la funzione u è ben definita in \mathbb{R}^n . Per dimostrare che u è di classe C^2 e calcolare le derivate parziali, non possiamo scambiare le derivate (rispetto a x) con l'integrale, altrimenti arriveremmo alla conclusione sbagliata che $\Delta u = 0$. Dobbiamo prima scaricare la variabile x sulla funzione f scrivendo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G^x(y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) f(x+y) dy$$

(nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambio di variabile $y \mapsto y+x$ considerando x come vettore costante fissato). A questo punto, sfruttando la regolarità di f e il fatto che G è integrabile sui compatti, possiamo calcolare le derivate parziali. Iniziamo a dimostrare che esiste la derivata parziale $u_{x_i}(x)$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $i = 1, \dots, n$. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$ e l'indice i , definiamo

$$\varphi(t, y) = f(x+y+te_i)G(y) \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

dove e_i denota l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n . Essendo f a supporto compatto, avendo fissato $x \in \mathbb{R}^n$ e prendendo t in un intorno limitato di 0, ad esempio $t \in (-1, 1)$, esiste $R > 0$ tale per cui le funzioni $y \mapsto f(x+y+te_i)$, e quindi anche $\varphi(t, \cdot)$, hanno supporto nella palla $B_R(0)$ per ogni $t \in (-1, 1)$. Dunque possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(y) f(x+y+te_i) dy = \int_{B_R(0)} \varphi(t, y) dy.$$

Intendiamo applicare il teorema di derivazione di integrali dipendenti da parametro alla funzione

$$F(t) = \int_{B_R(0)} \varphi(t, y) dy$$

nel punto $t = 0$. Ciò è possibile perché:

(i) $\varphi(t, \cdot)$ è integrabile su $B_R(0)$; infatti $|\varphi(t, y)| \leq \|f\| |G(y)|$ dove $\|f\| = \max_{y \in \mathbb{R}^n} |f(y)|$ e sappiamo che G è integrabile su $B_R(0)$.

(ii) esistono le derivate

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = G(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(x + y + te_i)$$

e per ogni $(t, y) \in (-1, 1) \times B_R(0)$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) \right| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial y_i} \right\| |G(y)| \quad \text{dove} \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial y_i} \right\| = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) \right| < \infty.$$

Quindi F è derivabile in 0 e

$$F'(0) = \int_{B_R(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, y) dy.$$

Riconosciamo ora che

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x + te_i) - u(x)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

e quindi otteniamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(x + y) dy.$$

Allo stesso modo, sfruttando il fatto che f è di classe C^2 e ha supporto compatto, si prova che esistono anche le derivate parziali del secondo ordine e valgono

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(x + y) dy.$$

Si può anche verificare che le funzioni $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ risultano continue su \mathbb{R}^n , cioè che u è di classe C^2 su \mathbb{R}^n (lasciamo questo punto come esercizio). Dall'espressione delle derivate parziali del second'ordine deduciamo in particolare che

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y) \Delta f(x + y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G(y - x) \Delta f(y) dy.$$

Fissato $x \in \mathbb{R}^n$ possiamo trovare una palla B_R contenente x e il supporto di f . Così abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} G^x(y) \Delta f(y) dy = \int_{B_R} G^x(y) \Delta f(y) dy$$

e, per l'identità di Stokes, essendo $f = 0$ e $\nabla f = 0$ su ∂B_R , otteniamo che

$$\Delta u(x) = \int_{B_R} G^x(y) \Delta f(y) dy = -f(x).$$

Studiamo infine il comportamento di $u(x)$ per $|x| \rightarrow \infty$. Sia B_R una palla contenente il supporto di f . Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| > R$ si ha che

$$|u(x)| = \left| \int_{B_R} G(x - y) f(y) dy \right| \leq \|f\| \left| \int_{B_R(x)} G(y) dy \right| \leq \|f\| |B_R| \sup_{|y| > |x| - R} |G(y)|.$$

In dimensione $n \geq 3$ vale che $G(y) \rightarrow 0$ per $|y| \rightarrow \infty$ e dunque $u(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$. Si noti che tale ragionamento non vale in dimensione 2 perché in questo caso la funzione di Green non va a zero all'infinito. \square

Vediamo ora un risultato di esistenza e unicità per un problema relativo all'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n con dato di classe C^2 a supporto compatto e condizione limite all'infinito. Si osservi che tale risultato vale solo in dimensione maggiore o uguale a 3.

Teorema 3.8 *Supponiamo $n \geq 3$. Data una funzione $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ e una costante $\ell \in \mathbb{R}$ il problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \mathbb{R}^n \\ u(x) \rightarrow \ell & \text{per } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione.

Dimostrazione. Per il teorema 3.7, la funzione

$$u(x) = \ell + \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)f(y) dy$$

verifica il problema considerato. Supponiamo che \tilde{u} sia un'altra soluzione dello stesso problema. Allora la funzione $v = u - \tilde{u}$ verifica l'equazione di Laplace su \mathbb{R}^n ed è limitata, perché $v(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$. Per il teorema di Liouville v è costante. Più precisamente v assume il valore limite all'infinito, cioè v è identicamente nulla. Dunque $u = \tilde{u}$ su \mathbb{R}^n . \square

3.5 Equazione di Poisson su dominio limitato con dato C^2

Teorema 3.9 *Dato un dominio limitato Ω in \mathbb{R}^n , per ogni $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ la funzione*

$$u(x) = \int_{\Omega} G^x(y)f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

sta in $C(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega)$ ed è soluzione di $-\Delta u = f$ in Ω .

Dimostrazione. La funzione u è ben definita in \mathbb{R}^n perché f è continua e limitata nel compatto $\overline{\Omega}$ e G^x è integrabile sui compatti. Risulta inoltre continua in \mathbb{R}^n . Infatti, fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e, presa una qualunque successione $x_k \rightarrow x_0$, proviamo che $u(x_k) \rightarrow u(x_0)$. Fissiamo un arbitrario numero $\varepsilon > 0$ e scriviamo

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} G^x(y)f(y) dy}_{v(x)} + \underbrace{\int_{\Omega \cap B_\varepsilon(x_0)} G^x(y)f(y) dy}_{w(x)} .$$

Esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|x_k - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $k \geq k_0$. Allora per $y \in \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)$ si ha che

$$|y - x_k| \geq |y - x_0| - |x_k - x_0| > \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi, essendo f limitata in $\bar{\Omega}$, abbiamo che $|G^{x_k}(y)f(y)| \leq C_\varepsilon$ per ogni $y \in \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)$ e per ogni $k \geq k_0$, essendo C_ε indipendente da k . Inoltre $G^{x_k}(y)f(y) \rightarrow G^{x_0}(y)f(y)$ per $k \rightarrow \infty$, uniformemente in $y \in \bar{\Omega} \setminus B_\varepsilon(x_0)$. Ciò implica che

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} G^{x_k}(y)f(y) dy \rightarrow \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} G^{x_0}(y)f(y) dy \quad \text{cioè } v(x_k) \rightarrow v(x_0) \quad \text{per } k \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Invece

$$|w(x_k)| \leq \|f\| \int_{B_\varepsilon(x_0)} |G^{x_k}(y)| dy = \|f\| \int_{B_\varepsilon(x_0-x_k)} |G(y)| dy \leq \|f\| \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |G(y)| dy$$

perché se $k \geq k_0$ allora $B_\varepsilon(x_0 - x_k) \subset B_{\varepsilon+|x_0-x_k|}(0) \subset B_{2\varepsilon}(0)$. Si noti che la stessa stima vale anche con x_0 al posto di x_k . Quindi

$$|u(x_k) - u(x_0)| \leq |v(x_k) - v(x_0)| + |w(x_k)| + |w(x_0)| \leq |v(x_k) - v(x_0)| + 2\|f\| \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |G(y)| dy.$$

Allora, usando (3.6),

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |u(x_k) - u(x_0)| \leq 2\|f\| \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |G(y)| dy.$$

Ora passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. Siccome G è localmente integrabile su \mathbb{R}^n , si ha che

$$\int_{B_{2\varepsilon}(0)} |G(y)| dy \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Quindi $\limsup |u(x_k) - u(x_0)| \leq 0$ e ciò porta facilmente a concludere che $u(x_k) \rightarrow u(x_0)$ per $k \rightarrow \infty$. Proviamo ora che $u \in C^2(\Omega)$ e $-\Delta u = f$ in Ω . Fissiamo un punto $x_0 \in \Omega$ e introduciamo una funzione cut-off $\varphi \in C_c^2(\Omega)$ tale che $\varphi = 1$ in un intorno $B_r(x_0) \subset \Omega$, con $r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Definiamo

$$f_1 = \varphi f \quad \text{e} \quad f_2 = (1 - \varphi)f.$$

Siccome f_1 sta in $C_c^2(\Omega)$ e quindi anche in $C_c^2(\mathbb{R}^n)$, per il teorema 3.7 la funzione

$$u_1(x) = \int_{\Omega} G^x(y)f_1(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G^x(y)f_1(y) dy$$

è ben definita e di classe C^2 in \mathbb{R}^n e risolve $\Delta u_1 = -f_1$ in \mathbb{R}^n . In particolare $\Delta u_1(x) = -f(x)$ per ogni $x \in B_r(x_0)$. Consideriamo ora la funzione

$$u_2(x) = \int_{\Omega} G^x(y)f_2(y) dy = \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} G^x(y)f_2(y) dy.$$

Se $x \in B_r(x_0)$, siccome $G^x \in C^2(\bar{\Omega} \setminus B_r(x_0))$ e dipende in modo C^2 da x , possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per calcolare

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} u_2(x) &= \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \partial_{x_i} G^x(y)f_2(y) dy, \\ \partial_{x_i x_j} u_2(x) &= \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \partial_{x_i x_j} G^x(y)f_2(y) dy \end{aligned}$$

per ogni $x \in B_r(x_0)$. Risulta che $u_2 \in C^2(B_r(x_0))$ e, in particolare,

$$\Delta u_2(x) = \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \Delta_x G^x(y) f_2(y) dy = \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \Delta G(y-x) f_2(y) dy = 0$$

per ogni $x \in B_r(x_0)$. Siccome $u = u_1 + u_2$, deduciamo che $u \in C^2(B_r(x_0))$ e $\Delta u(x) = -f(x)$ per ogni $x \in B_r(x_0)$. Per l'arbitrarietà di x_0 , otteniamo che $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = -f$ in Ω . \square

3.6 Equazione di Poisson con dato lipschitziano

In questa sezione intendiamo studiare l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ in un dominio limitato Ω di \mathbb{R}^n , quando il dato f si suppone lipschitziano in Ω . Ricordiamo che una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice lipschitziana in Ω se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

La funzione candidata ad essere soluzione dell'equazione di Poisson è ancora

$$u(x) = \int_{\Omega} G^x(y) f(y) dy \quad (3.7)$$

dove G^x è la funzione di Green con polo in x . Tale funzione risulta ben definita in \mathbb{R}^n ma per calcolarne le derivate e in particolare il laplaciano non possiamo procedere come nei casi visti nei capitoli precedenti, in quanto ora la funzione f è solo lipschitziana. Occorre quindi sviluppare il discorso mediante un procedimento di approssimazione relativamente laborioso. Iniziamo ad enunciare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.10 *Sia Ω un aperto limitato e regolare di \mathbb{R}^n . Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana in Ω allora la funzione*

$$u(x) = \int_{\Omega} G^x(y) f(y) dy$$

è ben definita in \mathbb{R}^n , è di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ e di classe C^2 in Ω e

$$\partial_{x_i x_j} u(x) = \int_{\Omega} \partial_{y_i y_j} G^x(y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{y_i} G^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad \forall x \in \Omega$$

dove $\nu_j(y)$ è la j -esima componente del vettore $\nu(y) =$ normale esterna a $\partial\Omega$ nel punto y . Inoltre u risolve l'equazione $\Delta u = -f$ in Ω .

Notiamo che il dominio Ω si assume con frontiera regolare, ipotesi che non viene fatta nel teorema 3.9 in cui si assume f di classe C^2 . Prima di procedere con la dimostrazione, diamo alcuni risultati preliminari.

Osservazione 3.11 *Ogni funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana su un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è limitata. Infatti, fissato un punto $x_0 \in \Omega$ si ha che $|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq L|x - x_0| + |f(x_0)| \leq L \text{diam } \Omega + |f(x_0)|$ per ogni $x \in \Omega$. Si può inoltre dimostrare che f ammette un'unica estensione continua sulla chiusura di Ω .*

Lemma 3.12 *Sia G la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e sia G_ε la sua ε -regolarizzata, costruita mediante la famiglia di mollificatori radialmente simmetrici introdotta nell'esempio 2.20. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione G_ε è di classe C^∞ in \mathbb{R}^n , radialmente simmetrica e $G_\varepsilon(x) = G(x)$ se $|x| > \varepsilon$. Inoltre*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G(x) - G_\varepsilon(x)| dx \rightarrow 0 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla G(x) - \nabla G_\varepsilon(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

Infine le funzioni $x \mapsto |x| \partial_{x_i x_j} G(x)$ sono localmente integrabili su \mathbb{R}^n e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_i x_j} G(x) - \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon(x)| |x| dx \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Lemma 3.13 (condizione sufficiente per la derivabilità) *Sia D uno dominio limitato in \mathbb{R}^n e sia $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ una famiglia di funzioni in $C^1(\overline{D})$ tale che:*

(i) $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ puntualmente in D per $\varepsilon \rightarrow 0$;

(ii) $\partial_i \varphi_\varepsilon \rightarrow \psi$ uniformemente in \overline{D} per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Allora per ogni $x \in \overline{D}$ esiste $\partial_i \varphi(x) = \psi(x)$ e $\partial_i \varphi \in C(\overline{D})$.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in D$. Indichiamo con e_i l' i -esimo versore della base canonica di \mathbb{R}^n . Per ogni $t \neq 0$ con $|t|$ sufficientemente piccolo possiamo scrivere

$$\frac{\varphi_\varepsilon(x + te_i) - \varphi_\varepsilon(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} \varphi_\varepsilon(x + se_i) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \partial_i \varphi_\varepsilon(x + se_i) ds.$$

Passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e, sfruttando le ipotesi (i) e (ii), otteniamo che

$$\frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \psi(x + se_i) ds.$$

Vogliamo ora passare al limite per $t \rightarrow 0$ e provare che

$$\frac{1}{t} \int_0^t \psi(x + se_i) ds \rightarrow \psi(x) \quad \text{per } t \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

A tale scopo sfruttiamo il fatto che ψ è continua in \overline{D} , in quanto limite uniforme di funzioni continue in \overline{D} . Quindi procediamo come nella dimostrazione del teorema 2.14. Cioè, essendo ψ continua in x ed essendo x punto interno di D , fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\psi(x + se_i) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \forall |s| < \delta.$$

Quindi, per $0 < |t| < \delta$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t} \int_0^t \psi(x + se_i) ds - \psi(x) \right| &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t (\psi(x + se_i) - \psi(x)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|t|} \int_0^{|t|} |\psi(x + se_i) - \psi(x)| ds \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

cioè vale (3.10). Abbiamo così provato che

$$\frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} \rightarrow \psi(x) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

cioè esiste $\partial_i \varphi(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in D$. Essendo ψ continua in \overline{D} , segue che $\partial_i \varphi$ ammette estensione continua in \overline{D} , coincidente con ψ . \square

Dimostrazione del teorema 3.10. Essendo f limitata in Ω , in quanto lipschitziana (cfr. osservazione 3.11), si ha che

$$\int_{\Omega} |G^x(y)f(y)| dy \leq \|f\| \int_{\Omega} |G^x(y)| dy.$$

Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, dato che Ω è limitato, esiste $R > 0$ tale che $|y - x| < R$ per ogni $y \in \Omega$. Quindi, per la locale integrabilità di G (cfr. lemma 3.3)

$$\int_{\Omega} |G^x(y)| dy = \int_{\Omega} |G(y - x)| dy \leq \int_{B_R} |G(y)| dy < \infty.$$

Pertanto u è ben definita in \mathbb{R}^n . Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione G_ε del lemma 3.12 e definiamo

$$G_\varepsilon^x(y) = G_\varepsilon(y - x) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} G_\varepsilon^x(y)f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Osserviamo in particolare che

$$G_\varepsilon^x(y) = G^x(y) \quad \text{se } |y - x| > \varepsilon.$$

Siccome $G_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ anche $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial_{x_i} u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i} G_\varepsilon^x(y)f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Poniamo

$$v_i(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i} G(y - x)f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Osserviamo che v_i è ben definita in \mathbb{R}^n , in quanto

$$\int_{\Omega} |\partial_{x_i} G^x(y)f(y)| dy \leq \|f\| \int_{\Omega} |\partial_{x_i} G^x(y)| dy < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

perché $|\nabla G|$ è localmente integrabile su \mathbb{R}^n (cfr. esercizio 2, punto (i)). Vogliamo ora applicare il lemma 3.13 al caso in cui $\varphi_\varepsilon = u_\varepsilon$, $\varphi = u$, $\psi = v_i$. Dobbiamo provare che

- (i) $u_\varepsilon \rightarrow u$ puntualmente in Ω ;
- (ii) $\partial_i u_\varepsilon \rightarrow v_i$ uniformemente in $\overline{\Omega}$.

La parte (i) segue dalla stima seguente

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{\Omega} G_\varepsilon^x(y) f(y) dy - \int_{\Omega} G^x(y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_\varepsilon(x) \cap \Omega} (G_\varepsilon^x(y) - G^x(y)) f(y) dy \right| \leq \|f\| \int_{B_\varepsilon(0)} |G_\varepsilon(z) - G(z)| dz \end{aligned}$$

e dal primo limite in (3.8). La parte (ii) si prova in modo analogo, usando la stima

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} u_\varepsilon(x) - v_i(x)| &= \left| \int_{\Omega} \partial_{x_i} G_\varepsilon^x(y) f(y) dy - \int_{\Omega} \partial_{x_i} G^x(y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_\varepsilon(x) \cap \Omega} (\partial_{x_i} G_\varepsilon^x(y) - \partial_{x_i} G^x(y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \|f\| \int_{B_\varepsilon(0)} |\nabla G_\varepsilon(z) - \nabla G(z)| dz \end{aligned}$$

e il secondo limite in (3.8). Possiamo quindi concludere che $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e

$$\partial_i u(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i} G^x(y) f(y) dy \quad (x \in \overline{\Omega}).$$

Vogliamo ora provare che u ammette derivate parziali del secondo ordine, continue in Ω . Per quanto riguarda le derivate delle u_ε basta applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per ottenere che

$$\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Di nuovo vogliamo applicare il lemma 3.13 sulla derivabilità, prendendo stavolta $\varphi_\varepsilon = \partial_{x_i} u_\varepsilon$, $\varphi = \partial_{x_i} u$. Dobbiamo trovare il limite uniforme di $\partial_{x_j} \varphi_\varepsilon = \partial_{x_i x_j} u_\varepsilon$. Non va bene prendere

$$\psi(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G^x(y) f(y) dy$$

(altrimenti arriveremmo a concludere che $\Delta u = 0$). Ciò dipende dal fatto che le derivate del secondo ordine di G non sono localmente integrabili. Dobbiamo quindi valutare il limite di $\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon$ con maggior cautela. Se $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) dy &= - \int_{\Omega} \partial_{y_j} \partial_{x_i} G_\varepsilon^x(y) dy \quad (\text{perché } G_\varepsilon^x(y) = G_\varepsilon(y - x)) \\ &= - \int_{\partial\Omega} \partial_{x_i} G_\varepsilon^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad (\text{per il teorema della divergenza}) \\ &= - \int_{\partial\Omega} \partial_{x_i} G^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad (\text{perché } G_\varepsilon^x = G^x \text{ su } \partial\Omega) \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_{y_i} G^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad (\text{perché } G^x(y) = G(y - x)). \end{aligned}$$

Più precisamente, il secondo passaggio si ottiene applicando il teorema della divergenza al campo vettoriale $F(y) = \partial_{x_i} G^x(y) e_j$, essendo e_j il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n . Quindi, fissato $x \in \Omega$, se $\varepsilon \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$, scriviamo

$$\begin{aligned} \partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) f(y) dy - \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) f(x) dy + \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) f(x) dy \\ &= \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{y_i} G^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Questo calcolo ci suggerisce di prendere come limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ la funzione

$$\psi(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G^x(y) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{y_i} G^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y \quad (x \in \Omega).$$

Dobbiamo innanzitutto verificare che ψ è ben definita. A tale scopo notiamo che $\partial_{x_i x_j} G^x(y) = \partial_{y_i y_j} G^x(y)$ e sfruttiamo il fatto che f è lipschitziana in Ω . Quindi, detta L la costante di lipschitzianità, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\partial_{x_i x_j} G^x(y) (f(y) - f(x))| dy &\leq L \int_{\Omega} |\partial_{x_i x_j} G(y-x)| |y-x| dy \\ &\leq L \int_{B_R} |\partial_{z_i z_j} G(z)| |z| dz \end{aligned}$$

dove $R = 2 \text{diam} \Omega$. Siccome la funzione $z \mapsto |z| |\partial_{z_i z_j} G(z)|$ è localmente integrabile (cfr. lemma 3.12), deduciamo che ψ è ben definita in Ω . Osserviamo però che ψ non si può estendere a $\bar{\Omega}$. Per applicare il lemma 3.13, avendo già che $\varphi_\varepsilon = \partial_i u_\varepsilon \rightarrow \partial_i u = \varphi$ puntualmente (anzi, uniformemente) in Ω , resta da verificare che $\partial_j \varphi_\varepsilon \rightarrow \psi$ uniformemente sui compatti di Ω . Ciò è vero in quanto, preso un dominio $D \subset \Omega$ con $\bar{D} \subset \Omega$, si ha che $\text{dist}(D, \partial\Omega) > 0$. Quindi per ogni $\varepsilon \in (0, \text{dist}(D, \partial\Omega))$ si ha che $\bar{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$ e

$$\begin{aligned} |\partial_{x_j} \varphi_\varepsilon(x) - \psi(x)| &= \left| \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) (f(y) - f(x)) dy - \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G^x(y) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} (\partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) - \partial_{x_i x_j} G^x(y)) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq L \int_{B_\varepsilon(x)} |\partial_{x_i x_j} G_\varepsilon^x(y) - \partial_{x_i x_j} G^x(y)| |y-x| dy \\ &= L \int_{B_\varepsilon(0)} |\partial_{z_i z_j} G_\varepsilon(z) - \partial_{z_i z_j} G(z)| |z| dz. \end{aligned}$$

Quindi $\partial_{x_j} \varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \psi(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente in D , grazie a (3.9). Pertanto, grazie al lemma 3.13 applicato al dominio D , otteniamo che in ogni $x \in D$ esiste $\partial_{x_i x_j} u(x)$, data dalla formula

$$\partial_{x_i x_j} u(x) = \int_{\Omega} \partial_{x_i x_j} G^x(y) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{y_i} G^x(y) \nu_j(y) d\sigma_y. \quad (3.11)$$

Inoltre $\partial_{x_i x_j} u \in C(\bar{D})$. Siccome tali conclusioni valgono per ogni dominio D tale che $\bar{D} \subset \Omega$, possiamo dedurre che la formula (3.11) vale in ogni punto $x \in \Omega$ e $\partial_{x_i x_j} u \in C(\Omega)$. Così abbiamo

trovato che $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Infine verifichiamo che $\Delta u = -f$ in Ω . Per ogni $x \in \Omega$ si ha che

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i} u(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_{x_i x_i} G^x(y) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \partial_{y_i} G^x(y) \nu_i(y) d\sigma_y \\ &= \int_{\Omega} \Delta_y G^x(y) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \int_{\partial\Omega} D_y G^x(y) \cdot \nu(y) d\sigma_y \\ &= f(x) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(y-x) d\sigma_y = f(x) \int_{\partial(-x+\Omega)} \frac{\partial G}{\partial \nu}(y) d\sigma_y = -f(x). \end{aligned}$$

Per l'ultimo passaggio abbiamo usato il corollario 3.6, applicato prendendo come dominio l'insieme $-x + \Omega$ che contiene 0, in quanto $x \in \Omega$. \square

3.7 Esercizi

1. Si chiama **bilaplaciano** o **operatore biarmonico** l'operatore differenziale così definito $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.
 - (i) Scrivere l'operatore biarmonico in termini di derivate parziali e riconoscere che si tratta di un operatore del quart'ordine.
 - (ii) Trovare tutte le soluzioni *radiali* dell'equazione $\Delta^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. Sia G la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
 - (i) Verificare che $|\nabla G|$ è localmente integrabile.
 - (ii) Dati un dominio limitato Ω in \mathbb{R}^n e una funzione $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e posto

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x-y) f(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

provare che $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Sia G la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e sia G_ε la sua ε -regolarizzata, costruita mediante la famiglia di mollificatori radialmente simmetrici introdotta nell'esempio 2.20. Verificare che:
 - (i) $G_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Suggerimento: applicare il teorema di derivazione per integrali dipendenti da parametro).
 - (ii) G_ε è radialmente simmetrica.
 - (iii) $G_\varepsilon(x) = G(x)$ se $|x| > \varepsilon$ (Suggerimento: si veda la dimostrazione del teorema 2.17).
4. Sia u una soluzione dell'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ su \mathbb{R}^n con $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ assegnata. Dimostrare che in dimensione $n \geq 3$, se u è limitata, allora esiste finito $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x)$.

4 Problema di Dirichlet per il laplaciano

In questo capitolo studiamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

dove Ω è un dominio limitato di \mathbb{R}^n , $f \in C(\Omega)$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Il problema (4.1) si dice *problema di Dirichlet* ed è costituito dall'equazione di Poisson in un dato dominio, con l'aggiunta di una condizione "al contorno", cioè sulla frontiera del dominio, che nel caso in questione si chiama *condizione di Dirichlet*.

Chiamiamo *soluzione* del problema (4.1) una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che $-\Delta u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \Omega$ e $u(x) = g(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Nel caso particolare in cui $f \equiv 0$ il problema (4.1) si riduce a

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Una soluzione di (4.2) si chiama *estensione armonica di g su Ω* perché è una funzione armonica in Ω , continua in $\bar{\Omega}$, coincidente con g su $\partial\Omega$.

Il risultato principale di questo capitolo si riassume nel seguente enunciato.

Teorema 4.1 *Se Ω è un dominio limitato di \mathbb{R}^n soddisfacente una certa condizione (*) di ammissibilità, $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$, allora il problema (4.1) ammette una e una sola soluzione.*

La condizione (*) è una proprietà puramente geometrica, in cui si chiede che per ogni punto x della frontiera di Ω si possa trovare una palla chiusa B tale che $B \cap \bar{\Omega} = \{x\}$ (proprietà di sfera esterna). Tale condizione è soddisfatta ad esempio se Ω è un insieme convesso, in particolare una palla, o è un dominio di classe C^2 .

L'unicità di soluzione non richiede alcuna condizione su Ω , se non la limitatezza, e si prova mediante il principio del massimo, discusso nella sezione 2.8. Per quanto riguarda l'esistenza, si osserva innanzitutto che, tenuto conto di quanto già provato per l'equazione di Poisson su un dominio limitato, ci si può limitare a cercare soluzioni per il problema omogeneo (4.2), cioè ci si può ridurre a studiare il problema dell'estensione armonica. Questi risultati preliminari sono contenuti nella sezione 4.1.

Quindi si andrà ad esaminare il problema (4.2). Nella sezione 4.2 risolveremo tale problema nel caso particolare in cui il dominio è il disco unitario bidimensionale. La trattazione di questo caso verrà svolta mediante il metodo di separazione delle variabili e la teoria delle serie di Fourier.

Successivamente imposteremo il problema (4.2) nel caso più generale in cui Ω è un dominio limitato regolare di \mathbb{R}^n , mediante la teoria del potenziale e l'introduzione della funzione di Green per il laplaciano per un dominio limitato (sezione 4.3). Di fatto riusciremo a costruire la funzione di Green relativa ad un dominio Ω solo quando Ω è una palla in \mathbb{R}^n (sezione 4.4). In questo caso potremo scrivere una formula risolutiva per la soluzione del problema (4.2) (sezione 4.5). Il caso in cui Ω è un dominio limitato regolare diverso da una palla non viene qui discusso.

Infine, nella sezione 4.6 proveremo che la soluzione del problema di Dirichlet (4.1) si caratterizza come minimo di un opportuno funzionale in una certa classe di funzioni. Questa

caratterizzazione è importante perché apre la strada ad una teoria, i cosiddetti *metodi variazionali*, che si presta ad un'estensione ed adattamento anche a problemi non lineari ben più generali. Tale teoria richiede però delle conoscenze più avanzate di analisi funzionale e ciò esula dai nostri obiettivi.

4.1 Risultati preliminari sul problema di Dirichlet

Unicità per il problema di Dirichlet

Teorema 4.2 *Dati un dominio limitato Ω in \mathbb{R}^n , $f \in C(\Omega)$ e $g \in C(\partial\Omega)$, il problema (4.1) ammette al più una soluzione.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni di (4.1). Allora $u = u_1 - u_2$ risolve il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per il principio del massimo (cfr. sezione 2.8),

$$0 = \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

cioè $u \equiv 0$. Dunque $u_1 \equiv u_2$. \square

Riduzione al problema dell'estensione armonica

Teorema 4.3 *Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n . Supponiamo che ogni funzione in $C(\partial\Omega)$ ammetta un'estensione continua. Allora per ogni $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$, il problema (4.1) ammette soluzione.*

Dimostrazione. Fissiamo $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Per il teorema 3.9, l'equazione $-\Delta u = f$ in Ω ammette una soluzione $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Per ipotesi, il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g - \bar{u} & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette una soluzione $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Allora la funzione $u = u_0 + \bar{u}$ risulta soluzione del problema di Dirichlet (4.1). Infatti $\Delta u = \Delta u_0 + \Delta \bar{u} = -f$ in Ω mentre per $x \in \partial\Omega$ si ha che $u(x) = g(x) - \bar{u}(x) + \bar{u}(x) = g(x)$. \square

Osservazione 4.4 *Il teorema precedente si estende al caso in cui si assuma Ω regolare e f solo lipshitziana in Ω .*

4.2 Estensioni armoniche sul disco bidimensionale

In questa sezione denotiamo B il disco unitario bidimensionale. Data una funzione $g \in C(\partial B)$ ci proponiamo di trovare un'estensione armonica di g in B , cioè una funzione u armonica in B , continua in \bar{B} e tale che $u|_{\partial B} = g$. Sviluppriamo il procedimento in più passi.

Passaggio in coordinate polari

Sfruttando la dimensione 2 e la particolare geometria del dominio, cerchiamo una tale funzione u esprimendola in coordinate polari. Poniamo dunque

$$v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

L'equazione di Laplace in coordinate polari è

$$v_{rr} + r^{-1}v_r + r^{-2}v_{\theta\theta} = 0 \quad (4.3)$$

(cfr. esercizio 1 del capitolo 1).

Soluzioni fondamentali

Iniziamo a cercare soluzioni di (4.3) in forma fattorizzata:

$$v(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$$

con $\varphi \in C([0, 1]) \cap C^2((0, 1))$ e $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ periodica di periodo 2π . L'equazione di Laplace diventa allora

$$\varphi''(r)\psi(\theta) + r^{-1}\varphi'(r)\psi(\theta) + r^{-2}\varphi(r)\psi''(\theta) = 0$$

cioè, separando le variabili,

$$\frac{r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}.$$

Essendo il primo membro funzione solo di r e il secondo membro funzione solo di θ , ed essendo r e θ variabili tra loro indipendenti, la precedente equazione è verificata se e solo se esistono costanti $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui

$$\begin{cases} r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0 \\ \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0. \end{cases}$$

Esaminiamo l'equazione per ψ . Dato che ψ deve essere una funzione periodica di periodo 2π , i valori di λ ammissibili e le corrispondenti soluzioni sono

$$\lambda_n = n^2, \quad \psi_n(\theta) = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ e A, B costanti arbitrarie. Prendendo ora $\lambda = n^2$, l'equazione per φ diventa

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - n^2\varphi(r) = 0.$$

Per $n = 0$ la soluzione generale è data da

$$\varphi_0(r) = C + D \log r.$$

Per $n = 1, 2, \dots$ conviene effettuare la sostituzione $r = e^t$. Detta

$$\phi(t) = \varphi(e^t)$$

si ha che

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \varphi'(e^t)e^t, \quad \frac{d^2\phi}{dt^2}(t) = \varphi''(e^t)e^{2t} + \varphi'(e^t)e^t = r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r).$$

Quindi l'equazione per φ diventa

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}(t) - n^2\phi(t) = 0$$

la cui soluzione generale è $\phi(t) = Ce^{nt} + De^{-nt}$ e dunque, tornando alla variabile r e alla funzione φ

$$\varphi_n(r) = Cr^n + Dr^{-n}.$$

Dovendo essere φ_n continua fino in 0 dobbiamo prendere in tutti i casi $D = 0$ e quindi troviamo

$$\varphi_n(r) = Cr^n \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

con C costante arbitraria. Abbiamo così trovato una famiglia di funzioni armoniche elementari date da

$$r^n \cos(n\theta) \quad \text{e} \quad r^n \sin(n\theta) \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Possiamo recuperare la loro espressione nelle variabili $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ passando in notazione complessa e utilizzando le formule di Eulero

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Allora

$$(x + iy)^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

e quindi

$$r^n \cos(n\theta) = \operatorname{Re} [(x + iy)^n] \quad \text{e} \quad r^n \sin(n\theta) = \operatorname{Im} [(x + iy)^n]. \quad (4.4)$$

Soluzioni in forma di serie di Fourier

Fissata $g \in C(\partial B)$, cerchiamo un'estensione armonica di g su \overline{B} che, in coordinate polari, si possa scrivere nella forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (4.5)$$

per opportuni coefficienti $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Notiamo che il valore di β_0 non interviene, in quanto moltiplicato per $\sin 0$. Pertanto conveniamo di fissare $\beta_0 = 0$. Le serie di funzioni della forma (4.5) si dicono *serie di Fourier*. Per il seguito, conviene introdurre le funzioni

$$v_n(r, \theta) = r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Osserviamo che le funzioni definite da

$$u_n(x, y) = v_n(r, \theta) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

risultano armoniche in \mathbb{R}^2 perché combinazioni lineari di funzioni armoniche (cfr. osservazione 2.2). In particolare, tenuto conto di (4.4), u_n è un polinomio in x e y di grado n , se α_n e β_n non sono entrambi nulli.

Osservazione 4.5 Se poniamo $c_n = \alpha_n - i\beta_n$ per ogni intero $n \geq 0$ e scriviamo un numero complesso z in coordinate polari, cioè $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, essendo r e θ rispettivamente il modulo e l'argomento di z , possiamo riconoscere che

$$r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = \operatorname{Re}(c_n z^n) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

e che la serie di Fourier (4.5) non è altro che la parte reale di una serie di potenze in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right).$$

Condizioni sui coefficienti

Iniziamo a discutere la convergenza della serie (4.5) in relazione al comportamento delle successioni dei coefficienti α_n e β_n . Inoltre cerchiamo delle condizioni su tali coefficienti per assicurare la validità della condizione al contorno.

Lemma 4.6 Date due successioni $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ di numeri reali, consideriamo la serie di Fourier definita da (4.5).

- (i) Se le successioni $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ sono limitate, allora la serie di Fourier converge in ogni $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$. Inoltre converge uniformemente su $[0, R] \times \mathbb{R}$ per ogni $R \in [0, 1)$. Detta $v(r, \theta)$ la somma della serie, la funzione $u(x, y)$ definita da $u(x, y) = v(r, \theta)$ con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ risulta armonica nella palla unitaria.
- (ii) Se $\sum (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty$ allora la serie di Fourier converge uniformemente su $[0, 1) \times \mathbb{R}$ e, detta

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)),$$

si ha che φ è una funzione continua e periodica di periodo 2π e

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \varphi(\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \varphi(\theta) d\theta \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.6)$$

Dimostrazione. (i) Per ipotesi, esiste $C \geq 0$ tale che

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fissato $R \in [0, 1)$ abbiamo che

$$|r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta))| \leq CR^n \quad \forall (r, \theta) \in [0, R] \times \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Essendo $R \in [0, 1)$, la serie $\sum_n CR^n$ è convergente e quindi, per il criterio di Weierstrass sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni, la serie (4.5) risulta convergere uniformemente su $[0, R] \times \mathbb{R}$. Quindi in particolare converge puntualmente in ogni $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$. La funzione v definita come somma della serie

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \theta) \quad \text{dove} \quad v_0 = \frac{\alpha_0}{2} \quad \text{e} \quad v_n(r, \theta) = r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

risulta continua in $[0, 1] \times \mathbb{R}$ perché somma di una serie di funzioni continue che converge uniformemente in $[0, R] \times \mathbb{R}$, per ogni $R \in [0, 1)$. Sia $u(x, y)$ la funzione definita sul disco unitario B mediante la relazione

$$u(x, y) = v(r, \theta) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Dunque

$$u(x, y) = \sum_n u_n(x, y) \quad \forall (x, y) \in B.$$

Sappiamo che ogni v_n soddisfa l'equazione di Laplace in coordinate polari e quindi ogni u_n è armonica in B . Proviamo che u verifica la proprietà della media in B . Ciò sarà sufficiente per dedurre che u è armonica in B (cfr. teorema 2.16). Prendiamo un'arbitraria palla chiusa $B_\delta(x_0, y_0) \subset B$ ed introduciamo l'insieme

$$A = \{(r, \theta) \in [0, 1) \times [0, 2\pi) \mid (r \cos \theta, r \sin \theta) \in B_\delta(x_0, y_0)\}.$$

Osserviamo che $A \subset [0, R] \times \mathbb{R}$ per qualche $R \in [0, 1)$ (perché $\text{dist}(B_\delta(x_0, y_0), \partial B) > 0$). Quindi la serie di Fourier $\sum v_n$ converge a v uniformemente in A . Allora

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(x_0, y_0)} u(x, y) dx dy &= \int_A v(r, \theta) r dr d\theta = \sum_n \int_A v_n(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \sum_n \int_{B_\delta(x_0, y_0)} u_n(x, y) dx dy = 2\pi \sum_n u_n(x_0, y_0) \end{aligned}$$

perché ogni funzione u_n , essendo armonica, verifica la proprietà della media. Quindi

$$\int_{B_\delta(x_0, y_0)} u(x, y) dx dy = \sum_n u_n(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$$

che era quanto si voleva provare.

(ii) Sapendo che $\sum |\alpha_n| + |\beta_n| < \infty$ e sfruttando la stima

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \quad \forall (r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R},$$

deduciamo che la serie di Fourier (4.5) converge uniformemente in $[0, 1) \times \mathbb{R}$ e che la funzione v somma della serie è continua in $[0, 1) \times \mathbb{R}$ e periodica con periodo 2π rispetto a θ . In particolare è tale anche la funzione

$$\varphi(\theta) = v(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)).$$

Essendo tale serie uniformemente convergente in $[0, 2\pi]$, possiamo scambiare serie e integrale e abbiamo che per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \varphi(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \cos(n\theta) d\theta + \beta_n \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \sin(n\theta) d\theta \right)$$

e allo stesso modo, per $k = 1, 2, \dots$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\varphi(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \cos(n\theta) d\theta + \beta_n \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \sin(n\theta) d\theta \right).$$

Siccome

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \sin(n\theta) d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \sin(n\theta) d\theta = \delta_{kn}\pi,$$

dove δ_{kn} è il simbolo di Kronecker, otteniamo che

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 2\pi\alpha_0, \quad \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\varphi(\theta) d\theta = \pi\alpha_k, \quad \int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\varphi(\theta) d\theta = \pi\beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè le formule (4.6). \square

Alcuni risultati della teoria delle serie di Fourier

In questo paragrafo esaminiamo alcune proprietà delle funzioni periodiche di una variabile reale. Avendo presente in particolare che la variabile indipendente rappresenti l'angolo misurato in radianti, considereremo funzioni periodiche di periodo 2π . Le più semplici funzioni 2π -periodiche che si incontrano sono le funzioni $\sin(kt)$ e $\cos(kt)$, dove k è un intero non negativo fissato e t è la variabile indipendente. Per questioni di notazioni e per maggior semplicità di calcolo, conviene considerare più in generale funzioni 2π -periodiche a valori complessi. Tenuto conto dell'identità di Eulero:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

i più semplici esempi di funzioni 2π -periodiche a valori complessi sono costituiti dalle funzioni e^{ikt} con $k \in \mathbb{Z}$. Possiamo recuperare le funzioni $\sin(kt)$ e $\cos(kt)$ grazie alle formule

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}.$$

Chiaramente qualsiasi combinazione lineare di funzioni 2π -periodiche è ancora una funzione 2π -periodica. Definiamo dunque **polinomio trigonometrico** una funzione della forma

$$p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \tag{4.7}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e c_{-n}, \dots, c_n sono costanti complesse fissate. Naturalmente esistono funzioni 2π -periodiche, anche molto regolari, che non sono polinomi trigonometrici. Ad esempio, $e^{\sin t}$. La questione cui siamo interessati è stabilire se e in che senso una funzione 2π -periodica sia limite di polinomi trigonometrici. Tale questione può essere affrontata nel modo seguente. Supponiamo che $p(t)$ sia un polinomio trigonometrico della forma (4.7). Tenuto conto che

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 2\pi & \text{se } k = 0, \end{cases}$$

riconosciamo che

$$\int_0^{2\pi} p(x)e^{-ikx} dx = 2\pi c_k \quad \forall k \in \{-n, \dots, n\}.$$

Questa relazione ci permette di dedurre il valore dei coefficienti dall'espressione generale della funzione. Tale calcolo può essere svolto per una classe di funzioni 2π -periodiche ben più ampia dei polinomi trigonometrici.

Definizione 4.7 *Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica di periodo 2π e integrabile in $[0, 2\pi]$ (e quindi su ogni intervallo limitato di \mathbb{R}), si pone*

$$c_k(f) = c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Il numero complesso c_k si chiama k -esimo coefficiente di Fourier di f .

Osserviamo che se f è un polinomio trigonometrico, allora tutti i coefficienti di Fourier di f tranne un numero finito sono nulli e la funzione f si può ricostruire come combinazione lineare delle funzioni periodiche elementari e^{ikt} con coefficienti dati esattamente dai corrispondenti coefficienti di Fourier di f .

Ci chiediamo se, data una funzione f 2π -periodica, è possibile ricostruire f mediante la successione dei suoi coefficienti di Fourier. Più precisamente, introduciamo una successione di polinomi trigonometrici candidata ad approssimare f considerando i polinomi

$$p_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N})$$

dove i c_k sono i coefficienti di Fourier di f . Lo studio del limite della successione $p_n(t)$ equivale allo studio della convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Qualsiasi serie definita formalmente come sopra, per una qualunque scelta dei coefficienti $c_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{Z}$) si chiama **serie di Fourier**. Quando i coefficienti sono i coefficienti di Fourier di f , si chiama **serie di Fourier di f** . A questo punto possiamo riformulare più chiaramente la questione iniziale chiedendoci sotto quali condizioni la serie di Fourier di una data funzione 2π -periodica f converge puntualmente alla funzione f . La risposta che forniamo è stabilita dal seguente teorema.

Teorema 4.8 *Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione 2π -periodica, derivabile in \mathbb{R} , allora la serie di Fourier di f converge ad f puntualmente in \mathbb{R} , cioè*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt} = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si possono costruire esempi di funzioni 2π -periodiche e continue su \mathbb{R} per cui la tesi del precedente teorema di convergenza non è valida. Dunque un'ipotesi di sola continuità su f non sarebbe sufficiente. L'ipotesi di derivabilità si può comunque indebolire.

Osservazione 4.9 Se f è una funzione a valori reali allora

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt} dt} = \overline{c_k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} &= c_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [c_{-k} e^{-ikt} + c_k e^{ikt}] \\ &= c_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\overline{c_k e^{ikt}} + c_k e^{ikt}) = c_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) \end{aligned}$$

Se poniamo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (4.8)$$

otteniamo che

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k}{2} + i \frac{b_k}{2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

e quindi

$$2 \operatorname{Re}(c_k e^{ikt}) = a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

e infine

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

Quest'ultima serie costituisce la serie di Fourier di f in forma reale. Si noti che b_0 può restare non definito, dato che moltiplica $\sin(0t) = 0$.

Dall'osservazione precedente possiamo riformulare il teorema di convergenza per funzioni a valori reali nel modo seguente.

Teorema 4.10 Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione 2π -periodica, derivabile in \mathbb{R} , allora la serie di Fourier reale di f converge ad f puntualmente in \mathbb{R} , cioè

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La dimostrazione del teorema 4.8 richiede alcuni risultati preliminari, esposti nei lemmi successivi.

Lemma 4.11 (disuguaglianza di Bessel) Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione 2π -periodica, integrabile su $[0, 2\pi]$, allora

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Osservazione 4.12 Tenuto conto dell'osservazione 4.9, se f è una funzione 2π -periodica, integrabile su $[0, 2\pi]$ e a valori reali, detti a_k e b_k i coefficienti di Fourier reali di f definiti da (4.8), la disuguaglianza di Bessel si legge nella forma

$$4a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt. \quad (4.9)$$

Dimostrazione. Posto

$$c_k = c_k(f) \quad \text{e} \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt},$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{2\pi} |f(t) - p_n(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \int_0^{2\pi} f(t) \overline{p_n(t)} dt - \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} p_n(t) dt + \int_0^{2\pi} |p_n(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Quindi calcoliamo

$$\int_0^{2\pi} f(t) \overline{p_n(t)} dt = \sum_{k=-n}^n \frac{\overline{c_k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Con passaggi simili si trova poi che

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} p_n(t) dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} |p_n(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Sostituendo in (4.10) si arriva alla conclusione. \square

Lemma 4.13 (Riemann-Lebesgue) Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione 2π -periodica e soddisfa la condizione $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$, allora $c_k(f) \rightarrow 0$ per $|k| \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Bessel e per l'ipotesi, la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ è convergente. Quindi il suo termine generale è infinitesimo. \square

Lemma 4.14 Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione 2π -periodica, integrabile su $[0, 2\pi]$, e $g(t) = f(t+x)$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato, allora $c_k(g) = e^{ikx} c_k(f)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Siccome f è 2π -periodica e integrabile su $[0, 2\pi]$, è integrabile su qualunque intervallo limitato e in particolare

$$\int_{2\pi}^{2\pi+x} f(t) e^{-ikt} dt = \int_0^x f(t) e^{-ikt} dt.$$

Allora

$$\begin{aligned}
2\pi c_k(g) &= \int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt} dt = \int_0^{2\pi} f(t+x)e^{-ikt} dt = \int_x^{2\pi+x} f(s)e^{-iks+ikx} ds \\
&= e^{ikx} \left(\int_x^{2\pi} f(s)e^{-iks} ds + \int_{2\pi}^{2\pi+x} f(s)e^{-iks} ds \right) \\
&= e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-iks} ds = 2\pi e^{ikx} c_k(f). \quad \square
\end{aligned}$$

Dimostrazione del teorema 4.8. Dapprima verifichiamo la tesi per $t = 0$ cioè proviamo che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) = f(0). \quad (4.11)$$

Conviene introdurre la funzione ausiliaria g così definita

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(0)}{e^{it} - 1} & \text{se } t \in (0, 2\pi) \\ -if'(0) & \text{se } t \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Tale funzione è ben definita e continua in $[0, 2\pi]$ perché

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{e^{it} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t) - f(0)}{t}}{\frac{e^{it} - 1}{t}} = \frac{f'(0)}{i} = g(0)$$

e, essendo $f(t + 2\pi) = f(t)$ e $e^{it+2\pi i} = e^{it}$,

$$\lim_{t \rightarrow 2\pi^-} \frac{f(t) - f(0)}{e^{it} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{e^{it} - 1} = \frac{f'(0)}{i} = g(2\pi).$$

Quindi possiamo estendere g in modo periodico su \mathbb{R} ottenendo una funzione continua e 2π -periodica. Siccome

$$e^{it}g(t) - g(t) = f(t) - f(0) \quad \text{per quasi ogni } t \in \mathbb{R},$$

possiamo dedurre che

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(k-1)t}g(t) dt - \int_0^{2\pi} e^{-ikt}g(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}f(t) dt - f(0) \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt$$

cioè

$$c_{k-1}(g) - c_k(g) = \begin{cases} c_k(f) & \text{se } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ c_0(f) - f(0) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Pertanto, per $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\sum_{k=-m}^n c_k(f) = \sum_{k=-m}^n [c_{k-1}(g) - c_k(g)] + f(0) = f(0) + c_{-m-1}(g) - c_n(g).$$

Essendo g continua su \mathbb{R} verifica la condizione $\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt < \infty$ e quindi, per il lemma di Riemann-Lebesgue, $c_{-m-1}(g) \rightarrow 0$ e $c_n(g) \rightarrow 0$ per $m, n \rightarrow \infty$, cioè vale (4.11). Proviamo ora la tesi nel caso generale. Fissato $x \in \mathbb{R}$, definiamo $F(t) = f(t+x)$. Per quanto sopra dimostrato,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) = F(0).$$

Ma $F(0) = f(x)$ e, per il lemma 4.14, $c_k(F) = e^{ikx} c_k(f)$. \square

Costruzione dell'estensione armonica

È data una funzione continua $g: \partial B \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo

$$f(\theta) = g(\cos \theta, \sin \theta)$$

e osserviamo che f è una funzione continua in \mathbb{R} e periodica di periodo 2π . Prendiamo la serie di Fourier (4.5) con coefficienti α_n e β_n dati da

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4.12)$$

Teorema 4.15 *Se f è di classe C^1 allora la serie di Fourier (4.5) converge uniformemente nel disco chiuso \overline{B} ad una funzione armonica v in B , tale che $v(1, \theta) = f(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Siccome f è continua e periodica, f è limitata e quindi lo sono pure i suoi coefficienti di Fourier, cioè esiste $C > 0$ tale che $|\alpha_n| \leq C$ e $|\beta_n| \leq C$ per ogni n . Allora possiamo applicare il lemma 4.6, parte (i), per dedurre che la serie di Fourier (4.5) converge puntualmente nel disco aperto B ad una funzione armonica v in B . Dimostriamo ora che la serie $\sum(|\alpha_n| + |\beta_n|)$ converge. Qui sfruttiamo l'ipotesi secondo cui f è di classe C^1 . Detti α'_n e β'_n i coefficienti di Fourier di f' , integrando per parti otteniamo che

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f'(\theta) d\theta = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f(\theta) d\theta = n\beta_n \\ \beta'_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) f'(\theta) d\theta = -\frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) f(\theta) d\theta = -n\alpha_n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La disuguaglianza di Bessel (4.9) applicata a f' , ci dà la stima

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha'_n)^2 + (\beta'_n)^2] \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(\theta)^2 d\theta < \infty.$$

Usando poi (4.13) e la disuguaglianza di Schwarz¹ per le serie numeriche, abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\beta'_n|}{n} + \frac{|\alpha'_n|}{n} \right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2 [(\alpha'_n)^2 + (\beta'_n)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

¹**Disuguaglianza di Schwarz per le serie.** Se le serie numeriche $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergono, allora la serie $\sum a_n b_n$ converge assolutamente e $\sum |a_n b_n| \leq (\sum a_n^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Quindi, per il lemma 4.6, parte (ii), la serie di Fourier (4.5) converge uniformemente in \overline{B} e la funzione v somma della serie è continua in \overline{B} . Infine $v(1, \theta) = f(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ grazie al teorema 4.10. \square

Corollario 4.16 *Detto B il disco unitario bidimensionale, ogni funzione $g \in C^1(\partial B)$ ammette un'unica estensione continua in \overline{B} e armonica in B .*

Esempio 4.17 *Trovare l'estensione armonica sul disco unitario bidimensionale B della funzione $g(x, y) = x^3$ per $(x, y) \in \partial B$.*

Passando a coordinate polari, $g(x, y) = \cos^3 \theta = f(\theta)$. Dobbiamo calcolare i coefficienti di Fourier di f . Si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos^3 \theta \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos \theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \delta_{1,n} \pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) \cos(n\theta) \cos \theta \, d\theta \\ &= \delta_{1,n} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \cos(3\theta)) \cos(n\theta) \, d\theta \\ &= \delta_{1,n} \frac{3\pi}{4} + \delta_{3,n} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(abbiamo usato le formule $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ e $\cos s \cos t = \frac{1}{2}(\cos(s - t) + \cos(s + t))$). Analogamente

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cos^3 \theta \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cos \theta \, d\theta - \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) \sin(n\theta) \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \cos(2\theta)) \sin(n\theta) \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_n = 0 \quad \forall n \neq 1, 3 \quad \text{e} \quad b_n = 0 \quad \forall n$$

e la soluzione è

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \frac{3}{4} r \cos \theta + \frac{1}{4} r^3 \cos(3\theta) = \frac{3}{4} r \cos \theta + \frac{1}{4} r^3 (\cos(2\theta) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta) \\ &= \frac{3}{4} r \cos \theta + \frac{1}{4} r^3 ((\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) \\ &= \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} (x^3 - xy^2 - 2xy^2) = \frac{3}{4} x - \frac{3}{4} xy^2 + \frac{1}{4} x^3 = u(x, y). \end{aligned}$$

4.3 Funzione di Green per il problema di Dirichlet su un dominio limitato

Prendiamo in esame il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.14)$$

dove Ω è un dominio limitato e regolare in \mathbb{R}^n e g è una data funzione continua su $\partial\Omega$. Per l'identità di Stokes (cfr. teorema 3.4), se u è una soluzione di (4.14) e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ allora

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial G^x}{\partial \nu} d\sigma + \int_{\partial\Omega} G^x \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \quad \forall x \in \Omega \quad (4.15)$$

dove G^x è la soluzione fondamentale del laplaciano con polo in x . La formula (4.15) non è risolutiva, perché non è noto a priori il valore di $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sulla frontiera di Ω . Abbiamo bisogno di una formula in cui non compaia $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. A tale scopo andiamo a utilizzare la seguente variante dell'identità di Stokes.

Lemma 4.18 *Sia Ω un dominio limitato e regolare di \mathbb{R}^n . Allora per ogni $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Phi \in C^2(\overline{\Omega})$ armonica in Ω , e $x \in \Omega$ vale che*

$$u(x) = - \int_{\Omega} (G^x - \Phi)(y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial (G^x - \Phi)}{\partial \nu}(y) - (G^x - \Phi)(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma_y.$$

Dimostrazione. Per la formula di Gauss-Green si ha che

$$\int_{\Omega} (u(y) \Delta \Phi(y) - \Phi(y) \Delta u(y)) dy = \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) - \Phi(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma_y.$$

Siccome Φ è armonica, resta che

$$0 = \int_{\Omega} \Phi(y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) - \Phi(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma_y.$$

Sommando membro a membro all'identità di Stokes si arriva alla tesi. \square

Possiamo sfruttare il lemma 4.18 e in particolare l'arbitrarietà nella scelta della funzione armonica Φ per modificare la formula (4.15) eliminando l'integrale di superficie su $\partial\Omega$ che coinvolge $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Più precisamente, supponiamo di poter risolvere per ogni $x \in \Omega$ il problema di Dirichlet

$$(D_0^x) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = G^x & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Osserviamo che, fissato $x \in \Omega$, la funzione G^x , pur se singolare in x , è di classe C^∞ in un intorno di $\partial\Omega$, perché $\text{dist}(x, \partial\Omega) > 0$.

Definizione 4.19 Se per ogni $x \in \Omega$ esiste una funzione $\Phi^x \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione di (D_0^x) , diciamo che il dominio Ω ammette una funzione di Green per il problema di Dirichlet relativo al laplaciano. Tale funzione è così definita:

$$\mathcal{G}(x, y) = G^x(y) - \Phi^x(y) \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e } y \in \overline{\Omega} \text{ con } x \neq y.$$

Il problema (D_0^x) risolvendo il quale andiamo a costruire la funzione di Green \mathcal{G} si chiama problema correttore per il problema di Dirichlet.

Conseguenza immediata del lemma 4.18 è il seguente risultato, che esprime una condizione necessaria sulla soluzione del problema di Dirichlet (4.14).

Teorema 4.20 Sia Ω un dominio limitato e regolare che ammette una funzione di Green \mathcal{G} . Data $g \in C(\partial\Omega)$, se u è soluzione del problema di Dirichlet (4.14) e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ allora

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) d\sigma_y \quad \text{per ogni } x \in \Omega \quad (4.16)$$

dove $\mathcal{G}^x(y) = \mathcal{G}(x, y)$ e $\frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) = \nabla \mathcal{G}^x(y) \cdot \nu(y) = \nabla_y \mathcal{G}(x, y) \cdot \nu(y)$ per ogni $y \in \partial\Omega$.

La formula di rappresentazione (4.16) fornisce il candidato giusto ad essere soluzione del problema di Dirichlet (4.14). Si osservi che tale formula definisce $u(x)$ solo per $x \in \Omega$ e non ha senso per $x \in \partial\Omega$. Per recuperare la condizione al bordo, si dovrà considerare la seguente formulazione:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in \Omega}} u(x) = g(\bar{x}) \quad \text{per ogni } \bar{x} \in \partial\Omega. \quad (4.17)$$

Per poter concludere che la formula di rappresentazione (4.16) fornisce effettivamente la soluzione del problema di Dirichlet (4.14) occorre:

- (1) costruire o dimostrare l'esistenza della funzione di Green per il dominio Ω ;
- (2) verificare che la funzione u definita da (4.16) è di classe C^2 in Ω , è armonica in Ω e soddisfa la condizione al bordo espressa nella forma (4.17).

Per costruire la funzione di Green \mathcal{G} per un dominio Ω bisogna risolvere i problemi correttori (D_0^x) che sono ancora problemi di Dirichlet con particolari condizioni al contorno. In alcuni casi è possibile trovare la soluzione esplicita di (D_0^x) . In particolare tali problemi si possono risolvere esplicitamente quando il dominio Ω è una palla o un semispazio. In seguito esamineremo la prima situazione.

4.4 Calcolo della funzione di Green per la palla unitaria

In questa sezione denotiamo B la palla unitaria in \mathbb{R}^n . Fissato $x \in B$, cerchiamo una soluzione del problema di Dirichlet

$$(D_0^x) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B \\ u = G^x & \text{su } \partial B \end{cases}$$

dove G^x è la soluzione fondamentale del laplaciano con polo in x . Usiamo il cosiddetto *metodo dell'immagine* che si basa sul seguente risultato, di natura puramente geometrica.

Lemma 4.21 (cerchio di Apollonio) *Fissati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq b$ e fissata una costante positiva λ , l'insieme*

$$S(a, b, \lambda) := \{y \in \mathbb{R}^n : \frac{\text{dist}(y, a)}{\text{dist}(y, b)} = \lambda\}$$

è un iperpiano se $\lambda = 1$ e una sfera se $\lambda \neq 1$. Più precisamente, per $\lambda \neq 1$

$$S(a, b, \lambda) = \partial B_r(x_0) \quad \text{dove } x_0 = \frac{\lambda^2 b - a}{\lambda^2 - 1} \quad \text{e } r = \frac{\lambda|a - b|}{|\lambda^2 - 1|}.$$

Dimostrazione. Un punto $y \in \mathbb{R}^n$ appartiene a $S(a, b, \lambda)$ se e solo se $|y - a|^2 = \lambda^2|y - b|^2$ cioè

$$|y|^2 - 2\frac{\lambda^2 b - a}{\lambda^2 - 1} \cdot y + \frac{\lambda^2|b|^2 - |a|^2}{\lambda^2 - 1} = 0.$$

L'equazione che individua una sfera di raggio r e centro x_0 è data da $|y - x_0| = r$, cioè $|y|^2 - 2x_0 \cdot y + |x_0|^2 - r^2 = 0$. Dunque il luogo dei punti $y \in \mathbb{R}^n$ che stanno in $S(a, b, \lambda)$ è la sfera $\partial B_r(x_0)$ se e solo se

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\lambda^2 b - a}{\lambda^2 - 1} \\ |x_0|^2 - r^2 = \frac{\lambda^2|b|^2 - |a|^2}{\lambda^2 - 1} \end{cases}$$

per opportuni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Quindi si dovrà avere

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{|\lambda^2 b - a|^2}{(\lambda^2 - 1)^2} - \frac{\lambda^2|b|^2 - |a|^2}{\lambda^2 - 1} \\ &= \frac{\lambda^4|b|^2 - 2\lambda^2 a \cdot b + |a|^2 - \lambda^4|b|^2 + \lambda^2|a|^2 + \lambda^2|b|^2 - |a|^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \\ &= \frac{\lambda^2|a - b|^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

cioè $r = \lambda|a - b|/|\lambda^2 - 1|$. \square

Fissato $x \in \mathbb{R}^n$ chiamiamo *punto immagine di x* (rispetto alla sfera unitaria ∂B) quel punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $S(x, x^*, \lambda) = \partial B$ per qualche $\lambda > 0$. Per il lemma 4.21 tale punto immagine x^* è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 0 = \frac{\lambda^2 x^* - x}{\lambda^2 - 1} \\ 1 = \frac{\lambda|x - x^*|}{|\lambda^2 - 1|} \\ \lambda > 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzione per $x \neq 0$ ed è data da $\lambda = |x|$, $x^* = \lambda^{-2}x$, cioè

$$x^* = \frac{x}{|x|^2}.$$

Dunque, per definizione di punto immagine, abbiamo che

$$|y - x^*| = \frac{|y - x|}{|x|} \quad \forall y \in \partial B. \quad (4.18)$$

Torniamo al problema della ricerca di una soluzione di (D_0^x) . Introduciamo la funzione

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log r & \text{per } n = 2 \\ \frac{C_n}{r^{n-2}} & \text{per } n \geq 3 \end{cases}$$

dove, per comodità, abbiamo posto

$$C_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \quad \text{per } n \geq 3.$$

Dunque, grazie a (4.18) abbiamo che

$$y \in \partial B \Rightarrow G^x(y) = \varphi(|y-x|) = \varphi(|x||y-x^*|) = G(|x|(y-x^*)).$$

La funzione $y \mapsto G(|x|(y-x^*))$ ha un polo in x^* che è esterno a \overline{B} e al di fuori di x^* risulta essere armonica. In altre parole stiamo dicendo che la funzione

$$\Phi^x(y) := G(|x|(y-x^*)) = \begin{cases} G^{x^*}(y) - \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2 \\ |x|^{2-n} G^{x^*}(y) & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (4.19)$$

è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$ e verifica la condizione al contorno $\Phi^x = G^x$ su ∂B , cioè risolve il problema correttore (D_0^x) . Tale conclusione vale per $x \neq 0$. Se $x = 0$ il problema di Dirichlet in considerazione è risolubile elementarmente perché G^0 è costante su ∂B . In particolare se $x = 0$ possiamo definire

$$\Phi^0(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2 \\ C_n & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Notiamo che Φ^x è continua in $x = 0$ perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi^x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(|x||y-x^*|) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi\left(\left||x|y - \frac{x}{|x|}\right|\right) = \varphi(1) = \Phi^0(y).$$

Abbiamo così provato:

Teorema 4.22 *La palla unitaria B di \mathbb{R}^n ammette funzione di Green \mathcal{G} data da:*

$$\mathcal{G}(x, y) = G^x(y) - \Phi^x(y) \quad \forall (x, y) \in B \times \overline{B}, \quad x \neq y,$$

con $\Phi^x(y)$ definito da (4.19).

Più esplicitamente, per $n \geq 3$ risulta

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{C_n}{|x-y|^{n-2}} - \frac{C_n}{|x|^{n-2} \left|y - \frac{x}{|x|^2}\right|^{n-2}}.$$

Osservazione 4.23 Dall'espressione esplicita di \mathcal{G} si vede che la funzione di Green \mathcal{G} è simmetrica:

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x) \quad \text{per ogni } x, y \in B \text{ con } x \neq y.$$

In realtà questa proprietà di simmetria vale in generale, cioè si può dimostrare che, dato un dominio Ω di \mathbb{R}^n limitato e regolare, se esiste la funzione di Green \mathcal{G} per l'equazione di Laplace in Ω con condizione di Dirichlet al bordo, allora $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$ per ogni $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ (anche se non si conosce esplicitamente \mathcal{G}).

4.5 La formula di Poisson sulla palla unitaria

Esaminiamo il problema di Dirichlet sulla palla unitaria B di \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B \\ u = g & \text{su } \partial B \end{cases} \quad (4.20)$$

dove g è una assegnata funzione in $C(\partial B)$. Sappiamo già (cfr. teorema 4.20) che se $u \in C^2(\overline{B})$ è soluzione di (4.20), allora deve essere

$$u(x) = - \int_{\partial B} g(y) \frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) d\sigma_y \quad \text{per ogni } x \in B \quad (4.21)$$

dove $\mathcal{G}^x(y) = \mathcal{G}(x, y)$ e

$$\frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) = \nabla_y \mathcal{G}(x, y) \cdot \nu(y).$$

Il teorema 4.22 ci fornisce esplicitamente \mathcal{G} . Sapendo che $\nu(y) = y$, possiamo calcolare

$$\frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) = \nabla G^x(y) \cdot y - \frac{1}{|x|^{n-2}} \nabla G^{x^*}(y) \cdot y.$$

Ricordando la definizione di G , si ha che

$$\nabla G(z) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{z}{|z|^n} \quad \text{per ogni } z \neq 0$$

(sia per $n = 2$, sia per $n \geq 3$) e quindi, essendo $|y| = 1$,

$$\frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) = -\frac{1}{n\omega_n} \left(\frac{(y-x) \cdot y}{|y-x|^n} - \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{(y-x^*) \cdot y}{|y-x^*|^n} \right) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}$$

perché $|y-x^*| = \frac{|y-x|}{|x|}$ per $y \in \partial B$. Posto

$$K(x, y) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

la formula (4.21) diventa:

$$u(x) = \int_{\partial B} K(x, y) g(y) d\sigma_y \quad \text{per ogni } x \in B. \quad (4.22)$$

La funzione K si chiama *nucleo di Poisson per la palla unitaria* e la formula (4.22) si dice *formula di Poisson* per il problema di Dirichlet (4.20). Osserviamo che K è di classe C^∞ in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \neq y\}$ e $K(x, y) > 0$ per $(x, y) \in B \times \partial B$.

Teorema 4.24 *Per ogni $g \in C(\partial B)$, la funzione $u: B \rightarrow \mathbb{R}$ definita mediante la formula di Poisson (4.22) è soluzione del problema (4.20) cioè è armonica in B e verifica la condizione al contorno*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} u(x) = g(\bar{x}) \quad \text{per ogni } \bar{x} \in \partial B.$$

Dimostrazione. Fissato $x \in B$, esiste $\delta > 0$ tale che $\overline{B_\delta(x)} \cap \partial B = \emptyset$. Quindi, siccome g è limitata in ∂B (perché continua) e $K, K_{x_i}, K_{x_i x_j}$ sono funzioni uniformemente continue in $\overline{B_\delta(x)} \times \partial B$, si ha che $u \in C^2(B)$. Pertanto possiamo calcolare le derivate di u portando la derivazione sotto il segno di integrale (si applica il teorema 2.15)

$$u_{x_i x_j}(x) = \partial_{x_i x_j} \int_{\partial B} K(x, y) g(y) d\sigma_y = \int_{\partial B} K_{x_i x_j}(x, y) g(y) d\sigma_y .$$

In particolare

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B} \Delta_x K(x, y) g(y) d\sigma_y .$$

Si ha che

$$\Delta_x K(x, y) = 0 \quad \text{per ogni } x \in B \text{ e per ogni } y \in \partial B.$$

Ciò si ottiene o con un calcolo diretto sull'espressione esplicita di K (si utilizzi il fatto che $|y| = 1$) oppure sfruttando la regolarità e la simmetria di \mathcal{G} (vedi osservazione 4.23) e ragionando nel modo seguente: ricordiamo che $K(x, y) = -\frac{\partial \mathcal{G}^x(y)}{\partial \nu}$, che $\mathcal{G}^x(y) = \mathcal{G}(x, y)$ e $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$ per ogni $x, y \in B$ con $x \neq y$. Quindi, per $x \in B$ e $y \in \partial B$ si ha che

$$\begin{aligned} \Delta_x K(x, y) &= -\Delta_x \frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) = -\Delta_x (\nabla_y \mathcal{G})(x, y) \cdot \nu(y) \\ &= -\nu(y) \cdot \nabla_y (\Delta_x \mathcal{G})(x, y) = -\nu(y) \cdot \nabla_y (\Delta_y \mathcal{G})(x, y) \\ &= -\nu(y) \cdot \nabla (\Delta \mathcal{G}^x)(y) = 0 \end{aligned}$$

perché \mathcal{G}^x è armonica in $B \setminus \{x\}$. Dunque $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in B$. Per verificare la condizione al contorno, iniziamo ad osservare che

$$\int_{\partial B} K(x, y) d\sigma_y = 1 \quad \text{per ogni } x \in B.$$

Infatti, il problema di Dirichlet con $g \equiv 1$ ha per soluzione la funzione costante $u \equiv 1$. Allora deve essere

$$1 = - \int_{\partial B} \frac{\partial \mathcal{G}^x}{\partial \nu}(y) d\sigma_y = \int_{\partial B} K(x, y) g(y) d\sigma_y \quad \text{per ogni } x \in B.$$

Fissiamo $\bar{x} \in \partial B$ e $\varepsilon > 0$. Per la continuità di g , esiste $\delta > 0$ tale che $|g(y) - g(\bar{x})| < \varepsilon$ se $|y - \bar{x}| < \delta$, $y \in \partial B$. Allora

$$\begin{aligned} u(x) - g(\bar{x}) &= \int_{\partial B} K(x, y) (g(y) - g(\bar{x})) d\sigma_y \\ &= \underbrace{\int_{\partial B \cap B_\delta(\bar{x})} K(x, y) (g(y) - g(\bar{x})) d\sigma_y}_I + \underbrace{\int_{\partial B \setminus B_\delta(\bar{x})} K(x, y) (g(y) - g(\bar{x})) d\sigma_y}_J. \end{aligned}$$

Possiamo stimare

$$|I| \leq \int_{\partial B \cap B_\delta(\bar{x})} K(x, y) |g(y) - g(\bar{x})| d\sigma_y \leq \varepsilon \int_{\partial B} K(x, y) d\sigma_y = \varepsilon.$$

Per controllare J prendiamo $x \in B$ sufficientemente vicino a \bar{x} e stimiamo $K(x, y)$. Più precisamente, se $x \in B$ è tale che $|x - \bar{x}| < \frac{\delta}{2}$, allora per $y \in \partial B \setminus B_\delta(\bar{x})$ si ha che

$$\delta \leq |y - \bar{x}| \leq |y - x| + |x - \bar{x}| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2}$$

e quindi $|y - x| \geq \frac{\delta}{2}$ e

$$K(x, y) \leq \frac{2^{n+1}(1 - |x|^2)}{n\omega_n\delta^n}.$$

Allora

$$|J| \leq \frac{2^{n+1}(1 - |x|^2)\|g\|}{n\omega_n\delta^n} \int_{\partial B \setminus B_\delta(\bar{x})} d\sigma_y \leq \frac{2^{n+1}(1 - |x|^2)\|g\|}{\delta^n}.$$

Se $x \rightarrow \bar{x}$ allora $|x| \rightarrow 1$ e quindi $J \rightarrow 0$. Dunque $\limsup_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in \bar{B}}} |u(x) - g(\bar{x})| \leq \varepsilon$ e siccome ε è un numero positivo arbitrario, segue che $\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in \bar{B}}} u(x) = g(\bar{x})$. \square

Come conseguenza dei teoremi precedenti possiamo enunciare questo risultato.

Teorema 4.25 *Se Ω è una qualsiasi palla aperta in \mathbb{R}^n , ogni funzione $g \in C(\partial\Omega)$ ammette un'unica estensione armonica in Ω .*

Dimostrazione. Per quanto visto precedentemente, il risultato è immediato se Ω è la palla unitaria in \mathbb{R}^n . Sia $\Omega = B_r(\bar{x})$. Il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r(\bar{x}) \\ u = g & \text{su } \partial B_r(\bar{x}) \end{cases}$$

è equivalente al problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B \\ u = \bar{g} & \text{su } \partial B \end{cases}$$

dove $\bar{g}(x) = g(\bar{x} + rx)$ per ogni $x \in \partial B$. Sappiamo che tale problema ammette una soluzione $u \in C(\bar{B}) \cap C^2(B)$. Allora

$$\bar{u}(x) = u\left(\frac{x - \bar{x}}{r}\right) \quad \forall x \in \overline{B_r(\bar{x})}$$

è soluzione del problema di Dirichlet in $B_r(\bar{x})$. \square

4.6 Principio di Dirichlet

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n e siano $f \in C(\bar{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Definiamo

$$X = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$$

e per ogni $u \in X$ poniamo

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Dunque E è un'applicazione che associa ad ogni elemento $u \in X$ un numero reale. Tale applicazione prende il nome di *funzionale dell'energia* associato al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.23)$$

Una soluzione u di (4.23) che stia in X si caratterizza come minimo del funzionale dell'energia. Più precisamente vale il seguente risultato.

Teorema 4.26 *Siano Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n , $f \in C(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Una funzione $u \in X \cap C^2(\Omega)$ è soluzione di (4.23) se e solo se*

$$E(u) = \min_{v \in X} E(v).$$

Dimostrazione. Poniamo

$$X_0 = \{h \in C^1(\overline{\Omega}) \mid h|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Ogni funzione $v \in X$ si può scrivere nella forma $v = u + h$, dove $h \in X_0$ e u è fissata e sta in $X \cap C^2(\Omega)$. Quindi u è punto di minimo di E in X se e solo se

$$E(u) = \min_{h \in X_0} E(u + h). \quad (4.24)$$

Inoltre, per il teorema della divergenza (teorema 1.4), per ogni $h \in X_0$ si ha che

$$\int_{\Omega} h \Delta u = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(h \nabla u) - \nabla h \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} h \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla u = - \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla u.$$

Quindi

$$\begin{aligned} E(u + h) - E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + h)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} (fu + fh) + \int_{\Omega} fu \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla h + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 - \int_{\Omega} fh \\ &= - \int_{\Omega} h(\Delta u + f) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2. \end{aligned}$$

Dunque, se u è soluzione di (4.23) allora

$$E(u + h) - E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 \geq 0 \quad \text{per ogni } h \in X_0$$

cioè vale (4.24). Viceversa se vale (4.24), allora

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 \geq \int_{\Omega} h(\Delta u + f) \quad \text{per ogni } h \in X_0.$$

Fissata $h \in X_0$, abbiamo che

$$\frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla h|^2 \geq t \int_{\Omega} h(\Delta u + f) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prendendo $t > 0$, semplificando e passando al limite per $t \rightarrow 0^+$ troviamo che $0 \geq \int_{\Omega} h(\Delta u + f)$. Prendendo $t < 0$, semplificando (si noti che la disuguaglianza cambia segno) e passando al limite per $t \rightarrow 0^-$ troviamo che $0 \leq \int_{\Omega} h(\Delta u + f)$. Pertanto

$$\int_{\Omega} h(\Delta u + f) = 0.$$

Questo succede per ogni $h \in X_0$ se e solo se $\Delta u + f = 0$ in Ω . \square

Osservazione 4.27 *Il teorema precedente caratterizza le eventuali soluzioni di (4.23) che stanno in X , cioè che sono di classe C^1 su $\bar{\Omega}$. Non è però detto che le soluzioni di (4.23) siano di classe C^1 fin sul bordo del dominio, nemmeno in casi molto regolari. Ad esempio si possono costruire funzioni armoniche sul disco unitario nel piano, continue fin sul bordo ma non di classe C^1 sul disco chiuso.*

4.7 Esercizi

1. Si consideri una serie di potenze in campo complesso della forma

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - i\beta_n) z^n \quad \text{con } \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

- (i) Detto B il disco unitario aperto in \mathbb{C} , dimostrare che se la serie numerica $\sum (|\alpha_n| + |\beta_n|)$ è convergente, allora la serie di potenze converge uniformemente sul disco chiuso \bar{B} ad una funzione f continua in \bar{B} e olomorfa in B .
- (ii) Detta u la parte reale di f , provare che

$$\int_B |\nabla u(x, y)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 n + \beta_n^2 n).$$

- (iii) Riconoscere che, scegliendo $\beta_n = 0$ per ogni n e

$$\alpha_n = \begin{cases} k^{-2} & \text{se } n = k^3, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la funzione u introdotta in (ii) è armonica in B , continua in \bar{B} e con integrale di Dirichlet infinito.

2. Detto B il disco unitario aperto in \mathbb{R}^2 , sia $g: \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ un'assegnata funzione continua. Posto $f(t) = g(\cos t, \sin t)$, siano a_n e b_n i coefficienti di Fourier di f , cioè

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} e usando la notazione complessa $z = |z|e^{i\theta}$, definiamo

$$u(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Verificare che per $|z| < 1$ è possibile scambiare serie e integrale e si ottiene che

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2} g(w) dw.$$

Suggerimenti: può essere utile utilizzare la formula di Eulero $e^{it} = \cos t + i \sin t$ ed osservare che, se $z = |z|e^{i\theta}$, allora $|z|^n(\cos(nt) \cos(n\theta) + \sin(nt) \sin(n\theta)) = \operatorname{Re}(z^n e^{-int})$. Inoltre verificare e sfruttare l'identità

$$\operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$

3. Detto B il disco unitario aperto in \mathbb{R}^2 e identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , verificare che la funzione

$$u(z) = \operatorname{Im} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \right]$$

è armonica in B , continua in $\overline{B} \setminus \{1\}$ e verifica

$$u(z) = 0 \quad \forall z \in \partial B \setminus \{1\} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\partial u}{\partial t}(tz) = 0 \quad \forall z \in \partial B.$$