

Introduzione

1.1 Modelli matematici

Nella descrizione di una gran parte di fenomeni nelle scienze applicate e in molteplici aspetti dell'attività tecnica e industriale si fa uso di *modelli matematici*.

Per “modello” intendiamo un insieme di equazioni e/o altre relazioni matematiche in grado di catturare le caratteristiche della situazione in esame e poi di descriverne, prevederne e controllarne lo sviluppo. Le scienze applicate non sono solo quelle classiche; oltre alla fisica e alla chimica, la modellistica matematica è entrata pesantemente in discipline complesse come la *finanza*, *la biologia*, *l'ecologia*, *la medicina*. Nell'attività industriale (per esempio nelle realizzazioni aeronautiche spaziali o in quelle navali, nei reattori nucleari, nei problemi di combustione, nella generazione e distribuzione di elettricità, nel controllo del traffico, ecc.), la modellazione matematica, seguita dall'analisi e dalla simulazione numerica e poi dal confronto sperimentale, è diventata una procedura diffusa, indispensabile all'innovazione, anche per motivi pratici ed economici. È chiaro che ciò è reso possibile dalle capacità di calcolo di cui oggi si dispone.

Un modello matematico è in generale costruito a partire da due mattoni principali:

leggi generali e relazioni costitutive.

Qui ci occuperemo di modelli in cui le leggi generali sono quelle della Meccanica dei Continui e si presentano come leggi di conservazione o di bilancio (della massa, dell'energia, del momento lineare, ecc.).

Le relazioni costitutive sono di natura sperimentale e dipendono dalle caratteristiche contingenti del fenomeno in esame. Ne sono esempi la legge di Fourier per il flusso di calore o quella di Fick per la diffusione di una sostanza o la legge di Ohm per la corrente elettrica.

Il risultato della combinazione dei due mattoni è di solito un'*equazione o un sistema di equazioni a derivate parziali*.

1.2 Equazioni a derivate parziali

Un'equazione a derivate parziali è una relazione del tipo

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots, u_{x_nx_n}, u_{x_1x_1x_1}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

dove $u = u(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione di n variabili. L'*ordine* dell'equazione è dato dal massimo ordine di derivazione che vi appare.

Una prima importante distinzione è quella tra equazioni *lineari* e *nonlineari*.

La (1.1) è *lineare* se F è lineare rispetto ad u e a tutte le sue derivate, altrimenti è *nonlineare*.

Tra i tipi di nonlinearietà distinguiamo:

– Equazioni *semilineari*, se F è nonlineare solo rispetto ad u ma è lineare rispetto a tutte le sue derivate.

– Equazioni *quasi-lineari*, se F è lineare rispetto alle derivate di u di ordine massimo.

– Equazioni *completamente nonlineari*, se F è nonlineare rispetto alle derivate di u di ordine massimo.

Si può ritenere che la teoria delle equazioni lineari sia sufficientemente ben sviluppata e consolidata, almeno per quanto riguarda le questioni più rilevanti. Al contrario, le equazioni nonlineari presentano una varietà così ricca di aspetti e complicazione che non sembra concepibile una teoria generale. I risultati esistenti e le nuove ricerche si concentrano su casi più o meno specifici, di interesse per le scienze applicate.

Per dare al lettore un'idea della vastità di possibili applicazioni, presentiamo una serie di esempi, indicando una possibile (spesso non l'unica!) interpretazione. Negli esempi, \mathbf{x} rappresenta una variabile spaziale (di solito in dimensione $n = 1, 2, 3$) e t è una variabile temporale.

Incominciamo con **equazioni lineari**. In particolare, le equazioni (1.2)–(1.5) sono fondamentali e la loro teoria costituisce una base per molte altre.

1. Equazione del trasporto (prim'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

$$u_t + \mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla u = 0. \quad (1.2)$$

Descrive, per esempio, il trasporto di un inquinante (solido) lungo un canale; qui u è la concentrazione della sostanza e \mathbf{v} è la velocità della corrente. La incontreremo nella Sezione 4.2.

2. Equazione di diffusione o del calore (second'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

$$u_t - D\Delta u = 0 \quad (1.3)$$

dove $\Delta = \partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2} + \dots + \partial_{x_nx_n}$ è l'*operatore di Laplace o Laplaciano*. Descrive, per esempio, la propagazione del calore per conduzione attraverso un mezzo omogeneo ed isotropo; u è la temperatura e D codifica le proprietà

termiche di un materiale. Il Capitolo 2 è dedicato all'equazione di diffusione ed ad alcune sue varianti.

3. Equazione delle Onde (second'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), $t \in \mathbb{R}$

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \quad (1.4)$$

Descrive la propagazione di onde trasversali di piccola ampiezza in una corda (e.g. di violino) se $n = 1$, in una membrana elastica (e.g. di un tamburo) se $n = 2$; se $n = 3$ descrive onde sonore o anche onde elettromagnetiche nel vuoto. Qui u è legata all'ampiezza delle vibrazioni e c è la velocità di propagazione. La sua variante

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0,$$

ottenuta aggiungendo il *termine di reazione* $m^2 u$, si chiama equazione di *Klein-Gordon*, importante in meccanica quantistica. La variante unidimensionale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k^2 u_t = 0,$$

ottenuta aggiungendo il *termine di dissipazione* $k^2 u_t$, si chiama equazione dei *telegrafi*, poiché governa la trasmissione di impulsi elettrici attraverso un cavo, quando vi siano perdite di corrente a terra. Gran parte del Capitolo 5 è dedicato all'equazione delle onde.

4. Equazione del potenziale o di Laplace (second'ordine): $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta u = 0. \quad (1.5)$$

Le equazioni di diffusione e delle onde descrivono fenomeni in evoluzione col tempo; l'equazione di Laplace (Capitolo 3) descrive lo *stato stazionario o di regime* corrispondente, in cui la soluzione non dipende più dal tempo. La sua versione non-omogenea

$$\Delta u = f$$

si chiama *equazione di Poisson*, importante in problemi di elettrostatica.

5. Equazione di Black-Scholes (second'ordine): $u = u(x, t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$

$$u_t + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 u_{xx} + r x u_x - r u = 0.$$

Fondamentale in finanza matematica, descrive l'evoluzione del prezzo u di un prodotto finanziario derivato (un'*opzione europea*, per esempio), basato su un bene sottostante (un'azione, una valuta, ecc.) il cui prezzo è x (si veda la Sezione 2.8).

6. *Equazione della piastra vibrante* (quart'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$

$$u_{tt} - \Delta^2 u = 0$$

dove $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$ è l'operatore *biarmonico*. In teoria dell'elasticità lineare, descrive le piccole vibrazioni di una piastra omogenea e isotropa (Paragrafo 8.7.2).

7. *Equazione di Schrödinger* (second'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), $t \geq 0$, i unità complessa,

$$-iu_t = \Delta u + V(\mathbf{x})u.$$

Interviene in meccanica quantistica e descrive l'evoluzione di una particella soggetta al potenziale V . La funzione $\psi = |u|^2$ ha il significato di *densità di probabilità* (si veda il Problema 6.6).

Vediamo ora qualche esempio di *equazione non-lineare*

8. *Equazione di Burgers* (semilineare, prim'ordine): $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$u_t + cuu_x = \varepsilon u_{xx}.$$

Descrive un flusso unidimensionale di particelle di un fluido con viscosità ε . La troviamo nel Paragrafo 4.4.5.

9. *Equazione di Korteweg de Vries* (semilineare, terz'ordine): $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0.$$

Appare nello studio delle onde *dispersive* (per la presenza del termine u_{xxx}) e descrive la formazione di onde solitarie.

10. *Equazione di Fisher* (semilineare, second'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

$$u_t - D\Delta u = ru \left(1 - \frac{u}{M}\right).$$

È un modello per la crescita di una popolazione di cui u rappresenta la densità, soggetta a diffusione e crescita logistica, espressa dal termine a secondo membro (Sezioni 2.10 e 9.4).

11. *Equazione dei mezzi porosi* (quasilineare, second'ordine): $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

$$u_t = k \operatorname{div}(u^\gamma \nabla u) = ku^\gamma \Delta u + k\gamma u^{\gamma-1} |\nabla u|^2$$

dove $k > 0$ e $\gamma > 1$ sono costanti. Questa equazione descrive fenomeni di filtrazione, per esempio quella dell'acqua attraverso il suolo (Sezione 2.10).

12. *Equazione delle superfici minime* (quasilineare, second'ordine): $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Il grafico di una soluzione u minimizza l'area tra tutte le superfici cartesiane¹ il cui bordo si appoggia su una data curva. Per esempio, le bolle di sapone sono superfici minime.

13. *Equazione eikonale* (completamente non-lineare, del prim'ordine): $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$|\nabla u| = c(\mathbf{x}).$$

È importante in ottica geometrica: le superfici di livello $u(\mathbf{x}) = t$ descrivono la posizione del fronte d'onda (luminosa) al tempo t (Paragrafo 4.6.3).

14. *Equazione di Monge-Ampère* (completamente non-lineare, del second'ordine): $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\det D^2 u = f(\mathbf{x})$$

dove $D^2 u$ indica la matrice Hessiana di u . Originariamente apparsa in problemi di geometria differenziale, è diventata fondamentale nei problemi di *allocazione ottima*.

Veniamo ora ad esempi di **sistemi**.

15. *Elasticità lineare*: $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$

$$\rho \mathbf{u}_{tt} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Si tratta di tre equazioni scalari di second'ordine. Il vettore \mathbf{u} descrive lo spostamento dalla posizione iniziale di un continuo deformabile di densità ρ .

16. *Equazioni di Maxwell nel vuoto* (sei equazioni lineari scalari del prim'ordine):

$$\mathbf{E}_t - \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_t + \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{leggi di Ampère e di Faraday})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{leggi di Gauss})$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico e \mathbf{B} è il campo di induzione magnetica. Le unità di misura sono quelle "naturali" dove la velocità della luce nel vuoto è $c = 1$ e la permeabilità magnetica nel vuoto è $\mu_0 = 1$.

¹ Che siano cioè grafici di funzioni $z = v(x, y)$.

17. Equazioni di Navier-Stokes: $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x},t), u_2(\mathbf{x},t), u_3(\mathbf{x},t))$, $p = p(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Questo sistema è costituito da quattro equazioni, di cui tre quasilineari. Descrive il moto di un fluido viscoso, omogeneo e incomprimibile. Qui \mathbf{u} è la velocità del fluido, p la pressione, ρ la densità (qui costante) e ν è la viscosità cinematica, data dal rapporto tra la viscosità del fluido e la sua densità.

1.3 Problemi ben posti

Nella costruzione di un modello, intervengono solo alcune tra le equazioni generali di campo, altre vengono semplificate o eliminate attraverso le relazioni costitutive o procedimenti di approssimazione coerenti con la situazione in esame. Ulteriori informazioni sono comunque necessarie per selezionare o predire l'esistenza e/o l'unicità di una soluzione e si presentano in generale sotto forma di *condizioni iniziali e/o condizioni al bordo del dominio di riferimento* o altre ancora. Per esempio, tipiche condizioni al bordo prevedono di assegnare la soluzione o la sua derivata normale. Spesso sono appropriate combinazioni di queste condizioni. La teoria si occupa allora di stabilire condizioni sui dati affinché il problema abbia le seguenti caratteristiche:

- a) *esista almeno una soluzione;*
- b) *esista una sola soluzione;*
- c) *la soluzione dipenda con continuità dai dati.*

Quest'ultima condizione richiede qualche parola di spiegazione: in sintesi la c) afferma che la corrispondenza

$$\text{dati} \rightarrow \text{soluzione} \tag{1.6}$$

sia *continua* ossia che, *un piccolo errore sui dati provochi un piccolo errore sulla soluzione*. Si tratta di una proprietà estremamente importante, che si chiama anche **stabilità locale della soluzione rispetto ai dati**. Per esempio, pensiamo al caso in cui occorra usare un computer (cioè quasi sempre) per il calcolo della soluzione: automaticamente, l'inserimento dei dati e le procedure di calcolo comportano errori di approssimazione di vario tipo. Una sensibilità eccessiva della soluzione a piccole variazioni dei dati produrrebbe una soluzione approssimata, neppure lontana parente di quella originale.

La nozione di continuità, ma anche la misura degli errori, sia sui dati sia sulla soluzione, si precisa introducendo un'opportuna *distanza*. Se i dati sono

numeri o vettori finito dimensionali, le distanze sono le solite, per esempio, quella *euclidea*: se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

Se si tratta di funzioni, per esempio reali e definite su un dominio I , distanze molto usate sono:

$$\text{dist}(f, g) = \max_I |f - g|$$

che misura il massimo scarto tra f e g e

$$\text{dist}(f, g) = \sqrt{\int_I (f - g)^2}$$

che misura lo scarto quadratico tra f e g . Una volta in possesso di una nozione di distanza, la continuità della corrispondenza (1.6) è facile da precisare: *se la distanza tra i dati tende a zero allora anche la distanza delle rispettive soluzioni tende a zero.*

Quando un problema possiede le caratteristiche a), b) c) si dice che è **ben posto**. Per chi costruisce modelli matematici è molto comodo, a volte essenziale, avere a che fare con problemi ben posti: l'esistenza di una soluzione segnala che il modello ha una sua coerenza, l'unicità e la stabilità aumentano la possibilità di calcoli numerici accurati. Come si può immaginare, in generale, modelli complessi richiedono tecniche di analisi teorica e numerica piuttosto sofisticate. Problemi di una certa complessità diventano tuttavia ben posti e trattabili numericamente in modo efficiente se riformulati e ambientati opportunamente, utilizzando i metodi dell'Analisi Funzionale.

Non solo i problemi ben posti sono tuttavia interessanti per le applicazioni. Vi sono problemi che sono intrinsecamente mal posti per mancanza di unicità oppure per mancanza di stabilità ma di grande importanza per la tecnologia moderna. Una classe tipica è quella dei cosiddetti *problemi inversi*, di cui fa parte, per esempio, la T.A.C. (*Tomografia Assiale Computerizzata*). Il trattamento di questo tipo di problema esula però da un'introduzione come questa.

1.4 Notazioni e nozioni preliminari

In questa sezione introduciamo alcuni simboli usati costantemente nel seguito e richiamiamo alcune nozioni e formule di Topologia e Analisi in \mathbb{R}^n .

Insiemi e topologia. Indichiamo rispettivamente con: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} gli insiemi dei numeri naturali, interi (relativi), razionali, reali e complessi. \mathbb{R}^n è lo spazio vettoriale n -dimensionale delle n -uple di numeri reali. Indichiamo con $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ i vettori della base canonica in \mathbb{R}^n . In \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 possiamo usare anche \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} .

Il simbolo $B_r(\mathbf{x})$ indica la (iper)sfera *aperta* in \mathbb{R}^n , con raggio r e centro in \mathbf{x} , cioè

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}.$$

Se non c'è necessità di specificare il raggio o centro, scriviamo semplicemente $B(\mathbf{x})$ o B . Il volume di B_r e l'area della superficie sferica S_r sono dati da

$$|B_r| = \frac{\omega_n}{n} r^n \quad \text{e} \quad |S_r| = \omega_n r^{n-1}$$

dove ω_n è l'area della superficie della sfera unitaria² S_1 in \mathbb{R}^n ; in particolare, $\omega_2 = 2\pi$ e $\omega_3 = 4\pi$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in E$ è:

- *interno* se esiste $B_r(\mathbf{x}) \subset E$;
- *di frontiera* se ogni sfera $B_r(\mathbf{x})$ contiene punti di E e del suo complementare $\mathbb{R}^n \setminus E$. L'insieme dei punti di frontiera di E , la *frontiera di E* , si indica con ∂E , in particolare $S_r = \partial B_r$;

- *punto limite* di E se esiste una successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1} \subset E$ tale che $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$.

E è *aperto* se ogni punto di E è interno; l'insieme $\overline{E} = E \cup \partial E$ si chiama *chiusura di E* ; E è *chiuso* se $E = \overline{E}$. Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti limite.

Poiché \mathbb{R}^n è aperto e chiuso simultaneamente, anche l'insieme vuoto \emptyset è da considerarsi aperto e chiuso. È importante sottolineare che **solo** \mathbb{R}^n e \emptyset hanno questa proprietà.

Un insieme aperto E è *connesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ esiste una curva regolare che li connette, interamente contenuta in E . Gli insiemi *aperti* e *connessi* si chiamano *domini*, per i quali useremo prevalentemente la lettera Ω .

Un insieme E si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ il segmento di retta che li unisce è interamente contenuto in E . Evidentemente ogni convesso è anche connesso.

Se $U \subset E$, diciamo che U è *denso in E* se $\overline{U} = \overline{E}$. Questo significa, in particolare, che se $\mathbf{x} \in E$, esiste una successione $\{\mathbf{x}_k\} \subset U$ tale che $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$, per $k \rightarrow \infty$. Per esempio \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

E è *limitato* se esiste una sfera $B_r(\mathbf{0})$ che lo contiene.

La categoria degli insiemi *compatti* è particolarmente importante. Si dice che una famiglia \mathcal{F} di *aperti* è una *copertura* di un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ se E è contenuto nell'unione degli elementi di \mathcal{F} .

Un insieme si dice *compatto* se ogni copertura \mathcal{F} di E contiene una sottofamiglia di un numero finito di elementi, che sia ancora una copertura di E . In \mathbb{R}^n , gli insiemi compatti sono tutti e soli gli insiemi *chiusi* e *limitati*. Se $\overline{E_0}$ è compatto e contenuto in E , si scrive $E_0 \subset\subset E$ e si dice che E_0 è *contenuto con compattezza* in E .

² In generale, $\omega_n = n\pi^{n/2} / \Gamma(\frac{1}{2}n + 1)$ dove $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ è la funzione *gamma di Eulero*.

• *Topologia indotta* Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che $A \subseteq E$ è *aperto (chiuso) relativamente ad E* , rispetto alla topologia indotta da \mathbb{R}^n , se A è intersezione di E con un insieme aperto (chiuso) in \mathbb{R}^n . Tipicamente, dovremo considerare aperti e chiusi relativamente alla frontiera $\partial\Omega$ di un dominio.

N.B: L'intervallo $[-1, 1/2)$ è *aperto relativamente ad $E = [-1, 1]$* , rispetto alla topologia indotta da \mathbb{R} !

Estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali. Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ è *inferiormente limitato* se esiste un numero K tale che

$$K \leq x \quad \text{per ogni } x \in E. \quad (1.7)$$

Il maggiore tra i numeri K con la proprietà (1.7) è detto *estremo inferiore* di E e si indica con $\inf E$.

Più precisamente, $\lambda = \inf E$ se $\lambda \leq x$ per ogni $x \in E$ e se, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\bar{x} \in E$ tale che $\bar{x} < \lambda + \varepsilon$. Se $\inf E \in E$, allora $\inf E$ è il *minimo di E* , che si indica con $\min E$.

Analogamente, un insieme $E \subset \mathbb{R}$ è *superiormente limitato* se esiste un numero K tale che

$$x \leq K \quad \text{per ogni } x \in E. \quad (1.8)$$

Il minore tra i numeri K con la proprietà (1.8) è detto *estremo superiore* di E e si indica con $\sup E$.

Più precisamente, $\Lambda = \sup E$ se $\Lambda \geq x$ per ogni $x \in E$ e se, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\bar{x} \in E$ tale che $\bar{x} > \Lambda - \varepsilon$. Se $\sup E \in E$, allora $\sup E$ è il *massimo di E* , che si indica con $\max E$.

Limite inferiore e superiore di una successione di numeri reali. Sia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali. Si dice che l (finito o infinito) è *punto limite di $\{x_n\}_{n \geq 1}$* se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow l$. La *classe limite* di $\{x_n\}_{n \geq 1}$ è l'insieme dei suoi punti limite. L'estremo inferiore λ della classe limite, si chiama *limite inferiore di x_n* e si scrive

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda.$$

Analogamente, l'estremo superiore Λ della classe limite, si chiama *limite superiore di x_n* e si scrive

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \Lambda.$$

Per esempio, La classe limite della successione $\{\cos n\}_{n \geq 1}$ è l'intervallo $[-1, 1]$ e quindi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \cos n = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \cos n = 1.$$

Se la classe limite si riduce ad un punto l , allora questo è il limite della successione.

Funzioni. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita in Ω . Diciamo che u è *continua* in $\mathbf{x} \in \Omega$ se $u(\mathbf{y}) \rightarrow u(\mathbf{x})$ per $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$. Se u è

continua in ogni punto di Ω , diciamo che u è continua in Ω . L'insieme delle funzioni continue in Ω si indica col simbolo $C(\Omega)$. Il simbolo $C(\overline{\Omega})$ denota il sottoinsieme di $C(\Omega)$ delle funzioni estendibili con continuità fino al bordo di Ω .

Il *supporto* di una funzione continua in Ω è la *chiusura* (relativamente ad Ω) dell'insieme dei punti in cui è diversa da zero. Si dice che $u \in C(\Omega)$ è a *supporto compatto* se è nulla fuori da un compatto contenuto in Ω . L'insieme di queste funzioni si indica con $C_0(\Omega)$.

Il simbolo χ_Ω indica la *funzione caratteristica di Ω* : $\chi_\Omega = 1$ in Ω e $\chi_\Omega = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Diciamo che u è *inferiormente* (risp. *superiormente*) *limitata* in Ω se l'immagine

$$u(\Omega) = \{y \in \mathbb{R}, y = u(\mathbf{x}) \text{ per qualche } \mathbf{x} \in \Omega\}$$

è *inferiormente* (risp. *superiormente*) *limitata*. L'*estremo inferiore* (risp. *superiore*) di u in Ω è l'estremo inferiore (risp. superiore) di $u(\Omega)$ e si indica col simbolo

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \quad (\text{risp. } \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x})).$$

Se Ω è limitato e $u \in C(\overline{\Omega})$ allora esistono il *massimo* ed il *minimo globali* di u (Teorema di Weierstrass).

Useremo uno dei simboli u_{x_j} , $\partial_{x_j} u$, $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ per indicare le derivate parziali prime di u , e ∇u oppure $\text{grad } u$ per il *gradiente* di u . Coerentemente, per le derivate di ordine più elevato useremo le notazioni $u_{x_j x_k}$, $\partial_{x_j x_k} u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ e così via.

Diciamo che u è di *classe $C^k(\Omega)$* , $k \geq 1$, se u è derivabile con continuità in Ω , fino all'ordine k incluso. L'insieme delle funzioni derivabili con continuità in Ω fino a qualunque ordine si indica con $C^\infty(\Omega)$.

Se $u \in C^1(\Omega)$ allora u è differenziabile in Ω e possiamo scrivere, per $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, piccolo:

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(\mathbf{h})$$

dove il simbolo $o(\mathbf{h})$, che si legge “*o piccolo di \mathbf{h}* ” denota una quantità tale che $o(\mathbf{h}) / |\mathbf{h}| \rightarrow 0$ per $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$.

Il simbolo $C^k(\overline{\Omega})$ denota l'insieme delle funzioni appartenenti a $C^k(\Omega)$ le cui derivate fino all'ordine k incluso, possono essere estese con continuità fino a $\partial\Omega$.

Integrali. Fino al Capitolo 5 incluso, gli integrali possono essere intesi nel senso di Riemann (proprio o improprio). Una breve introduzione alla misura e all'integrale di Lebesgue si può trovare nell'Appendice A. Siano $1 \leq p < \infty$ e $q = p/(p-1)$, l'*esponente coniugato di p* . Vale la seguente importante

disuguaglianza di Hölder:

$$\left| \int_{\Omega} uv \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |v|^q \right)^{1/q}. \quad (1.9)$$

Il caso $p = q = 2$ è noto come disuguaglianza di Schwarz.

Convergenza uniforme. Una serie $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$, dove $u_m : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si dice *uniformemente convergente in Ω* , con *somma u* , se, posto $S_N = \sum_{m=1}^N u_m$, si ha

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |S_N(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow \infty.$$

Invece di ricorrere alla definizione, per stabilire la convergenza uniforme di una serie di funzioni si usa spesso il seguente criterio:

Test di Weierstrass. Sia $|u_m(\mathbf{x})| \leq a_m$, per ogni $m \geq 1$ e $\mathbf{x} \in \Omega$. Se la serie numerica $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ è convergente, allora $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ converge assolutamente e uniformemente in Ω .

Limiti e serie. Sia $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ uniformemente convergente in Ω . Se u_m è continua in \mathbf{x}_0 per ogni $m \geq 1$, allora la somma u è continua in \mathbf{x}_0 e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0).$$

Integrazione per serie. Sia $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ uniformemente convergente in Ω . Se Ω è limitato e u_m è integrabile in Ω per ogni $m \geq 1$, allora:

$$\int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} u_m.$$

Derivazione per serie. Sia Ω limitato e $u_m \in C^1(\overline{\Omega})$ per ogni $m \geq 1$. Se:

- i) la serie $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(\mathbf{x}_0)$ è convergente in almeno un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$,
- ii) le serie $\sum_{m=1}^{\infty} \partial_{x_j} u_m$ sono uniformemente convergenti in $\overline{\Omega}$ per ogni $j = 1, \dots, n$,

allora $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ converge uniformemente in $\overline{\Omega}$, con somma $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e, per ogni $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$,

$$\partial_{x_j} \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \partial_{x_j} u_m(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

1.5 Serie di Fourier

Richiamiamo i risultati principali riguardanti la convergenza in media quadratica, puntuale ed uniforme delle serie di Fourier.

Coefficienti e serie di Fourier. Sia u una funzione periodica di periodo $2T$, integrabile su $(-T, T)$. I coefficienti di Fourier di u sono definiti dalle seguenti formule, dove $\omega = \pi/T$:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(x) \cos n\omega x \, dx, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(x) \sin n\omega x \, dx. \quad (1.10)$$

Ricordiamo le seguenti relazioni di ortogonalità:

$$\int_{-T}^T \cos k\omega x \cos m\omega x \, dx = \int_{-T}^T \sin k\omega x \sin m\omega x \, dx = 0 \quad \text{per } k \neq m$$

$$\int_{-T}^T \cos k\omega x \sin m\omega x \, dx = 0 \quad \text{per ogni } k, m \geq 0.$$

Inoltre:

$$\int_{-T}^T \cos^2 k\omega x \, dx = \int_{-T}^T \sin^2 k\omega x \, dx = T. \quad (1.11)$$

Ad u possiamo associare la sua serie di Fourier, scrivendo

$$u(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\}. \quad (1.12)$$

• *Funzioni pari e dispari.* Se u è una funzione *dispari*, cioè $u(-x) = -u(x)$, abbiamo $a_k = 0$ per ogni $k \geq 0$, mentre

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(x) \sin k\omega x \, dx.$$

Pertanto, se u è *dispari*, la sua serie di Fourier è di soli *seni*:

$$u \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x.$$

Analogamente, se u è *pari*, i.e. $u(-x) = u(x)$, abbiamo $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$, mentre

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(x) \cos k\omega x \, dx.$$

Pertanto, se u è *pari*, la sua serie di Fourier è di soli *coseni*:

$$u \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x.$$

• *Forma complessa.* Usando l'identità di Eulero

$$e^{ik\omega x} = \cos k\omega x + i \sin k\omega x$$

la serie di Fourier (1.12) può essere espressa nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{ik\omega x},$$

dove i coefficienti di Fourier complessi \hat{u}_k sono dati da

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

Le relazioni tra i coefficienti reali e complessi sono le seguenti:

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad \text{e} \quad \hat{u}_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k), \quad \hat{u}_{-k} = \overline{\hat{u}_k} \quad \text{per } k > 0.$$

Convergenza in media quadratica. Questa è la più naturale nozione di convergenza di una serie di Fourier (si veda il Paragrafo 6.4.2).

Sia

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \{a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\}$$

la somma parziale N -esima della serie di Fourier di u . Abbiamo:

Teorema 5.1. *Se u è una funzione a quadrato integrabile³ in $(-T, T)$ allora*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T [S_N(x) - u(x)]^2 dx = 0.$$

Inoltre, vale la seguente formula di Bessel:

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T u^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (1.13)$$

Poiché la serie numerica a secondo membro della (1.13) è convergente, deduciamo la seguente importante conseguenza:

Corollario 5.2 (Riemann-Lebesgue)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0.$$

Nota 5.1. Dal Teorema 5.1 si deducono le seguenti notevoli identità in termini di coefficienti complessi ($T = \pi$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} uv = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \hat{v}_{-k} \quad (\text{formula di Parseval})$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2 \quad (\text{formula di Bessel}).$$

Convergenza puntuale. Diciamo che u soddisfa le *condizioni di Dirichlet* in $[-T, T]$ se:

i) è continua in $[-T, T]$ eccetto al più un numero di punti di discontinuità a salto,

³ Cioè $\int_{-T}^T u^2 < \infty$.

ii) l'intervallo $[-T, T]$ può essere ripartito nell'unione di un numero finito di sottointervalli in ciascuno dei quali u è monotona.

Vale il seguente teorema.

Teorema 5.3. *Se u soddisfa le condizioni di Dirichlet in $[-T, T]$ allora la serie di Fourier di u converge in ogni punto di $[-T, T]$. Inoltre⁴:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\} = \begin{cases} \frac{u(x+) + u(x-)}{2} & x \in (-T, T) \\ \frac{u(T-) + u(-T+)}{2} & x = \pm T. \end{cases}$$

In particolare, sotto le ipotesi del Teorema 5.3, in ogni punto x di continuità per u , la serie di Fourier di u converge a $u(x)$.

Convergenza uniforme. Un semplice criterio di convergenza uniforme segue dal test di Weierstras. Poiché

$$|a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x| \leq |a_k| + |b_k|$$

si deduce che: se le serie numeriche

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

sono convergenti, allora la serie di Fourier di u converge uniformemente in \mathbb{R} , con somma u .

D'altra parte, possiamo rifinire il Teorema 5.3 come segue.

Teorema 5.4. *Valgano per u le condizioni di Dirichlet in $[-T, T]$. Allora:*

a) *Se u è continua in $[a, b] \subset (-T, T)$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in $[a, b]$;*

b) *Se u è continua in $[-T, T]$ e $u(-T) = u(T)$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in $[-T, T]$ (e quindi in \mathbb{R}).*

1.6 Domini regolari e Lipschitziani

Avremo bisogno di classificare i domini Ω in \mathbb{R}^n secondo il grado di regolarità della loro frontiera.

Definizione 6.1. *Diciamo che Ω è un dominio di classe C^1 se per ogni punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, esistono un sistema di coordinate $(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv (\mathbf{y}', y_n)$ con origine in \mathbf{x} , una sfera $B(\mathbf{x})$ e una funzione φ , definita in un intorno $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di $\mathbf{y}' = \mathbf{0}'$, tale che*

$$\varphi \in C^1(\mathcal{N}), \quad \varphi(\mathbf{0}') = 0$$

e

⁴ Poniamo $f(x\pm) = \lim_{y \rightarrow \pm x} f(y)$.

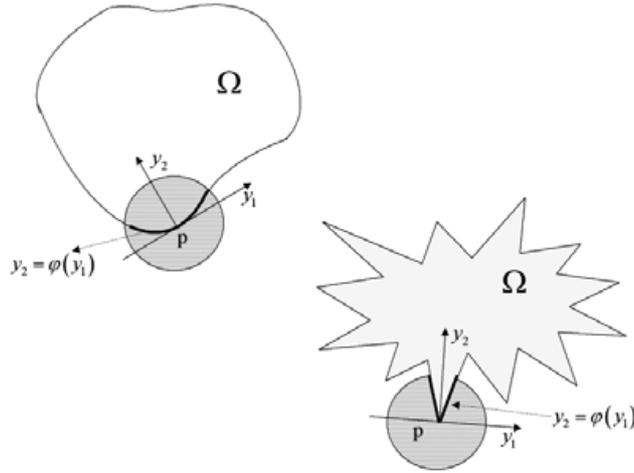


Figura 1.1. Un dominio C^1 e un dominio Lipschitziano

1. $\partial\Omega \cap B(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{y}', y_n) : y_n = \varphi(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in \mathcal{N}\};$
2. $\Omega \cap B(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{y}', y_n) : y_n > \varphi(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in \mathcal{N}\}.$

La prima condizione esprime il fatto che $\partial\Omega$ coincide localmente con il grafico di una funzione di classe C^1 . La seconda richiede che Ω si trovi localmente da una sola parte rispetto alla frontiera.

La frontiera di un dominio di classe C^1 non presenta angoli o spigoli e in ogni punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ è ben definito un iperpiano tangente (una retta se $n = 2$, un piano se $n = 3$), insieme ai due versori normali *esterno ed interno*. Inoltre, questi versori variano con continuità su $\partial\Omega$.

Le coppie (φ, \mathcal{N}) nella Definizione 6.1 sono dette *carte locali*. Se le φ sono tutte funzioni di classe C^k , $k \geq 1$, si dice che Ω è un dominio di classe C^k . Se Ω è di classe C^k per ogni $k \geq 1$, si dice che è un dominio di classe C^∞ . A questi ultimi ci riferiamo con la locuzione *domini regolari*.

Osserviamo che se Ω è *limitato* è possibile trovare una copertura di $\partial\Omega$ (che è un insieme compatto) costituita da un numero finito di sfere $B_j = B(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, \dots, N$, centrate in $\mathbf{x}_j \in \partial\Omega$. La frontiera $\partial\Omega$ può essere dunque descritta tramite N carte locali $(\varphi_j, \mathcal{N}_j)$.

Considerata una carta locale $(\varphi_j, \mathcal{N}_j)$, la trasformazione biunivoca $\mathbf{z} = \Phi_j(\mathbf{y})$ data da

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \mathbf{y}' \\ z_n = y_n - \varphi_j(\mathbf{y}') \end{cases} \quad (1.14)$$

trasforma $\Omega \cap B_j$ in un sottoinsieme aperto U_j del semispazio $z_n > 0$ e $\partial\Omega \cap B_j$ in un sottoinsieme dell'iperpiano $z_n = 0$, cosicché il suo effetto è di *spianare* $\partial\Omega \cap B_j$, come mostrato in Figura 1.2.

In una gran parte delle applicazioni i domini rilevanti sono rettangoli, prismi, coni, cilindri o loro unioni. Molto importanti per esempio sono i domini ottenuti con procedure di triangolazione di domini regolari nei metodi di approssimazione numerica. Questi tipi di domini appartengono alla classe dei

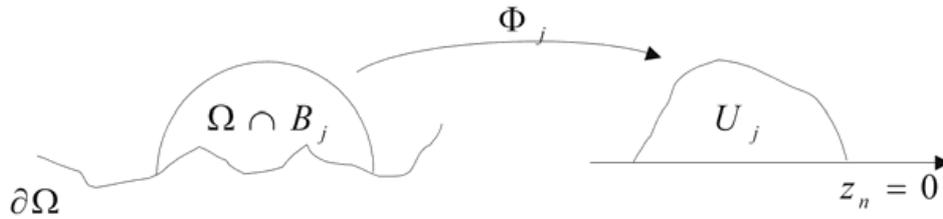


Figura 1.2. Azione del diffeomorfismo (1.14) sulla frontiera $\partial\Omega$

domini *Lipschitziani*, la cui frontiera coincide localmente col grafico di una funzione Lipschitziana.

Definizione 6.2. Si dice che $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è Lipschitziana con costante L , se

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Sostanzialmente, una funzione è Lipschitziana in Ω se i suoi rapporti incrementali lungo ogni direzione sono limitati. Tipiche funzioni reali Lipschitziane in \mathbb{R}^n sono $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ o, più generalmente, la *funzione distanza da un insieme chiuso* C , definita da

$$f(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, C) = \inf_{\mathbf{y} \in C} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Poiché il grafico di una funzione Lipschitziana può presentare angoli e/o spigoli, non ci si può aspettare l'esistenza di un iperpiano tangente in ogni suo punto. Tuttavia, l'insieme dei punti "irregolari" costituisce un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue). Precisamente, vale il seguente teorema (si veda e.g. *Evans and Gariepy, 1997*):

Teorema 6.1. (di Rademacher). Sia u una funzione Lipschitziana in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora u è differenziabile in ogni punto di Ω , tranne che in un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue).

Diciamo allora che un **dominio è Lipschitziano** se nella Definizione 6.1 le funzioni φ sono Lipschitziane o, equivalentemente, se le trasformazioni (1.14) indotte dalle carte locali sono *bi-Lipschitziane*, ossia se Φ e Φ^{-1} sono Lipschitziane.

1.7 Formule di integrazione per parti

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato di classe C^1 e $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vettoriale di classe $C^1(\overline{\Omega})$. Essendo \mathbf{F} a valori in \mathbb{R}^n , scriviamo $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Vale la **formula di Gauss o della divergenza**:

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \quad (1.15)$$

dove $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j$ indica la divergenza di \mathbf{F} , $\boldsymbol{\nu}$ denota il *versore normale esterno* a $\partial\Omega$ e $d\sigma$ è la misura di “superficie” su $\partial\Omega$. In termini di carte locali si ha:

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla\varphi(\mathbf{y}')|^2} d\mathbf{y}'.$$

Dalla (1.15) si possono dedurre alcune formule notevoli. Applicando la (1.15) a $v\mathbf{F}$, con $v \in C^1(\overline{\Omega})$, e ricordando l'identità

$$\operatorname{div}(v\mathbf{F}) = v \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla v \cdot \mathbf{F},$$

otteniamo la seguente formula di **integrazione per parti**:

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x}. \quad (1.16)$$

Scegliendo $\mathbf{F} = \nabla u$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, poiché $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ e $\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = \partial_{\nu} u$, si ricava la seguente **identità di Green**:

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mathbf{x}. \quad (1.17)$$

In particolare, la scelta $v \equiv 1$ dà

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, d\sigma. \quad (1.18)$$

Se anche $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, scambiando i ruoli di u e v nella (1.17) e sottraendo membro a membro, deduciamo una seconda **identità di Green**:

$$\int_{\Omega} v \Delta u - u \Delta v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (v \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} v) \, d\sigma. \quad (1.19)$$

Nota 7.1. Tutte le formule in questa sezione valgono anche in domini Lipschitziani limitati. Infatti il Teorema di Rademacher implica che, in ogni punto della frontiera di un dominio Lipschitziano, tranne un insieme di punti di misura superficiale zero, esiste un iperpiano tangente, e quindi un versore normale esterno, ben definiti. Ciò è sufficiente per estendere le formule (1.16), (1.17) e (1.19) ai domini Lipschitziani.