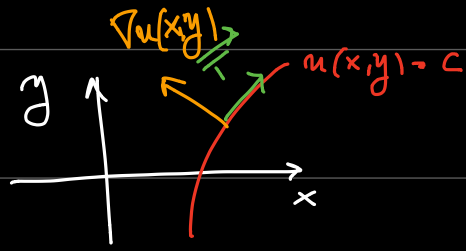
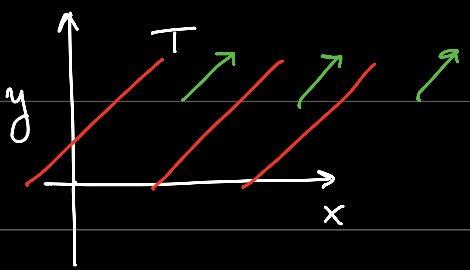
EQUAZIONE LINEARE DEL PRIMO ORDINE

→ Omogenea a coefficienti costanti:

$$\boxed{a u_x + b u_y = 0}$$

$$\underbrace{(a,b)}_{\vec{T}} \cdot \nabla u(x,y) = 0$$





rette parallele a $\vec{T}$. Introduco un parametro s

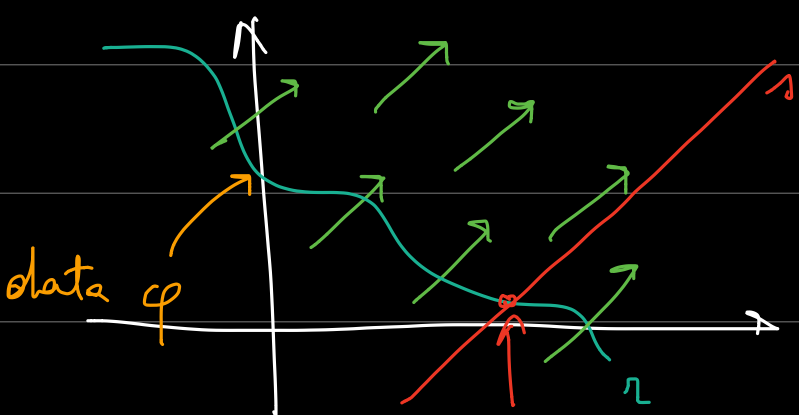
$$P(s) = P_0 + s\vec{T}$$

$$\frac{dP}{ds} = \dot{P}(s) = \vec{T}$$

$$\frac{d}{ds} u(P(s)) = \dot{P}(s) \cdot \nabla u(P(s)) = \vec{T} \cdot \nabla u(P(s)) = 0$$

La funzione u è costante lungo le rette parallele a $\vec{T} = (a,b)$ sono le rette di equazione $-bx + ay = c$.

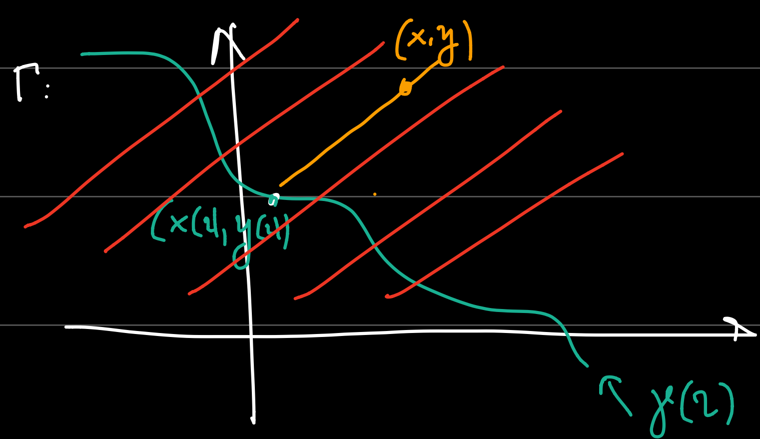
La soluzione è della forma $u(x,y) = \varphi(-bx+ay)$, dove $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione.



Caratteristiche: rette che risolvono il sistema (detto sistema

caratteristiche:
$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a \\ \frac{dy}{ds} = b \end{cases}$$

a cui devo associare delle condizioni iniziali sulla curva verde $\Gamma : (x(r), y(r))$. Ho quindi due parametri: s e r



$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a \\ x(r,0) = x(r) \\ \frac{dy}{ds} = b \\ y(r,0) = y(r) \end{cases}$$

$x(r,s) = x(r) + sa \qquad x - sa = x(r)$,

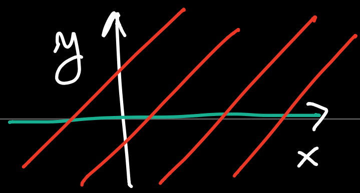
$y(r,s) = y(r) + sb \qquad y - sb = y(r)$

Supponiamo di conoscere $u(x(r), y(r)) = \varphi(r)$. Allora

$u(x,y) = \varphi(r)$. Devo ricavare r in funzione di (x,y).

Esempio: la curva iniziale è a sua volta una retta

e.g. asse x



Non deve essere parallelo a T

$$a u_x + b u_y = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a & x(0) = r \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = b & y(0) = 0 \end{cases}$$

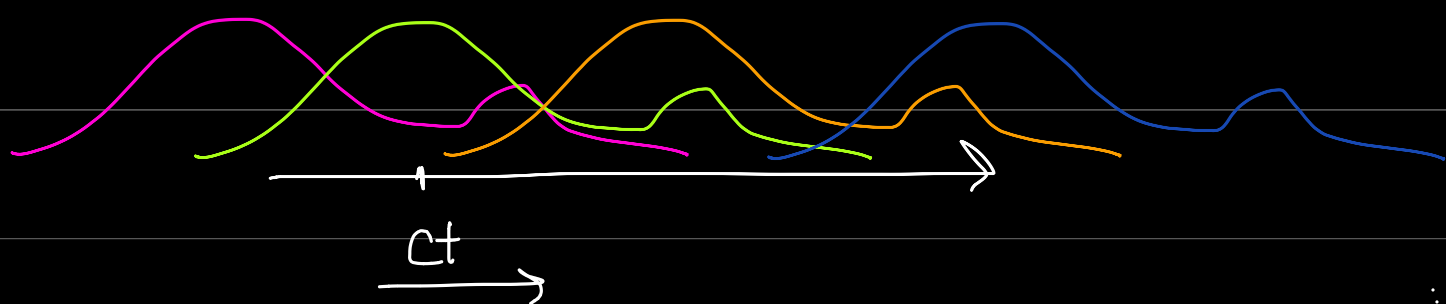
$$y(r,s) = b s \qquad x(r,s) = r + a s$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{y}{b}, \qquad r = x - \frac{a}{b} y$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \varphi\left(x - \frac{a}{b} y\right)$$

Pensiamo che y sia la variabile temporale t : ho

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) \qquad \text{con } c = \frac{a}{b}$$



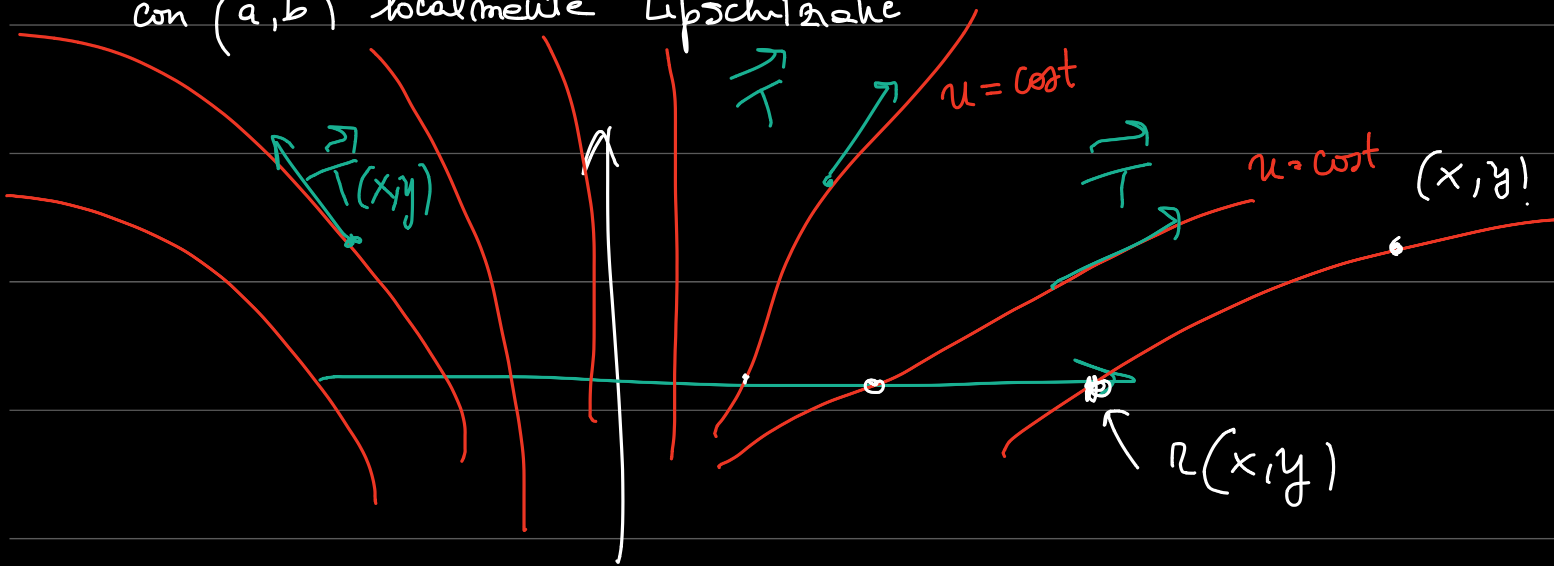
Profilo viaggiante, o onda progressiva.

Posso risolvere nello stesso modo i problemi con a, b non costanti: sistema caratteristico

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{ds} = b(x,y) \end{cases}$$

$$\vec{T}(x,y) = \left(a(x,y), b(x,y)\right)$$

con (a,b) localmente Lipschitziane



Abbiamo bisogno che le curve caratteristiche incontrino una e una sola volta l'asse x. In particolare deve intersecarle in modo trasverso $\boxed{b(x,0) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Se $b(x,0) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ posso dividere per b e pensare che $b(x,0) = 1$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x,y) & x(r,0) = r \\ \\ \dfrac{dy}{ds} = 1 & y(r,0) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad y(r,s) = s$ cioè y è proprio il parametro s

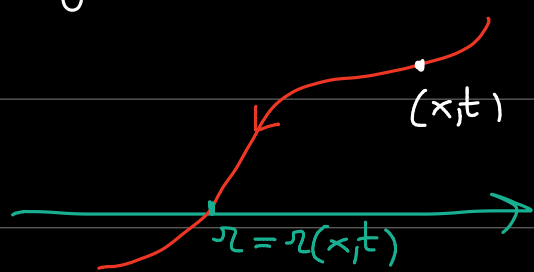
Tradizionalmente, y è il parametro temporale e viene indicato con t.

$$\begin{cases} u_t + a(x,t)\,u_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ risolviamo (chiamiamo v la variabile x ...)

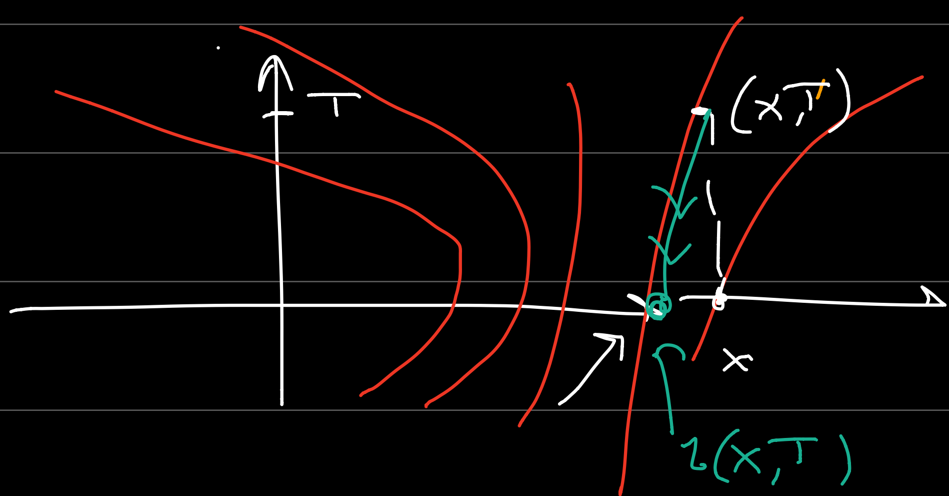
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a(v,t) \\ v(r,0) = r \end{cases} \Longrightarrow v(r,t)$$

dati (x,t) vogliamo ricavare $r = r(x,t)$



Allora $u(x,t) = \varphi(r(x,t))$.

Ma come faccio a trovare ?



Dati (x,T) risolviamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a(v,t) & t\in[0,T] \\ v(T) = x \end{cases}$$

occorre che il problema di Cauchy abbia esistenza globale in tempo (all'indietro). Sicuramente vero se a è limitato, o anche se $|a(x,t)| \le A(t)|x| + B(t)$. $\forall x,t$ con A e B continui da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

EQUAZIONE DEL TRASPORTO

$$\boxed{u_t + \vec{a}(x,t)\cdot\nabla_x u(x,t) = 0}$$

serve a descrivere modelli della dinamica dei fluidi, trasporto di inquinanti, circolazione (traffico veicolare, sangue, ecc...).

Per garantire la conservazione della massa si usa il

$$\boxed{u_t + \operatorname{div}(u\,\vec{a}) = 0}$$

$$u_t + \vec{a}(x,t)\cdot\nabla_x u(x,t) + u\operatorname{div}(\vec{a})$$

EQUAZIONE NON OMOGENEA

$$u_t + \vec{a}(x,t) \cdot \nabla_x u = c(x,t,u)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \vec{a}(v,t) & v(r,0) = r \in \mathbb{R}^n \ni x \\ \dfrac{dw}{dt} = c(v,t,w) & w(r,0) = g(r) \end{cases}$$

u non é più costante lungo le caratteristiche, ma so qual é la sua variazione: é descritta da

$$\frac{dw}{dt} = c(v,t,w) \qquad w(r,0) = g(r)$$

risolvo prima il problema

$$\frac{dv}{dt} = a(v,t) \qquad v(r,0) = r$$

e poi inserisco $v(r,t)$ in

$$\frac{dw}{dt} = c(v(r,t),t,w) \qquad w(r,0) = g(r)$$

Di nuovo, la soluzione é data da

$$u(x,t) = w(r(x,t),t),$$

dove $r(x,t)$ é definito da $\boxed{v(r,t) = x}$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} u_t + (1-x)u_x = xt \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \overbrace{1-v}^{a(v,t)} & v(r,0) = r \\ \dfrac{dw}{dt} = \underbrace{vt}_{c(v,t)} & w(r,0) = g(r) \end{cases}$$

$$v(r,t) = 1 + c(r)e^{-t} \qquad v(r,0) = 1 + c(r) = r$$

$$\Rightarrow v(r,t) = 1 + (r-1)e^{-t}$$

Pongo $\boxed{v(r,t) = x}$ e ottengo $r = r(x,t)$

$$x = 1 + (r-1)e^{-t} \Rightarrow r - 1 = (x-1)e^{t} \quad \boxed{r = 1 + (x-1)e^{t}}$$

Inserisco in $\dfrac{dw}{dt} = vt$ $\qquad w(r,0) = g(r)$

$$\frac{dw}{dt} = vt = \Big[\overset{v(r,t)}{\overset{\parallel}{1 + (r-1)e^{-t}}}\Big]t \quad \text{con} \quad w(r,0) = g(r)$$

$$\Rightarrow w(r,t) = g(r) + \int_0^t \left(1 + (r-1)e^{-s}\right)s\,ds =$$

$$= g(r) + \frac{t^2}{2} + (r-1)\underbrace{\int_0^t e^{-s}s\,ds}_{\parallel}$$

$$\left[-e^{-s}s\Big|_0^t + \int_0^t e^{-s}ds = -e^{-t}t - (e^{-t}-1) = -e^{-t}(t+1)+1 \right]$$

$$w(r,t) = g(r) + \frac{t^2}{2} + (r-1)\left[1 - e^{-t}(t+1)\right]$$

Ricordando che $\boxed{r(x,t) = 1 + (x-1)e^t}$

$$r-1 = (x-1)e^t$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = g\left((x-1)e^t\right) + \frac{t^2}{2} + (x-1)\left[e^t - (t+1)\right]}$$

EQUAZIONI QUASILINEARI

$$u_t + a(x,t,u)u_x = c(x,t,u)$$

NUOVA DIFFICOLTÀ: le curve caratteristiche dipendono anche da u e non solo da x e t.

ESEMPIO: Equazione di Burgers

$$u_t + (1-u)u_x = 0$$

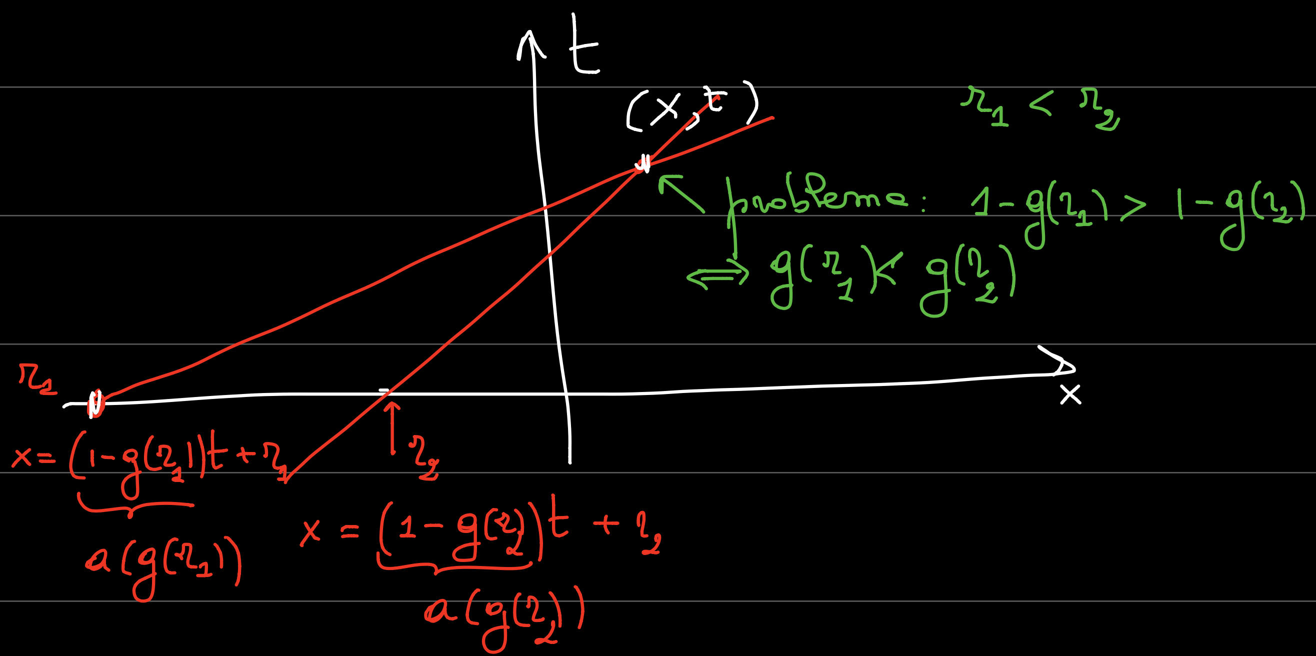
$a(u) = 1-u$ il campo di velocità dipende da u

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 1-w & v(r,0) = r \\ \dfrac{dw}{dt} = 0 & w(r,0) = g(r) \end{cases}$$

$$w(r,t) = g(r) \qquad \forall t$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 - g(r) \qquad v(r,0) = r \implies v(r,t) = (1-g(r))t + r$$

Problema: posto $\boxed{x = (1-g(r))t + r}$ riesco a ricavare $r = r(x,t)$?

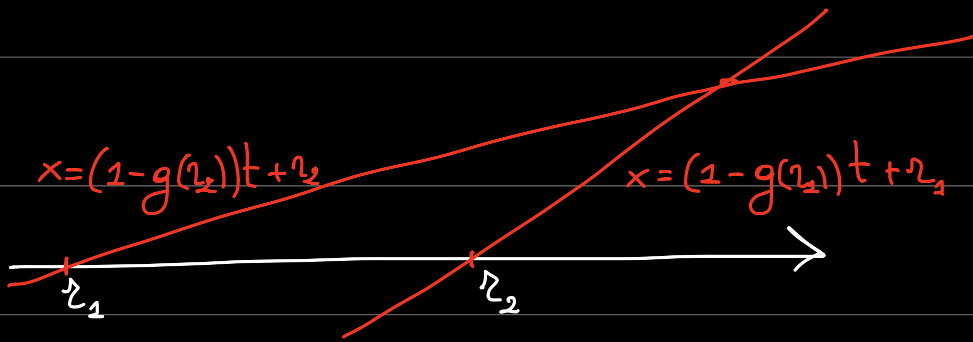


Se g è decrescente non ci sono problemi: le rette caratteristiche non si incrociano per $t>0$. Se invece g è crescente nascono dei problemi

$$v(r,t) = (1-g(r))t + r = a(g(r))t + r$$

ATTENZIONE! Le rette $x = at + r$ nel piano (x,t) (rette caratteristiche) hanno coefficiente angolare $\frac{1}{a}$, inversamente proporzionale ad a.

Poiché a dipende anche da $g(r)$, l'invertibilità rispetto a r della relazione $x = a(g(r))t + r$ dipende da x, t, r ma anche dal valore di $g(r)$.



nel nostro caso, se $g(r_1) < g(r_2)$, le due rette caratteristiche si incontrano per $(1-g(r_1))t + r_1 = (1-g(r_2))t + r_2$

$$\Longrightarrow \big(g(r_2)-g(r_1)\big)t = r_2 - r_1 \Longrightarrow t = \frac{r_2-r_1}{g(r_2)-g(r_1)}.$$

In definitiva, siamo sicuri di costruire una soluzione finché

$$t < t^* = \inf_{-\infty < r_1 < r_2 < +\infty} \frac{r_2-r_1}{g(r_2)-g(r_1)} = \inf_{r_1<r_2} \frac{r_2-r_1}{a(g(r_1))-a(g(r_2))}$$

In particolare, è rilevante la monotonia della funzione composta $a \circ g$, ed è importante la sua derivata.

Esaminiamo meglio questo aspetto dal punto di vista del teorema della funzione implicita.

Per esplicitare r, ho bisogno che $\frac{\partial v}{\partial r} \neq 0$. Notiamo che

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -g'(r)t + 1 = a'(g(r))g'(r)t + 1$$

se $t = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = 1 > 0$. Se $a'(g(r))g'(r) \geq 0$ la positività di $\frac{\partial v}{\partial r}$ è assicurata $\forall t \geq 0$. Nel caso contrario assumiamo che $a'(g(r))g'(r) \geq -M$ $\forall r$ (cioè che sia limitata dal basso.

Avremo ancora $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$ per t sufficientemente piccolo, sicuramente se $-Mt + 1 > 0$, cioè se $t < \frac{1}{M}$.

$\varphi = \frac{\partial v}{\partial r}(r,t)$ é la soluzione del problema linearizzato

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x}(v,t)\varphi \\ \varphi(r,0) = 1 \end{cases}$$

Per applicare il teorema delle funzione implicita ho bisogno che $\frac{\partial v}{\partial r} \neq 0$. Ora, per l'unicità del problema di Cauchy lineare abbiamo $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$