LA SOLUZIONE FONDAMENTALE DELL'EQUAZIONE DEL CALORE

Sia u una soluzione di $u_t - \Delta u = 0$. Sia v sol

$\Rightarrow v_\lambda(t,x) = v(\lambda^2 t, \lambda x)$. Allora anche v_λ verifica

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} - \Delta v_\lambda = \lambda^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda^2 t, \lambda x) - \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x) \right) = 0$$

Inoltre, se normalizziamo $v_\lambda(t,x) = \lambda^n u(\lambda^2 t, \lambda x)$ otteniamo che la massa viene conservata

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_\lambda(t,x)\,dx = \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda^2 t, \lambda x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx$$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE AUTOSIMILARE $(\lambda^2 t = 1)$.

$$u(t,x) = \frac{1}{t^{n/2}} U\left(\frac{x}{\sqrt{\ }}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{n}{2} \frac{1}{t^{\frac{n+2}{2}}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{t^{n/2}} \frac{1}{2} \frac{1}{t^{3/2}} \nabla U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot x$$

$$\Delta_x u = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}} \Delta U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$-\frac{n}{2} \frac{1}{t^{\frac{n+2}{2}}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \frac{1}{t^{\frac{n+2}{2}}} \nabla U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^{\frac{n+2}{2}}} \Delta U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0$$

Da cui $\Delta U(y) + \frac{1}{2} \nabla U(y) \cdot y + \frac{n}{2} U(y) = 0$ $\quad (*)$

Esercizio: verificare che la funzione $\underbrace{e^{-\frac{|x|^2}{4}}}_{U(x)}$ verifica l'equazione $(*)$

TEOREMA: Esiste un'unica soluzione ($\forall n \in \mathbb{N}$) dell'equazione ($*$) tale che:

(i) u é radialmente simmetrica

(ii) u é autosimilare: $u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall x, \forall t$

(iii) $u \geq 0$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx = 1 \quad \forall t$

$u(t, x-x_0)$ é ancora soluzione, non unicità senza radiale simmetria

Dimostrazione: vediamo innanzitutto il caso $n=1$. Sappiamo che U deve risolvere l'equazione ordinaria

$$u'' + \frac{1}{2} x u' + \frac{1}{2} u = 0$$

cioé $\quad 2u'' + xu' + u = 0 \qquad\qquad e^{\int_0^x \frac{t}{2}\,dt}$

$$(xu + 2u')' = 0 \qquad\qquad \Vert$$

cioé $\quad \underset{\Vert}{xu + 2u'} = C$. A sua volta $e^{-x^2/4}\left(e^{x^2/4} u\right)' = e^{-x^2/4}\left(\frac{1}{2}xu + u'\right)$

$$\Rightarrow \left(e^{x^2/4} u\right)' = C e^{x^2/4} \Rightarrow e^{x^2/4} u(x) - u(0) = C \int_0^x e^{y^2/4}\,dy$$

se vogliamo che u sia integrabile $\Rightarrow C = 0$.

Quindi $\quad u(x) = C_1 e^{-x^2/4}$. La condizione di normalizzazione ci impone poi $C_1 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4}\right)^{-1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

COME FARE NEL CASO DI DIMENSIONE $n \geq 2$?

Definizione: una funzione si dice radialmente simmetrica in $\mathbb{R}^n$ se $u(x) = u(Tx) \quad \forall T \in O(n)$.

OSSERVAZIONE: Se u è radialmente simmetrica allora $u(x)$ dipende solo da $|x|$. Quindi $u(x) = \varphi(|x|)$ con $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} \qquad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi'(r) \frac{x_i}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \varphi''(r) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + \frac{\varphi'(r)}{r} - \frac{\varphi'(r)}{r^2} \frac{x_i^2}{r}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Delta u = \varphi'' + \frac{n}{r} \varphi' - \frac{\varphi'}{r} = \varphi'' + \left(\frac{n-1}{r}\right) \varphi'$$

$$\nabla u \cdot x = \varphi'(r) r$$

$$2 \Delta u + \nabla u(x) \cdot x + n u(x) = 0$$

Esercizio: trovare l'equazione differenziale per φ.

Esercizio difficile: risolverla.

Separazione delle variabili

$$\boxed{u(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x_i)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \psi_i'(x_i) \prod_{j \neq i} \psi_i(x_j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \psi_i''(x_i) \prod_{j \neq i} \psi_i(x_j)$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{u} = \frac{\psi_i'(x_i)}{\psi_i(x_i)}$$

$$\frac{\nabla u(x) \cdot x}{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_i'(x_i) \cdot x_i}{\psi_i(x_i)}$$

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}}{u} = \frac{\psi_i''(x_i)}{\psi_i(x_i)}$$

Dunque, se ciascuna delle ψ_i risolve

$$2\psi_i''(t) + \psi_i'(t) \cdot t + \underset{n=1}{\psi_i}(t) = 0$$

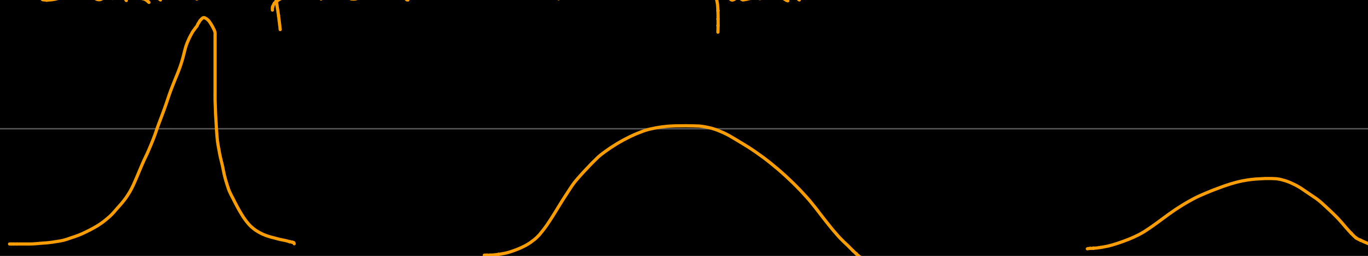
il prodotto soddisfa l'equazione voluta

se $\psi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}}$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \psi_i(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{(x_1^2 + \dots + x_n)^2}{4}}$$

$$u(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Soluzione fondamentale dell'equazione del calore



$t \to 0$