Equazioni Differenziali - settimana 16-20 marzo 2020

PROF. SUSANNA TERRACINI

Problemi proposti

(1) Sia $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ una funzione a valori matriciali ($A(t) = (a_{ij}(t))_{ij}$) i cui coefficienti sono di classe $\mathcal{C}^1$. Chiamiamo $\dot{A}(t) = (\dot{a}_{ij}(t))_{ij}$ la matrice delle derivate. Dimostrare che se $A(0)$ è invertibile allora

$$\frac{d}{dt}\det(A(t))|_{t=0} = \det(A(0))\mathrm{tr}(A^{-1}(0)\dot{A}(0))$$

(2) Dedurne che

$$\frac{d}{dt}\det(J_{\Phi^t})(x)|_{t=0} = \mathrm{div}_x(F)(x)$$

dove F è un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$, sapendo che dall'equazione

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi^t(x) = F(\Phi^t(x)) \\ \Phi^0(x) = x \end{cases}$$

si deduce che

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}J_{\Phi^t}(x) = J_F(\Phi^t(x))J_{\Phi^t}(x) \\ J_{\Phi^0}(x) = \mathbb{I} \quad . \end{cases}$$

(3) Dedurne ancora, se $u(x,t)$ è di classe $\mathcal{C}^1$, si ha

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{\Phi^t(x)} u(t,x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}_x(uF) \right) \mathrm{d}x \ .$$