Equazioni Differenziali - settimana 23-27 marzo 2020

PROF. SUSANNA TERRACINI

Problemi proposti

(1) Dimostrare che se u è soluzione di

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Re \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

allora $v(t,x) = \int_0^x u(t,x)dx$ e $v(t,x) = u_x(t,x)$ soddisfano la stessa equazione con dati iniziali rispettivamente integrati e derivati. Utilizzare l'osservazione per determinare la soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ g_2(x) &= xe^{-x^2} \\ g_3(x) &= x^2 e^{-x^2} \end{aligned}$$

Dedurne per ricorsione una formula per

$$g_n(x) = x^n e^{-x^2}$$

(2) Dimostrare, utilizzando la formula di rappresentazione con il nucleo del calore che, la soluzione $u(t,x)$ soddisfa l'identità:

$$\int_{\mathbb{R}} xu(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} xu_0(x)dx$$

purchè $xu_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Cosa si può dire per $\int_{\mathbb{R}} x^n u(t,x)dx$?

(3) Risolvere, utilizzando la formula di rappresentazione, i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Re \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \mathbb{I}_{[-1,1]} \\ g_2(x) &= \sin x \\ g_3(x) &= e^x \end{aligned}$$

(4) Determinare le soluzioni dell'equazione del calore a variabili separate: $u(t,x) = v(t)w(x)$.

(5) Determinare le soluzioni dell'equazione del calore sono del tipo "profilo viaggiante": $u(t,x) = \varphi(x-ct)$.