Dimostrazione del teorema : facciamo il caso $n=1$.

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)\, u_0(y)\, dy$$

Osserviamo che si possono applicare i teoremi di derivazione sotto segno di integrale (per ogni $t>0$) o di derivazione degli integrali dipendenti da parametri.

Ad ogni ordine di derivazione abbiamo

$$D^k_{(x,t)}(u)(x,t) = \int_{\mathbb{R}} D^k_{(x,t)}\big(\Phi(t, x-y)\big)\, u_0(y)\, dy$$

In particolare abbiamo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x-y)\, u_0(y)\, dy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t, x-y)\, u_0(y)\, dy$$

(ii) ne deduciamo che

$$u_t - u_{xx} = \int_{\mathbb{R}} (\Phi_t - \Phi_{xx})(t, x-y)\, u_0(y)\, dy = 0.$$

(iii) Sia x_0 un punto in cui u_0 é continua:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |u_0(x)-u_0(x_0)|<\varepsilon$$

Come il solito, poiché $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)\,dx = 1$, possiamo scrivere

$$u(t,x) - u_0(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)\,u_0(y)\,dy - \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)\,dy\right) u_0(x_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)\left(u_0(y) - u_0(x_0)\right) dy =$$

$$\int_{|y-x_0|<\delta} \Phi(t,x-y)\left(u_0(y) - u_0(x_0)\right) dy + \int_{|y-x_0|\geq\delta} \Phi(t,x-y)\left(u_0(y) - u_0(x_0)\right) dy$$

Quindi

$$|u(t,x) - u_0(x_0)| \leq \underbrace{\int_{|y-x_0|<\delta} \Phi(t,x-y)\,|u_0(y) - u_0(x_0)|\,dy}_{\mathrm{I}} +$$

$$+ \underbrace{\int_{|y-x_0|\geq\delta} \Phi(t,x-y)\,\overbrace{|u_0(y) - u_0(x_0)|}^{\leq 2\|u_0\|}\,dy}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} \leq \varepsilon \int_{|y-x_0|<\delta} \Phi(t,x-y) \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)\,dy = \varepsilon$$

$$\mathrm{II} \leq 2\|u_0\| \int_{|y-x_0|\geq\delta} \Phi(t,x-y)\,dy \longrightarrow 0 \quad \text{per } t \to 0^+$$

Infatti

Poniamo, al solito, $\frac{y-x_0}{\sqrt{4t}} = z$ e otteniamo

$$\text{II} \leq 2\|u_0\| \int_{|z|>\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2}\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{per } t\to 0^+$$

$\square$

Osservazione: la funzione $k(t,x,y) =: \Phi(t, x-y)$ si chiama nucleo di Green per l'equazione del calore o nucleo del calore. È la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u \\ u(0,x) = \delta_y \end{cases}$$

FATTI NOTEVOLI

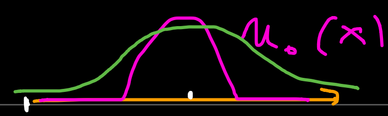
① Effetto regolarizzante: la soluzione è C^∞ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ a prescindere dalla regolarità del dato iniziale u_0

② Permanenza del segno: se $u_0(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow u(t,x)\geq 0 \qquad \forall t>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

③ Velocità di propagazione infinita: se $u_0\geq 0,\ u_0\not\equiv 0$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x)>0} \qquad \forall t>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n$$



La presenza di una parte positiva di u_0, non importa quanto piccola, ha effetto immediato su tutta $u(t,x)$.

④ Irreversibilità: possiamo far tornare indietro il flusso del calore? In altre parole, sappiamo risolvere

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & (-\infty, 0)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$

È chiaro che $u_0 \in C^\infty$. Se $u(x,t)$ risolve l'equazione del calore, allora $v(t,x) = u(-t,x)$ risolve l'equazione aggiunta:

$$\begin{cases} v_t = -\Delta v & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \\ v(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Formalmente, la soluzione fondamentale ha la forma

$$v(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}}$$

ma non si capisce bene come utilizzarla.

⑤ Limitatezza:

$$|u(t,x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)\,|u_0(y)|\,dy \leq \|u_0\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)$$

$$= \|u_0\|$$

⑥ Decadimento della soluzione per $t\to+\infty$: se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$|u(t,x)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}_{\leq 1} |u_0(y)|\,dy \leq$$

$$\le \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|\,dy = \frac{\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(4\pi t)^{n/2}} \longrightarrow 0$$

(7) Conservazione della massa totale: $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx \qquad \forall x$$

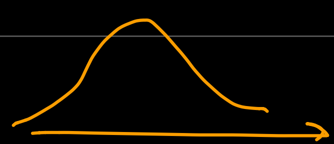
Infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)\,u_0(y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)\,dx \right)}_{= 1} u_0(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\,dy$$

ESEMPI:

(1)
$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(0,x) = e^{-x^2} \end{cases}$$



$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - y^2}\,dy =$$

$$\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2 - xy + y^2 + 4ty^2}{4t}}\,dy$$

scriviamo: $x^2 - 2xy + (1+4t)y^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{1+4t}} - \sqrt{1+4t}\,y \right)^2 - \frac{x^2}{1+4t} + x^2$

$$= \left(1 - \frac{1}{1+4t}\right)x^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+4t}} - \sqrt{1+4t}\, y\right)^2$$

di modo che

$$\frac{x^2 - 2xy + (1+4t)y^2}{4t} = \frac{1}{1+4t}x^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{4t(1+4t)}} - \sqrt{\frac{1+4t}{4t}}\, y\right)^2$$

Quindi ho

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, e^{-y^2}\,dy = e^{-\frac{x^2}{1+4t}}\, \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t(1+t)}} - \frac{1+4t}{4t}y\right)^2} dy$$

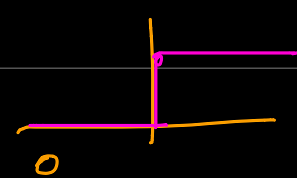
cambio variabile: $s = \sqrt{1+4t}\, y - \frac{x}{\sqrt{1+4t}}$

e ottengo

$$u(t,y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}\, \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{4t}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}$$

(2) $u_t = \Delta u$

$$u(0,x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, g(\ )\,dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = s \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2}\,ds = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) + 1\right)$$

$$\mathrm{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$