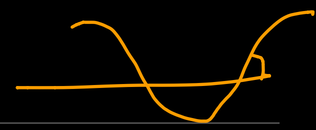
Soluzioni spazialmente periodiche dell'equazione del calore:

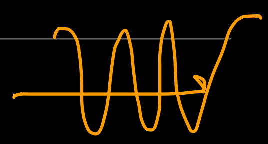
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \boxed{u(t,x+2\pi) = u(t,x) \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$u_0(x) = \cos x \Rightarrow \boxed{u(t,x) = e^{-t}\cos x}$$



$$u_0(x) = \sin x \Rightarrow u(t,x) = e^{-t}\sin x$$

$$\boxed{u_0(x) = \cos(nx) \Rightarrow u(t,x) = e^{-n^2 t}\cos(nx)}$$



Dunque, se $\boxed{u_0(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin(kx))}$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} e^{-k^2 t}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)}$$ polinomio trigonometrico

Se $u_0(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ allora

serie trigonometrica

$$\boxed{u(t,x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k^2 t}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)} \quad (*)$$

Fin qui stiamo ragionando a livello formale.

TEOREMA: Se $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty}$, allora la serie $(*)$ converge uniformemente su $[0,T]\times\mathbb{R}$ e converge insieme a tutte le sue derivate in ogni intervallo $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$ con $\boxed{0<\alpha<\beta<+\infty}$. Inoltre é soluzione del problema di

Cauchy con dato iniziale u_0 _

Dimostrazione : Possiamo utilizzare il test M di Weierstrass in $[0,T]\times\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z) \quad \text{e} \quad |f_k(z)|\le M_k \quad \forall z\in\Omega$$

$$\text{e} \quad \sum M_k<+\infty \Rightarrow \text{conv. unif in } \Omega$$

u_0 $$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\le \sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|+|b_k|$$

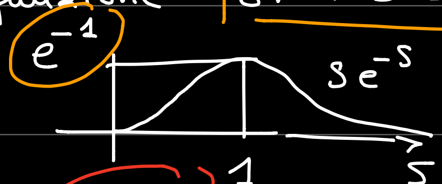
Questo dà la convergenza uniforme della serie in $\underbrace{(*)}_{[0,+\infty)\times\mathbb{R}}$.

Se prendiamo la derivata rispetto a t e a x

$$u_t(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{-k^2e^{-k^2t}}_{\le M \ \forall k,\ \forall t\ge\alpha}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$u_x(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}k e^{-k^2t}(-a_k\sin kt+b_k\cos kt)$$

Abbiamo: La funzione $\boxed{s\mapsto se^{-s}}$ è una funzione limitata su $\mathbb{R}$:



$s=k^2t$

Quindi $$\max_{t\in[a,b]} k^2e^{-k^2t} = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \frac{1}{t}\boxed{(k^2te^{-k^2t})}\le \frac{e^{-1}}{\alpha}\le M$$

$t\ge\alpha>0 \quad \forall k$

Vi è convergenza della serie delle derivate $\Rightarrow u\in C^1$ _ Iterando alle derivate successive abbiamo:

$$\partial_t^j u = \boxed{\sum_{k=1}(-1)^j k^{2j}e^{-k^2t}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}$$

Ma le funzioni $s \mapsto s^j e^{-s}$ j fissato da M, sono limitate su $\mathbb{R}^+$

t^j, α^j

$$\boxed{\frac{1}{t^j} (k^2 t)^j e^{-k^2 t}} \leq \frac{1}{\alpha^j} (k^2 t)^j e^{-k^2 t}$$

non dip da k

$$\leq \frac{M_j}{a^j} \qquad [\, M_j = j^j e^{-j} \,] \text{ esercizio.}$$

Ragionando in modo analogo sulle derivate spaziali e miste, otteniamo che $\boxed{u \in C^\infty}$ e che $u_t - u_{xx} = 0$ in $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$. ☒

OSSERVAZIONE 1. Le funzioni $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono gli autovettori dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$, corrispondenti agli autovalori $\lambda_k = -k^2$.

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \boxed{A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \Rightarrow \boxed{e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

Qui abbiamo infinite dimensioni, ma il concetto è lo stesso

OSSERVAZIONE 2. È lecito chiedersi quali dati iniziali u_0, 2π-periodici in x, ammettano una rappresentazione in serie trigonometriche. Teoria delle serie di Fourier

$\forall\, u_0 \in L^2([0,2\pi])$ ammette una rappresentazione in serie di Fourier $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$

Soluzione del Problema di Cauchy non omogeneo

$$(PC)\quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$u_0(x)$ e $\boxed{f(t,x)}$ sono adeguate

Antefatto: Abbiamo visto che la soluzione generale del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A \in M(n,n)$$

con $A \in M(n,n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ è $\boxed{y(t) = e^{tA} y_0}$, dove

formula di rappresentazione della soluzione (PC)

$$\boxed{e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}}$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \qquad e^{0A} = \mathbb{I}$$

Vogliamo trovare una formula per risolvere i problemi

$$\boxed{\begin{cases} y' = Ay + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}}$$

dove $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n : t \mapsto f(t)$ è una funzione continua.

Ragioniamo: $\boxed{y' - Ay = e^{tA}(e^{-tA} y)' = f(t)} \iff$

$$\boxed{(e^{-tA} y)' = e^{-tA} f(t)} \iff e^{-tA} y = y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds$$

$$\iff \boxed{y(t) = \underbrace{e^{tA} y_0}_{\text{soluzione generale dell'equazione omogenea}} + \underbrace{\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds}_{\text{una soluzione particolare dell'eq. non omog.}}} \leftarrow e^{tA} \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds$$

$\boxed{S(t) = e^{At}}$ semigruppo di operatori che fornisce la soluzione generale dell'equazione omogenea in funzione del dato iniziale: $\boxed{S'(t) = AS(t) \text{ con } S(0) = \mathbb{1}}$

Allora la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo (con dato $f(t)$) è

$t-s \geq 0$

$$\boxed{S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s) f(s)\,ds}$$

dato iniziale

sol. generale eq. omogenea

soluzione particolare con $u_0 = 0$

PRINCIPIO DI DUHAMEL

Nel nostro caso, $\boxed{S(t) = \Phi(t,\cdot)*}$ è il semigruppo di operatori $u_0 \longmapsto S(t)u_0 = \Phi(t,\cdot)*u_0$

In base a questo principio, la soluzione del problema

$$\boxed{\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta_x u(t,x) + f(t,x) & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}}$$

dovrebbe essere:

$$u(t,x) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(s)\,ds$$

$$= \underbrace{(\Phi(t,\cdot)*u_0)(x)} + \int_0^t (\underbrace{\Phi(t-s,\cdot)*f(s,\cdot)})\,ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)\, dy\, ds$$

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(s,y)\, dy\, ds$$

TEOREMA: Se $u_0 \in L^\infty$ e $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é di classe C^1 rispetto a t e C^2 rispetto a $x \in \mathbb{R}^n$ e ha supporto compatto, allora la funzione $u(t,x)$ definita sopra é pure di classe C^1 rispetto a t e C^2 rispetto a x e risolve il problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$

Dim: (Evans).

Esempio 1

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^t \cos x \\ u(0,x) = \cos x \end{cases}$$

$f(t,x) = e^t \cos x$

$u_0(x) = \cos x$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)\overbrace{\cos y}^{u_0(y)}\,dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s,x-y)\overbrace{f(s,y)}^{e^s\cos y}\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cos y\,dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \boxed{\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}} e^s \cos y\,dy\,ds$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\cos(x+\sqrt{4t}\,z)\,dz =$$

$$y = x+\sqrt{4t}\,z$$

$$\int e^{-z^2}\sin\sqrt{4t}\,z = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}[\cos x\cos\sqrt{4t}\,z - \sin x\sin\sqrt{4t}\,z]\,dz$$

$$= \boxed{e^{-t}\cos x} \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\cos(\sqrt{4t}\,z)\,dz$$

$$\boxed{\frac{x-y}{\sqrt{4(t-s)}} = z} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\cos(x+\sqrt{4(t-s)}\,z)\,dz = \boxed{e^{-(t-s)}\cos x}$$

$$u(t,x) = e^{-t}\cos x + \int_0^t \boxed{e^{-(t-s)}}\, e^s \boxed{\cos x}\,ds = e^{-t}\cos x + \left(e^{-t}\int_0^t e^{2s}ds\right)\cos x$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{2s}\right)'$$

$$= e^{-t}\cos x + \frac{1}{2}e^{-t}(e^{2t}-1)\cos x = \boxed{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos x}$$

$$u_t - u_{xx} = \frac{1}{2}(e^t\cos x + e^t\cos x) = e^t\cos x \qquad Ch(t)\cos x$$

osservazione: non decade per $t\to+\infty$

$$u_t - u_{xx} = cu \qquad \int u = e^{ct}\int u_0$$

Esempio 1

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^t \cos x \\ u(0,x) = \cos x \end{cases}$$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) \cos y \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cos y \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} e^s \cos y \, dy$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \cos(x + \sqrt{4t}\, z) \, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} [\cos x \cos \sqrt{4t}\, z - \sin x \sin \sqrt{4t}\, z] \, dz$$

$$= e^{-t} \cos x$$

$$\frac{x-y}{\sqrt{4(t-s)}} = z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \cos(x + \sqrt{4(t-s)}\, z) \, dz = e^{-(t-s)} \cos x$$

$$u(t,x) = e^{-t} \cos x + \int_0^t e^{-(t-s)} e^s \cos x \, dt = e^{-t} \cos x + \Big(e^{-t} \int_0^t \underbrace{e^{2s}}_{\left(\frac{1}{2} e^{2s}\right)'} ds\Big) \cos x$$

$$= e^{-t} \cos x + \frac{1}{2} e^{-t} (e^{2t} - 1) \cos x = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \cos x$$

$$u_t - u_{xx} = \frac{1}{2} \left(e^t \cos x + e^t \cos x \right) = e^t \cos x$$