# PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET IN UNA DIMENSIONE SPAZIALE

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0,L) \\ u(t,0) = 0 = u(t,L) & \forall\, t>0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

→ SEPARAZIONE DELLE VARIABILI : $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\psi'(t)\varphi(x) - \psi(t)\varphi''(x) = 0$$

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \qquad \forall t,\ \forall x$$

$$\Rightarrow \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = k \quad \text{costante}$$

ma $\begin{cases} \varphi''(x) = k\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow k_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, \dots,$

e $\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

e $\psi'(t) = k\psi(t) \Rightarrow \psi_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

Poniamo

$n = 1, 2, \dots$ $\quad u_n(t,x) =: e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \begin{matrix} t>0 \\ x\in(0,L) \end{matrix}$

Formalmente, ogni combinazione lineare é soluzione.

(*) $$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(t,x) \qquad \text{con } \{c_n\}_n \text{ successione reale}$$

LEMMA: (i) Se la successione $(c_n)_{n=1,\dots}$ è limitata, allora la serie (*) converge uniformemente $[\varepsilon,+\infty)\times[0,L]$ $\forall \varepsilon>0$, la somma $u$ è di classe $C^\infty$ ed è soluzione di $u_t - u_{xx} = 0$ in $\mathbb{R}^+\times(0,L)$.

(ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ allora la serie converge uniformemente su $[0,+\infty)\times[0,L]$ e $u$ è continua su $[0,+\infty)\times[0,L]$.

Dimostrazione: ricalca quella fatta a suo tempo per le funzioni spazialmente periodiche e si basa su due pilastri (1) il criterio di Weierstrass di convergenza uniforme delle serie di funzioni (con maggiorazione del massimo modulo con una serie numerica convergente) e (2) il teorema di derivabilità termine delle serie. Completare per esercizio. $\boxtimes$

Come già osservato per il caso periodico, le funzioni $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ sono gli autovettori dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$

con condizi di annullamento al bordo di $(0,L)$.

Vogliamo cercare di diagonalizzare l'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$.

A questo fine introduciamo nello spazio delle funzioni continue (!?!) un prodotto scalare:

$$\int_0^L u(x)v(x)\,dx := \langle u,v\rangle.$$ Notiamo che $$\int_0^L u(x)\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = \int_0^L \frac{d^2u}{dx^2}v(x)\,dx$$

se $u,v$ si annullano su $\{0,L\}$.

e osserviamo che: LEMMA

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$$

vale anche per i coseni (da dimostrare per esercizio).

Esaminiamo la condizione iniziale nel caso (ii), in cui

$u$ é continua in $[0,+\infty)\times[0,L]$ e proiettiamola su $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\int_0^L u(0,x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}_{u(0,x)}dx$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}c_n$$

Noto $u_0(x)=u(0,x)$, possiamo ricavare i coefficienti $c_n$ come

$$\boxed{c_n =: \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

TEOREMA: Data $u_0 \in C^1([0,L])$ con $u_0(0)=u_0(L)=0$, la serie di funzioni $\sum c_n u_n(t,x)$, è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (0,+\infty)\times[0,L] \\ u(t,0)=u(t,L)=0 \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases}$$

Dimostrazione: si tratta di verificare che $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n| < +\infty$ per potere utilizzare il lemma.

Ricordiamo che

$$c_n =: \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\underbrace{\int_0^L u'(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}_{\frac{L}{2}d_n}$$

$$= \frac{L}{n\pi}d_n$$

Per la disuguaglianza di Bessel si ha

$$\frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 \leq \int_0^L (u_0'(x))^2 dx < +\infty$$

(vedere sotto per la dimostrazione della disuguaglianza di Bessel)

Avendo stabilito che $\sum d_n^2 < +\infty$, possiamo usare la disuguaglianza di Schwarz sulle serie per stimare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|d_n|}{n} \le \frac{L}{\pi}\left(\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2\right)^{1/2} < +\infty$$

Possiamo dunque applicare il lemma precedente, ottenendo che $u\in C^\infty (0,+\infty)\times(0,L)$ e verifica $u_t-u_{xx}=0$. Inoltre è continua su $[0,+\infty)\times[0,L]$ e verifica $u(t,0)=u(t,L)=1$. $\forall t\geq 0$

Si ha infine $u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Resta da dimostrare che $u(0,x)=u_0(x)$ dove $u_0$ è il dato. In altri termini dobbiamo dimostrare che $u_0(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ quando $u_0\in C^1$ e $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$, cioè che $u_0$ eguaglia la serie di Fourier associata. È questa una conseguenza della identità di Bessel che vediamo sotto. $\square$

DISUGUAGLIANZA E UGUAGLIANZA DI BESSEL.

$$\frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 \leq \int_0^L (u_0'(x))^2 dx < +\infty$$

dove $\quad d_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Infatti abbiamo, per ogni intero $m$ fissato,

$$0 \leq \int_0^L \left(u_0'(x) - \sum_{n=1}^{m} d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^L (u_0'(x))^2 dx - 2\int_0^L \sum_{n=0}^{m} d_n\, u_0'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{m} d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)^2 dx$$

$$= \int_0^L (u_0'(x))^2 dx - \frac{L}{2}\sum_{m=1}^{m} d_n^2 \qquad \frac{L}{2}\sum d_n^2$$

per $m \to +\infty$ troviamo la disuguaglianza di Bessel.

In modo del tutto analogo si dimostra che $\frac{L}{2}\sum_n c_n^2 \leq \int_0^L u_0^2(x)dx$

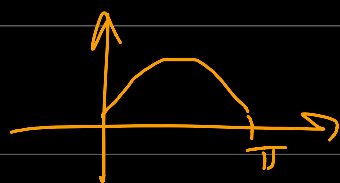
In realtà vale un risultato più forte, cioè che

$$\frac{L}{2}\sum_n c_n^2 = \int_0^L u_0^2(x)dx \qquad \text{Bessel}$$

che implica che $u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$ q.o (come si tratta di funzioni continue).

**ESERCIZIO**: Risolvere il problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t>0 \\ u(0,x) = x(\pi - x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$




Sviluppiamo $u_0(x) = x(\pi - x)$ in serie di Fourier.

$$\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nx = \int_0^\pi x(\pi-x)\frac{d}{dx}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]$$

$$= -\frac{x(\pi-x)\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi-2x)\underbrace{\cos nx}_{\frac{d}{dx}\frac{\sin nx}{n}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n^2}(\pi-2x)\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \underbrace{-2\sin nx}_{2\frac{d}{dx}\frac{\cos nx}{n}}\, dx$$

$$= -\frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{4}{n^3} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{8}{\pi n^3} & n \text{ dispari} \end{cases}$

La soluzione cercata sarà

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin nx = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

OSSERVAZIONE:

In particolare $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)x)$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

CONCLUSIONI

→ Diagonalizzazione dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo

$\subseteq \mathbb{R}^N$

$$(*) \begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 & \partial\Omega \end{cases} \qquad \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

TEOREMA: $\Omega$ aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega \in C^1$. Esiste una successione $\lambda_n \geq 0$, $\varphi_n$, che comprende tutte le soluzioni di (*).

In più $\lambda_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e $\int_\Omega \varphi_n \varphi_m = \delta_{nm}$.

TEOREMA: ogni funzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$ si può sviluppare in serie

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n$$

dove $c_n = \int_\Omega u(x)\varphi_n(x)\,dx$

In questo modo si possono risolvere i problemi di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Scritto $u_0 = \sum c_n \varphi_n$, con $c_n = \int_\Omega u_0 \varphi_n \, dx$, la soluzione cercata è $u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} c_n \varphi_n(x) \, dx$

OSSERVAZIONE: Possiamo risolvere ugualmente

— PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER:

$$i\hbar \psi_t - \Delta \psi = 0 \qquad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

$$\psi(t,x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega$$

$$\psi(0,x) = \psi_0(x) \qquad x \in \Omega$$

Detta $c_n = \int_\Omega \psi_0(x) \varphi_n(x) \, dx \in \mathbb{C}$

$$\psi(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-i\lambda_n t/\hbar} \varphi_n(x)$$

Attenzione $|e^{i\lambda_n t}| = 1$: manca la proprietà di regolarizzazione. Dovremo richiedere una maggiore regolarità a $\psi_0$.

# L'EQUAZIONE DELLE ONDE

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \\ u_t(0,x) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

$$c_n = \int_\Omega u_0(x) \varphi_n(x)\, dx \qquad d_n = \int_\Omega v_0(x) \varphi_n(x)\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left[ c_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, t) + d_n \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}\, t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right]}_{\gamma_n(t)} \varphi_n(x)$$

$\gamma_n(t)$ risolve $\ddot{\gamma}_n(t) = -\lambda_n \gamma_n(t) \quad \forall n$

$$\gamma_n(0) = c_n \,, \quad \dot{\gamma}_n(0) = d_n$$