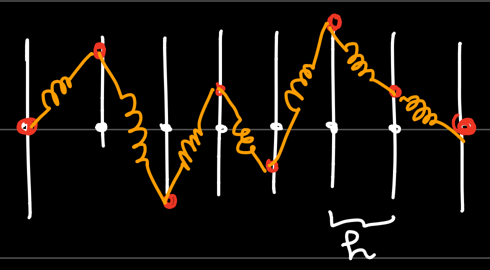
EQUAZIONE DELLE ONDE

Modello discreto:



Ho un sistema di n punti materiali di ugual massa, liberi di muoversi verticalmente e collegati da molle di costante di Hooke k). Se q_j é la coordinata verticale della j-esima particella avrò

$$m_j \ddot{q}_j = k_j (q_{j+1} - q_j) + k_{j-1}(q_{j-1} - q_j) \qquad j = 1, \dots, n$$

Supponiamo $m_j = m$, $k_j = k$ $\forall j$. Ora, pensiamo che

$$q_j(t) = u(t, x_j) \quad , \text{dove} \quad x_j = x_0 + jh \quad \text{e} \quad h > 0$$

é il passo spaziale. Avremo allora

$$m\, u_{tt}(t, x_j) = k\left(u(t, x_j + h) + u(t, x_j - h) - 2u(t, x_j)\right)$$

Se pensiamo che $\frac{k}{m} \simeq \frac{c^2}{h^2}$ $\left(m = m_0 h \quad k = \frac{k_0}{h} \right)$, se $u - C^2$ e facciamo tendere $h \to 0$ otteniamo, come già osservato per l'equazione della diffusione

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(t,x+h)+u(t,x-h)-2u(t,x)}{h^2} = u_{xx}(t,x)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

EQUAZIONE DELLE ONDE

Vediamo ora che l'equazione si presta anche a descrivere le onde trasversali di una corda (e.g. di violino)

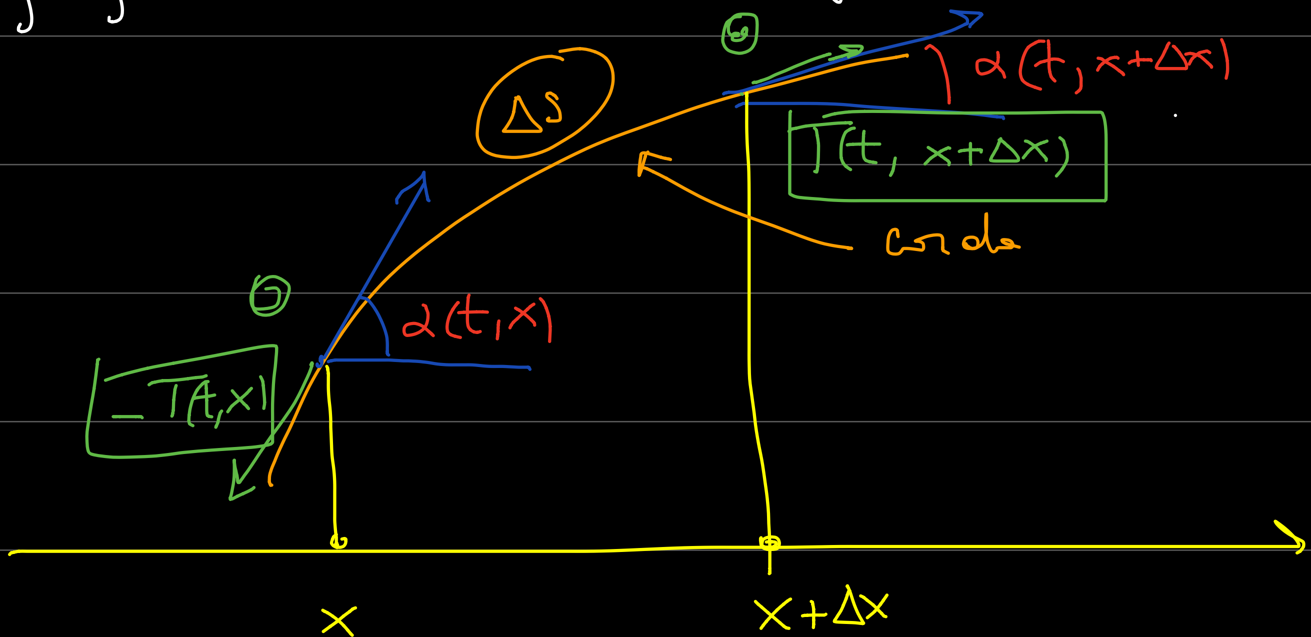
Ipotesi:

1) le vibrazioni sono piccole
2) lo spostamento é verticale
3) lo spostamento verticale dipende dal tempo e dalla posizione sulla corda
4) la corda é perfettamente flessibile (non c'é resistenza alla flessione e la forza é sempre tangenziale)
5) non c'é attrito

Con queste ipotesi l'equazione si può dedurre da due principi: (a) conservazione della massa e bilancio del momento lineare.

$\rho_0 = \rho_0(x)$ é la densità di massa della corda in posizione di equilibrio

$\rho = \rho(t,x)$ é la densità al tempo t



<u>Conservazione della massa</u>: $\rho_0(x)\Delta x = \rho(t,x)\Delta s \qquad t \geq 0$

<u>Legge di bilancio del momento</u>

→ moto verticale: le componenti orizzontali delle forze si elidono — $|T| =: \tau$

$$\tau(t,x+\Delta x)\cos(\alpha(t,x+\Delta x)) - \tau(t,x)\cos(\alpha(t,x)) = 0$$

$$0 = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tau(t,x+\Delta x)\cos(\alpha(t,x+\Delta x)) - \tau(t,x)\cos(\alpha(t,x))}{\Delta x}\right]$$

cioè $\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(t,x)\cos\alpha(t,x)\right) = 0$

$$\tau(t,x)\cos\alpha(t,x) = \tau_0(t) \quad \text{è costante in } x$$

Quindi la componente verticale della tensione

$$\tau_{vert}(t,x) = \tau(t,x)\sin(\alpha(t,x)) = \tau_0(t)\underbrace{\operatorname{tg}\alpha(t,x)}_{} = \tau_0(t)u_x(t,x)$$

$u_x(t,x)$

Supponiamo che ci siano delle forze verticali (e.g. peso) e sia $f(t,x)$ l'intensità della forza verticale complessiva per unità di massa.

$$\rho(t,x)f(t,x)\Delta s = \rho_0(x)f(t,x)\Delta x$$

Legge di Newton:

forze interne — forze esterne

$$\underbrace{\rho_0(x)\Delta x}_{\text{massa}}\ \underbrace{u_{tt}}_{\text{accelerazione}} = \tau_0(t)\underbrace{\left[u_x(t,x+\Delta x) - u_x(t,x)\right]}_{\text{forze interne}} + \underbrace{\rho_0(x)f(x,t)\Delta x}_{\text{forze esterne}}$$

dividendo per $\rho_0(x)\Delta x$ otteniamo, per $\Delta x \to 0$,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$$

dove $c^2(x,t) = \frac{\tau_0(t)}{\rho_0(x)}$ è costante per una corda omogenea e perfettamente elastica (tensione orizzontale = quella a riposo)

Parleremo di:

- Vibrazioni libere se $f = 0$
- Vibrazioni forzate se $f \neq 0$
- Vibrazioni smorzate se vi sono forze di attrito che si oppongono al movimento: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -b u_t$
- Corda finita con estremi fissati $u(t,0) = u(t,L) = 0$
- Condizioni iniziali: coinvolgono posizione e velocità iniziali:

$$u(0,x) = u_0(x)$$
$$u_t(0,x) = v_0(x)$$

In n-dimensioni: $u_{tt} - c^2 \Delta u = f$

Vibrazione di membrane elastiche, di strutture 3-dim.

LEGGI DI MAXWELL

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$\nabla \cdot (\vec{F}) = \mathrm{div}(\vec{F})$

$\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}(\vec{F})$

$\vec{E}$ = campo elettrico

$\vec{B}$ = campo magnetico

nello spazio libero.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{=0}) + \Delta\vec{E}$$

Quindi il campo elettrico (e quello magnetico) nello spazio libero soddisfano l'equazione (vettoriale) delle onde.

ESERCIZIO: Supponiamo che u risolva l'equazione delle onde, $u_{tt} - \frac{1}{c^2}u_{xx} = 0$ e poniamo $\tilde{u}(t,x) = u(t',x')$ dove

$$\begin{cases} t' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \text{dove } \beta^2 := \frac{v^2}{c^2} < 1$$

Provare che $\tilde{u}$ risolve la stessa equazione di u.
(Invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz della relatività ristretta)

LA FORMULA DI D'ALAMBERT

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Osserviamo che $(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$. Così che viene spontaneo porre

$$\begin{cases} u_t + c u_x = v \\ v_t - c v_x = 0 \end{cases}$$

Si tratta di due equazioni del primo ordine accoppiate
Sappiamo che $v(t,x) = \psi(x+ct)$ (come già visto)

Vogliamo quindi risolvere $u_t + c u_x = v(t,x)$. Usiamo il metodo delle caratteristiche

$$\begin{cases} \dot z = c & z(r,0) = r \\ \dot w = v(t,z) & w(r,0) = g(r) \end{cases}$$

$u(0,x) = g(x)$

$z = r + ct$ $\qquad$ $r = z - ct$

$\dot w = \psi(z + ct) = \psi(r + 2ct)$

$$w(r,t) = g(r) + \int_0^t \psi(r+2cs)\,ds$$

$$r + 2cs = \tau$$

$$= g(r) + \frac{1}{2c}\int_r^{r+2ct} \psi(\tau)\,d\tau$$

sostituisco $r = x - ct$ e ottengo

$$u(t,x) = g(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau$$

Ma chi é ψ? $v = u_t + cu_x$, $v(0,x) = \psi(x) = u_t(0,x) + cu_x(0,x)$

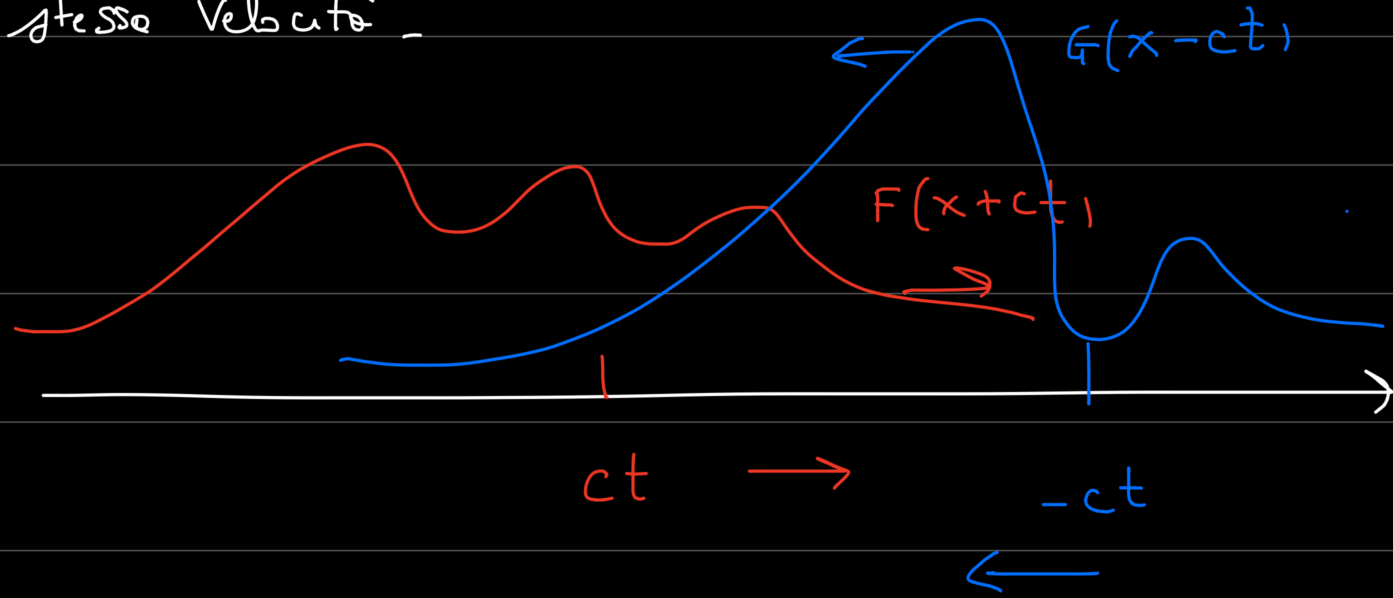
Quindi $\psi(x) = h(x) + c\,\partial_x g(x)$. Di conseguenza: $(x = x)$

$$u(t,x) = g(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds + \frac{1}{2}\left[g(x+ct) - g(x-ct)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}g(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} h(s)\,ds + \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} h(s)\,ds$$

OSSERVAZIONE: La soluzione generale dell'equazione delle onde é dunque $F(x-ct) + G(x+ct)$, la somma di un'onda progressiva che viaggia verso destra con velocità c e una che viaggia verso sinistra alla stesso velocità .



OSSERVAZIONE:

→ Unicità della soluzione ($g \in C^2$ e $h \in C^1$)

→ Nessun effetto regolarizzante (la regolarità di u é esattamente quella di g e di $\int_0^x h(s)ds$)

→ Dipendenza continua dai dati iniziali

$$\|u_1-u_2\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R})} \le \|g_1-g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + T\,\|h_1-h_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

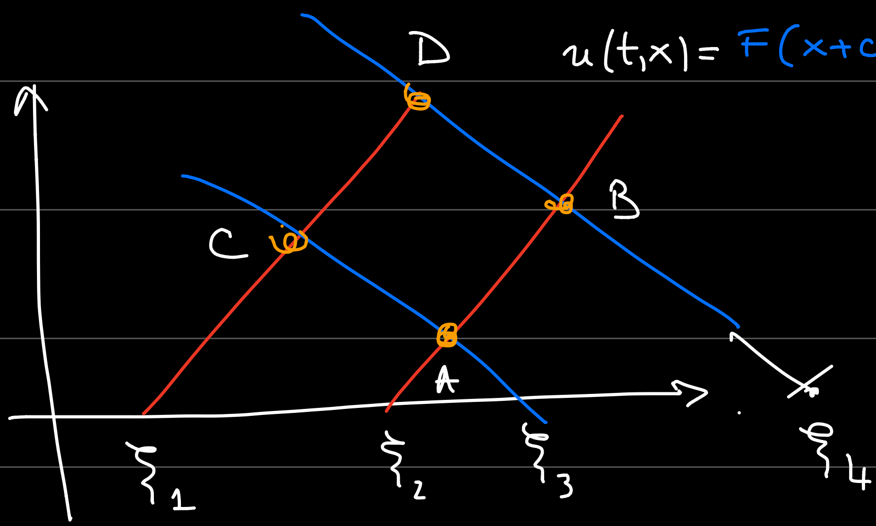
OSSERVAZIONE: Ora abbiamo una doppia famiglia di curve che portano i dati.

$\gamma^+ \qquad x+ct = \text{cost}$

$\gamma^- \qquad x-ct = \text{cost}$

rette caratteristiche, corrispondenti alle rette caratteristiche dei due fattori del prim'ordine nella fattorizzazione

$$\partial_t^2 - c^2\partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$$



Parallelogramma caratteristico ABCD

$F(A) = F(C)$ $\quad G(A) = G(B)$

$F(D) = F(B)$ $\quad G(D) = G(C)$

$$\Rightarrow [F(A)+G(A)] + [F(D)+G(D)] = [F(C)+G(C)] + [F(B)+G(B)]$$

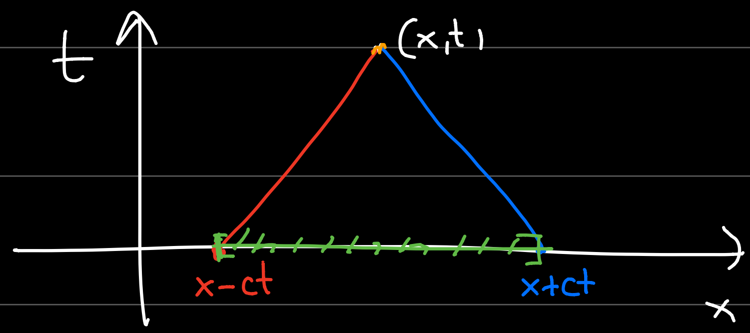
cioé $\quad u(A) + u(D) = u(C) + u(B)$

il valore di u su tre dei quattro vertici del parallelogramma caratteristico determina il valore sul quarto.

DOMINI DI DIPENDENZA E DI INFLUENZA:

$\rightarrow$ dominio di dipendenza: il valore della $u(t,x)$ dipende dal valore di f in $[x-ct, x+ct]$ e di g

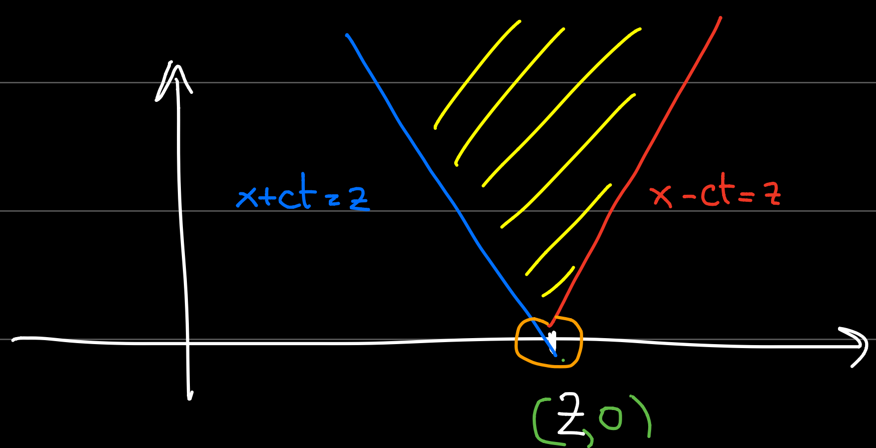
agli estremi $x-ct$ e $x+ct$. L'intervallo $[x-ct, x+ct]$ è il dominio di dipendenza di x,t:



Dall'altra parte, i valori di g e h nel punto $(z,0)$ influenzano il valore di u in tutto il cono

$$z-ct \leq x \leq z+ct$$

che si chiama il dominio di influenza di z.



Questo significa che il segnale viaggia con velocità c lungo le caratteristiche γ_z^+ e γ_z^-.

Una perturbazione iniziale nel punto z non viene avvertita nel punto x fino al tempo $t = \frac{|x-z|}{c}$.

Di nuovo é da notare la differenza con il caso del calore dove la velocità di propagazione del calore é infinita.