Problema di Cauchy-Dirichlet in una dimensione spaziale

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \mathbb{R} \times (0,L) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & \\ u_t(0,x) = h(x) & [0,L] \end{cases}$$

Metodo di separazione delle variabili e sviluppo in serie di Fourier.

TEOREMA: Se $g \in \mathcal{C}^3([0,L])$ verifica $g(0) = g(L) = g''(0) = g''(L) = 0$ e $h \in \mathcal{C}^2([0,L])$ verifica $h(0) = h(L) = 0$, allora posto

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx, \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx$$

$k = 1, 2, \dots$, la serie di funzioni definita come

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + b_k \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L}$$

converge uniformemente, é di classe $\mathcal{C}^2$ e verifica l'equazione delle onde, insieme alle condizioni iniziali.

OSSERVAZIONI (a) Sviluppiamo $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$ e $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

Formalmente abbiamo: $u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{L}{k\cancel{\pi}} \frac{k\pi}{L} \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\Big|_{t=0} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$
$= h(x)$.

In più i termini $\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ e $\sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ sono soluzioni dell'equazione delle onde.

Bisogna (a) dimostrare la convergenza uniforme di u e u_t su $\mathbb{R}\times[0,L]$ (in realtà, per la periodicità in t, è sufficiente in $[0,2L]\times[0,L]$. (b) dimostrare la convergenza uniforme delle serie formali u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx} u_{tx} e questo è la parte più difficile.

$\boxed{\text{ESERCIZIO: Dimostrare il teorema.}}$

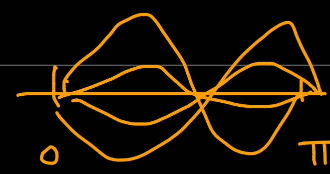
Applicazione: onda sonora emessa dalla corda vibrante fissata ai due estremi, a partire da una condizione iniziale definita mediante le funzioni $g(x)$ (posizione) e $h(x)$ (velocità).

Le funzioni $u_k(t,x) = \left(a_k \cos\frac{k\pi t}{L} + b_k \sin\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$

sono le k-esime armoniche. Frequenza: $\omega_k = \frac{2\pi}{L}k$

$$u_k(t,x) = c_k \sin\left(\omega_k t + \varphi_k\right) \sin \omega_k x$$

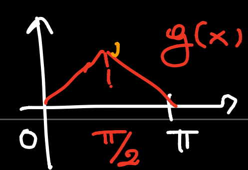
con c_k e φ_k funzioni di a_k e b_k. u_k è un'onda sonora le cui caratteristiche sono:



- ampiezza $\left|c_k \sin \frac{k\pi t}{L}\right|$
- fase: φ_k
- altezza del suono (frequenza di oscillazione) $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$
- intensità $|c_k|$

La frequenza fondamentale $\frac{\pi}{L}$ determina la nota, le subarmoniche $\frac{k\pi}{L}$ danno luogo alla stessa nota a ottave più alte.

<u>ESEMPIO</u>: LA CORDA PIZZICATA:



$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \left|\frac{\pi}{2} - x\right|$$

$$h(x) = 0$$

Calcoliamo $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x) \sin kx \, dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin kx \, dx & k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$

$k = 2j+1$ $\qquad$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \underbrace{\sin kx}_{= -\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos kx}{k}\right)} dx = -x\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2} \cos kx \, dx$

$j = 0, \dots$

$$= \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{(2j+1)^2} (-1)^j$$

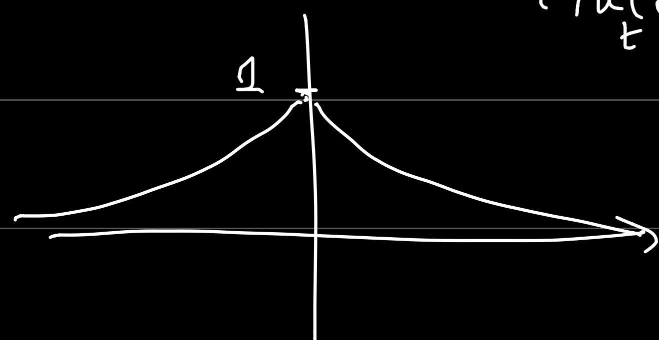
$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin((2j+1)x)$$

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \cos((2j+1)t) \sin((2j+1)x)$$

In realtà è una soluzione formale: non sono verificate le ipotesi del teorema

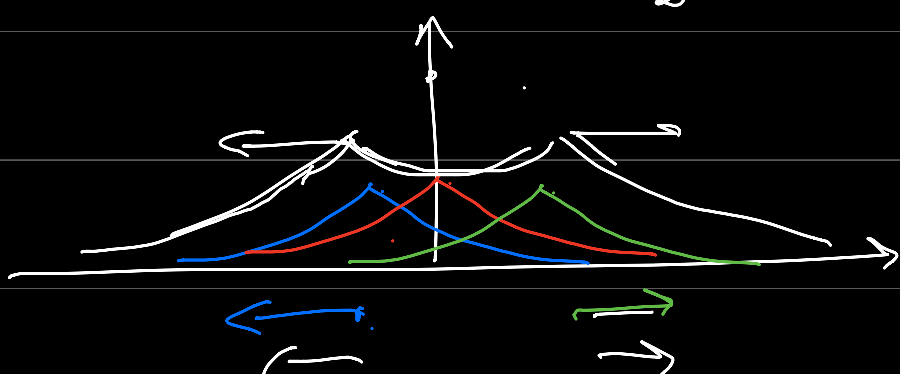
CORDA PIZZICATA INFINITA

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$



$g(x) = e^{-|x|}$

Formula di d'Alembert $\quad u(t,x) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right]$



EQUAZIONE DELLE ONDE IN DIMENSIONE 3

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = g(x) & \mathbb{R}^3 \\ u_t(0,x) = h(x) & \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Introduciamo il metodo delle medie sferiche e della associata equazione di Eulero - Poisson - Darboux

Supponiamo che $u(t,x)$ sia una soluzione dell'equazione delle onde di classe $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Poniamo, per $x\in\mathbb{R}^3$ fissato

$$U(t,r) = \fint_{S_r(x)} u(t,y)\,d\sigma_y := \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r(x)} u(t,y)\,d\sigma_y$$

dove $S_r(x) = \{y\in\mathbb{R}^3 : |y-x| = r\}$ é la sfera di raggio r e centro x. Ponendo $y = x + rz$

$$U(t,r) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} u(t, x+rz)\,d\sigma_z$$

$$U_{tt} = \fint_{S_r(x)} u_{tt}(t,y)\,d\sigma_y = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} u_{tt}(t, x+rz)\,d\sigma_z$$

Ora calcoliamo U_r e U_{rr}

$$U_r(t,r) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} \nabla u(t, x+rz)\cdot z\,d\sigma_z = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{div}_z\left[\nabla u(t, x+rz)\right]dz$$

$$B_1(0)$$

$$= \frac{r}{4\pi} \int_{B_1(0)} \Delta u(t, x+rz)\,dz = \frac{r}{4\pi} \int_{B_1(0)} u_{tt}(t, x+rz)\,dz$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B_r(x)} u_{tt}(t,y)\,dy = r^{-2} \int_0^r \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_s(0)} u_{tt}(t,y)\,d\sigma_y \right)}_{s^2 U_{tt}(t,s)} ds$$

In altre parole abbiamo trovato la relazione

$$r^2 U_r(t,r) = \int_0^r s^2 U_{tt}(t,s)\,ds$$

da cui, derivando rispetto a r otteniamo

$$2r U_r(t,r) + r^2 U_{rr}(t,r) = r^2 U_{tt}(t,r)$$

dividendo per r troviamo

$$r U_{tt}(t,r) = r U_{rr}(t,r) + 2 U_r(t,r)$$

che somiglia all'equazione delle onde, ma non lo é veramente. Però, ponendo

$$\tilde{U}(t,r) = r U(t,r)$$

otteniamo facilmente che

$$\tilde{U}_{tt} = r U_{tt}(t,r) = r U_{rr}(t,r) + 2U_r(t,r) = (rU)_{rr} = \tilde{U}_{rr}$$

Dunque $\tilde{U}$ risolve l'equazione delle onde unidimensionale. Come vedremo, possiamo estendere $\tilde{U}(t,r)$ per $r<0$ in modo dispari: $\tilde{U}(t,-r) = -\tilde{U}(t,r)$.

Per utilizzare la formula di d'Alembert dobbiamo individuare le condizioni iniziali:

$$G(r) =: \fint_{S_r(x)} g(y)\,d\sigma_y = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} g(x+rz)\,d\sigma_z$$

G e H si estendono naturalmente in modo pari in r

$$H(r) =: \fint_{S_r(x)} h(y)\,d\sigma_y = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} h(x+rz)\,d\sigma_z$$

di modo che

$$\tilde{U}(0,r) = r\,U(0,r) = r\,G(r) =: \tilde{G}(r)$$

e

$$\tilde{U}_t(0,r) = r\,U_t(0,r) = r\,H(r) =: \tilde{H}(r)$$

sono dispari in r

Possiamo dunque applicare la formula di d'Alembert a $\tilde{U}$ e scrivere

$$\tilde{U}(t,r) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s)\,ds$$

che, per U, dà l'espressione

$$U(t,r) = \frac{\tilde{G}(r+t)+\tilde{G}(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s)\,ds$$

Come facciamo a cavare da questo l'espressione di $u(t,x)$. Ricordiamoci di avere fissato $x \in \mathbb{R}^3$ come centro della sfera. Dunque

$$u(t,x) = \lim_{r\to 0} U(t,r) = U(t,0)$$

Dobbiamo fare il

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tilde{G}(r+t)+\tilde{G}(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s)\,ds$$

notiamo che $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ sono funzioni dispari di r

$$\Rightarrow \quad \tilde{G}(t)+\tilde{G}(-t) = 0 \quad e \quad \int_{-t}^{t} \tilde{H}(s)\,ds = 0$$

Usiamo la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tilde{G}(r+t)+\tilde{G}(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s)\,ds =$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tilde G'(r+t)+\tilde G'(r-t)}{2} + \frac{\tilde H(r+t)-\tilde H(r-t)}{2}$$

$$= \tilde G'(t) + \tilde H(t) = G(t) + tG'(t) + tH(t)$$

Ci ricordiamo chi é G:

$$G(t) = \fint_{S_t(x)} g(y)\, d_y\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} g(x+tz)\, d\sigma_z$$

$$G'(t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_1(0)} \nabla g(x+tz)\cdot \underset{\hat{t}}{z}\, d\sigma_z = \frac{1}{t}\fint_{S_t(x)} \nabla g(y)\cdot(y-x)\, d\sigma_y$$

$$y = x+tz$$

Quindi

$$u(t,x) = \fint_{S_t(x)} g(y)\, d\sigma_y + \fint_{S_t(x)} \nabla g(y)\cdot(y-x)\, d\sigma_y + t\fint_{S_t(x)} h(y)\, d\sigma_y$$

La funzione u al tempo t dipende esclusivamente dalle medie di g, $\frac{\partial g}{\partial \nu}$ e h sulle sfere di raggio t intorno a x.

Un segnale localizzato nel punto x non verrà percepito nel punto y fino ad un tempo $t = |x-y|$.