FORMULA DI KIRCHOFF

$$u(t,x) = \fint_{S_t(x)} \left[g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x) + t h(y) \right] d\sigma_y$$

OSSERVAZIONE: c'é una perdita di regolarità rispetto al dato iniziale g.

TEOREMA: Date $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, se $u \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ é una soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = g(x) & \mathbb{R}^3 \\ u_t(0,x) = h(x) & \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

allora $u(t,x)$ é data dalla formula di Kirchoff, e viceversa.

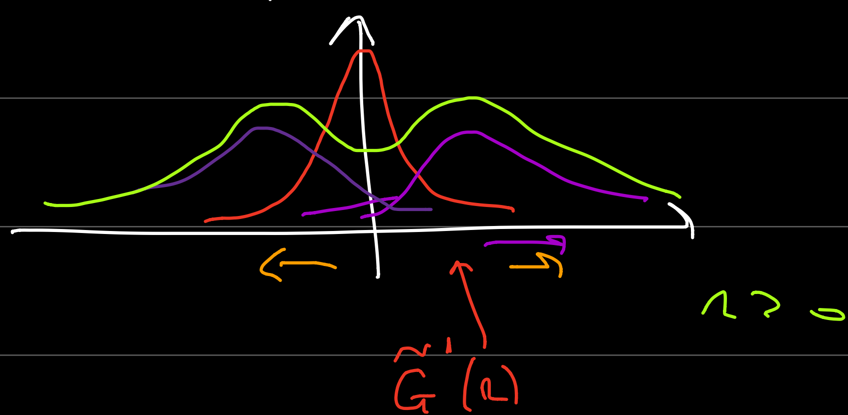
CASO PARTICOLARE: onde sferiche. Segue facilmente dalla formula di Kirchoff che se i dati iniziali g e h hanno simmetria sferica (cioé, se R é una rotazione in $\mathbb{R}^3$, allora $g\circ R = g$ e $h \circ R = h$), allora la soluzione $\hat{u}(t,x)$ ha la stessa proprietà (dimostrare per esercizio). Dunque se $U(t,r) = \fint_{S_r(0)} u(t,y)\,d\sigma_y$ avremo

$u(t,x) = U(t,|x|)$. Abbiamo visto che

$$U(t,r) = \frac{1}{2}\frac{\left[\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)\right]}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(s)\,ds$$

Se h e g sono radialmente simmetriche, $g(x) = \varphi(r)$

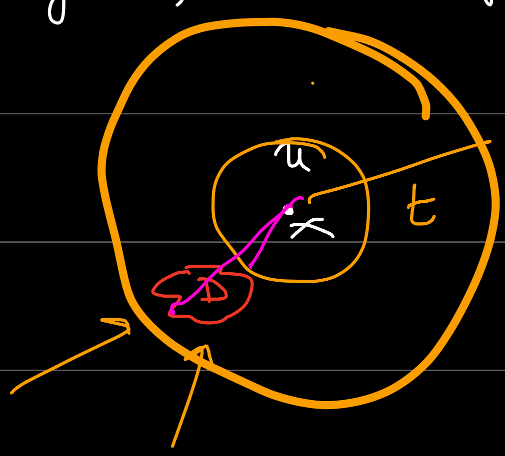
$h = \psi(r)$ $\quad \tilde{G}(r) = r\varphi(r)$, $\tilde{H}(r) = r\psi(r)$



OSSERVAZIONE: Torniamo alla formula di Kirchoff.

La soluzione $u(t,x)$ dipende dalle medie di

g, $\nabla g(y)\cdot(y-x)$, h sulla sfera di raggio t.



supponiamo che la sorgente sia localizzata (cioè il supporto di g e h siano contenuti in un limitato D. Siano $d_{min}(x) = \min_{y \in D} |x-y|$ e $d_{max}(x) = \max_{y \in D} |x-y|$

Allora il valore $u(t,x)$ viene influenzato dai dati solo per $t \in (d_{min}, d_{max})$. Se la sorgente è puntiforme allora il segnale si propaga su superfici sferiche concentriche nella sorgente (principio di Huygens).

ONDE IN DIMENSIONE 2

Per trattare le onde bidimensionali utilizziamo il metodo della discesa di Hadamard, che consiste nell'immergere il problema bidimensionale nello spazio tridimensionale per poi utilizzare il metodo di Kirchoff.

Possiamo sempre aggiungere una terza variabile fittizia, ponendo

$$\overline{u}(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2)$$

Analogamente poniamo:

$$\bar{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2)$$

$$\bar{h}(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2)$$

Sia $\bar{u}$ la soluzione di

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ \bar{u}(0,x) = \bar{g}(x) \\ \bar{u}_t(0,x) = \bar{h}(x) \end{cases}$$

se $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, poniamo $\bar{x} = (x_1,x_2,0) = (x,0)\in\mathbb{R}^3$

Sappiamo che, per la formula di Kirchoff,

$$\bar{u}(t,x) = \fint_{\partial B_t(x)} \left[\bar{g}(y) + \nabla\bar{g}(y)\cdot(y-x) + t\bar{h}(y)\right] d\sigma_y$$

$$= \frac{d}{dt}\left(t \fint_{S_t(x)} \bar{g}(y)\,d\sigma_y\right) + t\fint_{S_t(x)} \bar{h}(y)\,d\sigma_y$$

Notiamo che $\bar{u}(t,x_1,x_2,x_3) = \bar{u}(t,x_1,x_2,0)$, grazie alla formula di Kirchoff.

Ora vogliamo esprimere le medie di $\bar{g}$ e $\bar{h}$ sulle sfere eliminando la terza variabile fittizia

$$y_3 = F^{\pm}(y_1,y_2) = x_3 \pm \sqrt{t^2-r^2}\,, \quad \text{con } r^2 = y_1^2+y_2^2 \in [0,t^2]$$

$$d\sigma_y = \sqrt{1+|\nabla F|^2}\,dy_1dy_2 = \sqrt{1+\frac{r^2}{t^2-r^2}}\,dy_1dy_2 = \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dy_1dy_2$$

Quindi otteniamo

$$\int_{S_t(x)} \bar{g}(y)\,d\sigma_y = \frac{1}{\cancel{4}\pi t^2}\,2\int_{B_t(0)} g(y)\,\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dy_1dy_2$$

$$= \frac{t}{2}\int_{B_t(x)\subset\mathbb{R}^2} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy$$

Analogamente per i termini con $\nabla g(y)\cdot(y-x)$ e h otteniamo la formula (di Poisson)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{B_t(x)} \frac{t\,g(y)+t\,\nabla g(y)(y-x)+t^2h(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy$$

OSSERVAZIONE: il valore di $u(t,x)$ dipende dal valore di $g, \nabla g, h$ in tutto il disco di centro x e raggio t

Il segnale proveniente da una sorgente localizzata verrà percepito per tutti i tempi $t > d_{min}$.