Esercizio 1 - Sia u la soluzione di

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
$$u(0,x) = g(x)$$
$$u_t(0,x) = h(x)$$

con g e h di classe $C^2(\mathbb{R})$, a supporto limitato $\subset [a,b]$.

Consideriamo l'energia cinetica $E_{cin} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2\, dx$ e potenziale $E_{pot} = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2\, dx$

(a) Dimostrare che $E_{cin}(t)$, $E_{pot}(t)$ sono finite $\forall t \in \mathbb{R}$

(b) Dimostrare che $E_{cin} + E_{pot} = cost$

(c) Dimostrare che dopo un certo tempo T (finito) $E_{cin}(t) = E_{pot}(t)$ (equipartizione dell'energia).

2 - (Vibrazioni forzate) - Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) & \mathbb{R} \times (0,L) \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

(a) Utilizzare gli sviluppi di Fourier per risolvere il caso

$$f(x,t) = g(t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

(b) analizzare il caso in cui

$$f(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{L} t\right)$$

(c) Utilizzare il metodo di separazione delle variabili per scrivere una soluzione formale del problema generale

ESERCIZIO 3 (Corda vibrante con dissipazione)

$$\begin{cases} u_{tt} + h u_t - u_{xx} = 0 & h > 0 \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases}$$

Utilizzare il metodo di separazione delle variabili e gli sviluppi in serie di Fourier per risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

Consideriamo l'energia cinetica $E_{cin} = \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx$ e potenziale $E_{pot} = \frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx$. Dimostrare che l'energia totale $E_{cin} + E_{pot}$ viene dissipata per $t > 0$. (Può essere utile osservare che $u_t(t,0) = u_t(t,L) = 0 \quad \forall t$).