Esercizio 1 - Sia u la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con g e h di classe $C^2(\mathbb{R})$, a supporto limitato $\subset [a,b]$.

Consideriamo l'energia cinetica $E_{cin} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2 \, dx$ e potenziale $E_{pot} = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 \, dx$

ⓐ Dimostrare che $E_{cin}(t)$, $E_{pot}(t)$ sono finite $\forall t \in \mathbb{R}$

ⓑ Dimostrare che $E_{cin} + E_{pot} = cost$

ⓒ Dimostrare che dopo un certo tempo T (finito) $E_{cin}(t) = E_{pot}(t)$ (equipartizione dell'energia).

Soluzione:

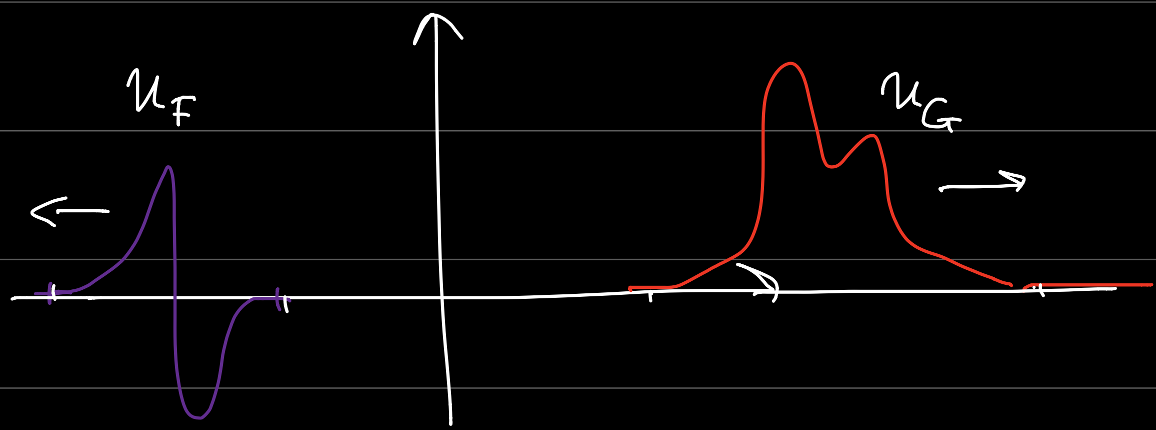
(a) Segue dalla formula di d'Alembert che

$$u(t,x) = \overbrace{F(x+ct)}^{u_F} + \overbrace{G(x-ct)}^{u_G}$$

dove $F(s) = \frac{1}{2}\left[g(s) + \frac{1}{c}\int_0^s h(z)dz\right]$ e $G(s) = \frac{1}{2}\left[g(s) - \frac{1}{c}\int_0^s h(z)dz\right]$

hanno entrambe supporto compatto. Perciò $u(t,x)$

ha supporto limitato $\forall t$; inoltre, se l'intervallo $[a,b]$ contiene sia il supporto di g che quello di h, il supporto di u_F è contenuto in $[a-ct, b-ct]$ e quello di u_G in $[a+ct, b+ct]$



$$E_{cin} = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} [F'(x+ct)-G'(x-ct)]^2 = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (F'(x+ct))^2+(G'(x-ct))^2 dx$$

$$-2\int_{\mathbb{R}} F'(x+ct)G'(x-ct)dx$$

$$E_{pot} = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} [F'(x+ct)+G'(x-ct)]^2 = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (F'(x+ct))^2+(G'(x-ct))^2 dx$$

$$+2\int F'(x+ct)G'(x-ct)dx$$

Abbiamo dunque $E_{cin}+E_{pot} = c^2\int_{\mathbb{R}} (F'(x+ct))^2+(G'(x-ct))^2 dx$

$= c^2\int_{\mathbb{R}} (F'(x))^2+(G'(x))^2 dx$

non dipende da t. Notiamo che se $t > \frac{b-a}{2c}$ i supporti di $F(x+ct)$ e $G(x-ct)$ si disgiungono e dunque

$$F'(x+ct)\cdot G'(x-ct) = 0$$

OSSERVAZIONE: Se F e G decadono all'infinito, l'energia totale si conserva ugualmente. Possiamo vederlo così

$$\frac{d}{dt}\left(E_{cin} + E_{pot}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \left(u_t u_{tt} + c^2 u_{xt} u_x\right)dx$$

$$= \int \left(c^2 u_t u_{xx} + c^2 \underbrace{u_{xt} u_x}_{\text{per parti}}\right)dx = \int_{\mathbb{R}} c^2 (u_{xx})^2 - c^2 (u_{xx})^2 = 0$$

Ugualmente, si perviene all'equipartizione dell'energia al limite per $t \to +\infty$.

2 - (Vibrazioni forzate) - Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) & \mathbb{R}\times(0,L) \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

(a) Utilizzare gli sviluppi di Fourier per risolvere il caso

$$f(x,t) = g(t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

(b) analizzare il caso in cui

$$f(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{L} t\right)$$

(c) Utilizzare il metodo di separazione delle variabili per scrivere una soluzione formale del problema generale

Soluzione: cerchiamo una soluzione sotto forma di serie di Fourier nella forma

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(t)\sin(k\ell x) \qquad \text{dove} \qquad \ell = \frac{\pi}{L}$$

e cerchiamo di determinare le (infinite) funzioni $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Imponiamo che

$$u_{tt} - u_{xx} = g(t)\sin \ell x \qquad \forall\ t, x$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[w_k''(t) + k^2\ell^2 w_k\right]\sin(k\ell x) = g(t)\sin(\ell x)$$

A destra dell'uguale possiamo vedere (a t fissato) un monomio trigonometrico. Uguagliando i termini di ugual posto $\Rightarrow$

$$\begin{cases} w_1''(t) + \ell^2 w_1(t) = g(t) & (k=1) \\ w_k''(t) + k^2\ell^2 w_k(t) = 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

a cui associamo le condizioni iniziali

$$u(0,x) \equiv 0 \implies \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(0) \sin(k\ell x) = 0 \quad \forall x$$

$$\implies w_k(0) = 0 \quad \forall k$$

$$u_t(0,x) \equiv 0 \implies \sum_{k=0}^{+\infty} w_k'(0) \sin(k\ell x) = 0 \quad \forall x$$

$$\implies w_k'(0) = 0$$

Deduciamo immediatamente che $w_k \equiv 0 \quad \forall k \geq 2$.

Ora dobbiamo risolvere $w_1'' + \ell^2 w_1 = g(t)$, con $w_1(0) = w_1'(0) = 0$. La soluzione si può trovare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie (o anche con il metodo di Duhamel) ed é

$$w_1(t) = \frac{1}{\ell}\int_0^t \sin(\ell s)\, g(\underbrace{t-s}_{\tau})\, ds = \frac{1}{\ell}\int_0^t \sin(\ell(t-\tau))\, g(\tau)\, d\tau$$

Infatti,
$$w_1' = \frac{1}{\ell}\int_0^t \ell \cos(\ell(t-\tau))\, g(\tau)\, d\tau$$

$$w_1'' = -\ell\int_0^t \sin(\ell(t-\tau))\, g(\tau)\, d\tau + g(t)$$

La soluzione è dunque $u(t,x) = w_1(t)\sin(\ell x) =$
$$= \frac{\sin(\ell x)}{\ell}\int_0^t \sin(\ell s)\, g(t-s)\, ds$$

In genere e $w'' + \omega^2 w = g(t)$, $w(0) = w'(0) = 0$ ha

soluzione $$w(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin(\omega(t-z))\, g(z)\, dz$$

Questa osservazione ci serve per risolvere il caso

generale con un termine forzante $f(t,x)$, che

scriveremo in serie di Fourier $f(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin(k\ell x)$

dove $f_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(t,x)\sin(k\ell x)\, dx$ è il k-esimo

coefficiente di Fourier di $f(t,\cdot)$ a t fissato.

Dovremo quindi risolvere infinite equazioni
$$w_k''(t) + (k\ell)^2 w_k = f_k(t)$$
$$w_k(0) = w_k'(0) = 0$$

Ciascuna delle quali ha soluzione
$$w_k(t) = \frac{1}{k\ell}\int_0^t \sin(k\ell s)\, f_k(t-s)\, ds$$
$$= \frac{1}{k\ell}\int_0^t \sin(k\ell s)\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(t-s,\xi)\sin(k\ell\xi)\, d\xi\right) ds$$
$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^t\int_0^L f(t-s,\xi)\sin(k\ell s)\sin(k\ell\xi)\, d\xi\, ds$$

Possiamo quindi sommare i termini nella serie di Fourier di u:

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(k\ell x) \int_0^t \int_0^L f(t-s,\xi) \sin(k\ell s) \sin(k\ell \xi) \, d\xi \, ds$$

Notiamo che se $f(t,x) = \sin \frac{\pi t}{L}$ e non dipende da x

la formula di sopra é valida (formalmente) e

fornisce la soluzione sotto forma di serie di Fourier

ESERCIZIO 3 (Corda vibrante con dissipazione)

$$\begin{cases} u_{tt}+hu_t-u_{xx}=0 & h>0 \\ u(t,0)=u(t,L)=0 \\ u(0,x)=g(x) \\ u_t(0,x)=f(x) \end{cases}$$

Utilizzare il metodo di separazione delle variabili e gli sviluppi in serie di Fourier per risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

Consideriamo l'energia cinetica $E_{cin}=\frac{1}{2}\int_0^L u_t^2\,dx$ e potenziale $E_{pot}=\frac{1}{2}\int_0^L u_x^2\,dx$. Dimostrare che l'energia totale $E_{cin}+E_{pot}$ viene dissipata per $t>0$. (Può essere utile osservare che $u_t(t,0)=u_t(t,L)=0\ \forall t$).

Soluzione: cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty} w_k(t)\sin(klx) \qquad l=\frac{\pi}{L}$$

Ragionando come nell'esercizio precedente, w_k devono risolvere le equazioni

$$w_k'' + h w_k' + (kl)^2 w_k = 0$$

$\Rightarrow$ polinomio caratteristico $\lambda^2 + h\lambda + (kl)^2 = 0$

con radici $\lambda_{1,2}^k = \dfrac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4(kl)^2}}{2} = -\dfrac{h}{2} \pm \sqrt{\omega_k}$

Notiamo che $\omega_k \geq 0$ al più per un numero finito di indici k.

Per comodità di scrittura supponiamo che $\omega_k < 0$ $\forall k$

La soluzione generale è quindi $c_1^k e^{\lambda_1^k t} + c_2 e^{\lambda_2^k t} = w_k(t)$

Ora dobbiamo inserire le condizioni iniziali

Scriviamo $g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k \sin(klx)$ $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k \sin(kx)$

Che ci forniscono le condizioni iniziali

$w_k(0) = g_k$

$w_k'(0) = h_k$

$$g_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin klx \, dx$$

$w_k(0) = c_1^k + c_2^k = g_k$ $w_k'(0) = \lambda_1^k c_1^k + \lambda_2^k c_2^k = h_k$

attenzione: il caso della risonanza (due radici coincidenti)

$\boxed{\text{va trattato a parte}}$

$$(\lambda_1^k - \lambda_2^k) c_2^k = \lambda_1^k g_k - h_k \Rightarrow c_2^k = \frac{\lambda_1^k g_k - h_k}{\lambda_1^k - \lambda_2^k}$$

$$c_1^k = g_k - c_2^k = \frac{\lambda_1^k g_k - h_k}{\lambda_1^k - \lambda_2^k}$$

Vediamo ora la dissipazione dell'energia:

$$E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2 + u_x^2)\,dx$$

derivando abbiamo $\displaystyle \frac{d}{dt} E_{tot} = \int_0^L u_t u_{tt} + u_x u_{xt}$

$$= \int_0^L \{u_t[-h u_t + u_{xx}] - u_{xx} u_t\}\,dx = -\int_0^L h u_t^2 = -2h\,E_{cin}$$