# Problema generale dell'elettrostatica

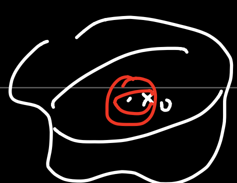
Il potenziale elettrico generato da una carica puntiforme posta nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^3$ è

$$\boxed{V(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|x-x_0|}}$$

Il campo elettrico $\vec{E} = -\nabla V(x)$ soddisfa la legge di Gauss:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E} = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\nu_{ext}\, d\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-x_0}{|x-x_0|^3} \qquad \int_{\partial B_r(x_0)} \vec{E}\cdot\nu_{ext}\, d\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_{B_r(x_0)} d\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$$0 = \int_{V\setminus B_r(x_0)} \operatorname{div}\vec{E} = \int_{\Sigma\setminus B_r(x_0)} \vec{E}\cdot\nu_{ext}\, d\sigma$$

Il flusso uscente dalla superficie $\Sigma = \partial V$ è uguale alla carica alla carica contenuta in $V$

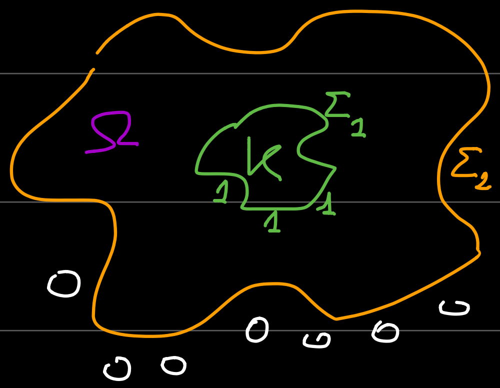
$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

è il potenziale generato da una distribuzione di carica di densità spaziale $\rho$. Se $\vec{E} = -\nabla u$

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{E})\, dx = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\nu_{ext}\, d\sigma$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \, dx$$

## IL PROBLEMA DEL CONDENSATORE




Vogliamo trovare il campo elettrico associato ad una differenza di potenziale fissata fra le due superfici

$$(*)\quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\Sigma_1} = 1 \\ u\big|_{\Sigma_2} = 0 \end{cases}$$

## PRINCIPIO DI DIRICHLET

Sia $u$ una soluzione di $(*)$, allora, $\forall\, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tale che $u - v\big|_{\partial\Omega} = 0$ si ha

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

Dimostrazione: $\int_\Omega |\nabla v|^2 = \int_\Omega |\nabla u + \nabla(v-u)|^2$

$$= \int |\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla(v-u) + |\nabla(v-u)|^2 \qquad \operatorname{div}(\varphi \vec{F}) = \nabla\varphi \cdot \vec{F} + \varphi \operatorname{div}\vec{F}$$

Ma $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) = \int_\Omega \operatorname{div}\left((v-u)\nabla u\right) - (v-u)\underbrace{\Delta u}_{=0} =$

$$\int_{\partial\Omega} (v-u)\nabla u \cdot \nu_{ext}\, d\sigma = 0 \qquad \text{perché } v-u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

Quindi $\int_\Omega |\nabla v|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \quad v-u\big|_{\partial\Omega} = 0.$

Il principio di Dirichlet si generalizza a equazioni

$$\begin{cases} -\Delta u = \rho & \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

In tale caso

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 - 2\rho v = \int_\Omega |\nabla u + \nabla(v-u)|^2 - 2\rho v$$

$$= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \underbrace{2\nabla u \cdot \nabla(v-u)}_{=\int_\Omega 2\rho(v-u)} + |\nabla(v-u)|^2 - 2\rho v = \int_\Omega |\nabla u|^2 - 2\rho u + \int_\Omega |\nabla(v-u)|^2$$

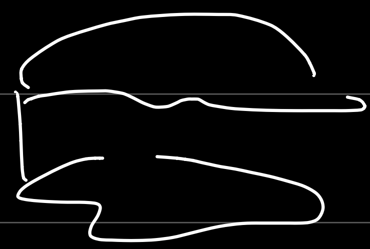
$$\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 - 2\rho u$$

# SUPERFICI MINIMALI NON PARAMETRICHE

Superficie cartesiana

$$S = \mathrm{Graph}(u) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \bar{\Omega},\ x_3 = u(x_1, x_2) \}$$

$$\boxed{I = \mathrm{Area}(S) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx}$$



Consideriamo la classe delle funzioni ammissibili

$$\boxed{\mathcal{A} = \{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v\big|_{\partial\Omega} = f \}}$$

TEOREMA: Dato un dominio regolare $\Omega$, una funzione $f \in C(\partial\Omega)$, se $u \in C^1(\Omega)$ é un minimo del funzionale dell'area nella classe $\mathcal{A}$ delle funzioni ammissibili e $u \in C^2(\Omega)$, allora $u$ soddisfa l'equazione

$$\mathrm{div}\left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \qquad \text{su } \Omega$$

In particolare, la curvatura media della superficie é nulla in ogni punto.

Dimostrazione: presa $\varphi \in C^1_c(\Omega)$, possiamo estenderla su tutto $\bar{\Omega}$ col valore zero. $u + t\varphi \in \mathcal{A}$

Poniamo $F(t) = I(u+t\varphi)$, con $t \in \mathbb{R}$.

LEMMA: $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{t|\nabla\varphi|^2 + \nabla u \cdot \nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla u + t\nabla\varphi|^2}}\, dx$$

Dimostrazione

$$F(t) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u + t\nabla\varphi|^2} = \int_\Omega f(t,x)\,dx = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2 + 2t\,\nabla u\cdot\nabla\varphi + t^2|\nabla\varphi|^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{2(\nabla u\cdot\nabla\varphi + t|\nabla\varphi|^2)}{2\sqrt{1+|\nabla u + t\nabla\varphi|^2}} = \quad \Bigg| \quad F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

$f$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ sono continue in $\mathbb{R}\times\overline{\Omega}$, si può quindi applicare il teorema di derivazione sotto segno di integrale. $\square$

Se $u$ é il minimo del funzionale dell'area, $t=0$ é punto di minimo per $F$. Dunque $F'(0)=0$, cioé

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\nabla u\cdot\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, dx = 0}$$

$$\int_\Omega \varphi\, \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \int_\Omega \left[\mathrm{div}\left(\varphi \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) - \frac{\nabla\varphi\cdot\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right] dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\nabla u\cdot \nu_{ext}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\sigma = 0.$$

Deduciamo quindi che

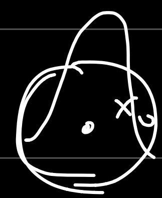
$$\boxed{\int_\Omega \varphi \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0} \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega)$$

Abbiamo bisogno del lemma seguente:

LEMMA: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $g \in C(\overline{\Omega})$, se

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x) = 0 \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)$$

allora $g \equiv 0$ su $\Omega$.

$g \geq \mu > 0$ 


Dimostrazione: supponiamo di no, e che $g(x_0) > 0$. Per la continuità di $g$, $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\min_{B_\delta(x_0)} g(x) = \mu > 0$. Basta ora prendere una funzione $\varphi \in C^\infty_c(B_\delta(x_0))$, $\varphi \geq 0$ $\varphi \not\equiv 0$. $\boxed{\int g(x)\varphi(x) > 0}$ $\square$

ESERCIZIO: Dimostrare che se $u$ minimizza

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \rho u$$

fra le funzioni ammissibili ed è di classe $C^2$, allora verifica l'equazione $\boxed{-\Delta u = \rho \ \text{ in } \Omega}$

# EQUAZIONI DI LAPLACE E POISSON

(1) $\Delta u = 0$ (Laplace)

(2) $\Delta u = f$ (Poisson)

Una funzione che soddisfa (1) è detta funzione armonica.

## 1. SOLUZIONI RADIALMENTE SIMMETRICHE

$$u(x) = v(r) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \qquad \nabla r = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$$

$$\nabla u(x) = v'(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}\right) = v'(r)\frac{x}{r}$$

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \nabla\left(\frac{v'}{r}\right)\cdot x + n\,v'(r) = v''\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} - \frac{v'}{r^2}x \cdot x + n v'$$

$$= v'' + \frac{n-1}{r}v'$$

Soluzione generale di $v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0$

Osserviamo che

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = r^{1-n}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}v'\right) = 0$$

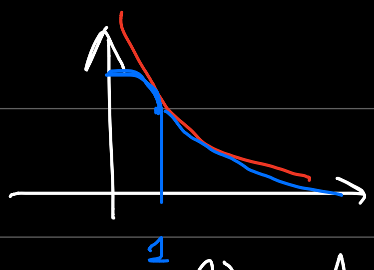
$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}v'\right) = a \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{a}{r^{n-1}}$$

(a) se $n = 2$ $\Rightarrow$ $v(r) = a \log r + b$

$\Rightarrow$ (b) se $n \geq 3$ $\Rightarrow$ $v(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$

Abbiamo due soluzioni linearmente indipendenti, di cui una costante. L'altra invece ha una singolarità nell'origine. Cerchiamo di regolarizzarla.

* Caso $n \geq 3$




$$v(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \qquad v'(r) = -\frac{(n-2)}{r^{n-1}}$$

$$w = A - Br^2 \qquad w(1) = A - B = 1$$

Imponiamo le condizioni di raccordo per $v$ e $w$ e $v'$ e $w'$ in $\boxed{r=1}$

$$w'(1) = -2B = -(n-2) \Rightarrow B = \frac{n-2}{2} = A - 1 \Rightarrow A = 1 + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2}$$

$$w(r) = \begin{cases} \dfrac{k}{r^{n-2}} & r \geq 1 \\ k\left[\dfrac{n}{2} - \left(\dfrac{n-2}{2}\right) r^2\right] & 0 \leq r < 1 \end{cases} \qquad w' = -(n-2)r \qquad w'' = -(n-2)$$

$$\Delta w = w'' + \frac{n-1}{r} w' = -k(n-2)\left[1 + (n-1)\right] = -kn(n-2) \qquad r < 1$$

superficie sferica

$$n|B_1| = \int_{B_1} n = \int_{B_1} \operatorname{div}(x) = \int_{\partial B_1} x \cdot \nu \, d\sigma = |\omega_{n-1}| \qquad n|B_1| = |\omega_{n-1}|$$

$$\int_{B_1} \Delta w = -k(n-2)|\omega_{n-1}| = -1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{(n-2)|\omega_{n-1}|}}$$

Cioè $\boxed{\Delta w = -\frac{1}{|B_1|}\mathbb{1}_{B_1}}$ se scegliamo $k = \frac{1}{(n-2)|\omega_{N-1}|}$