REGOLARIZZAZIONE DELLA SOLUZIONE SINGOLARE

$n \geq 3$

$$w(r) = \begin{cases} \dfrac{k}{r^{n-2}} & r \geq 1 \\ k\left[\dfrac{n}{2} - \left(\dfrac{n-2}{2}\right) r^2\right] & 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

$w' = -(n-2) r \quad w'' = -(n-2)$

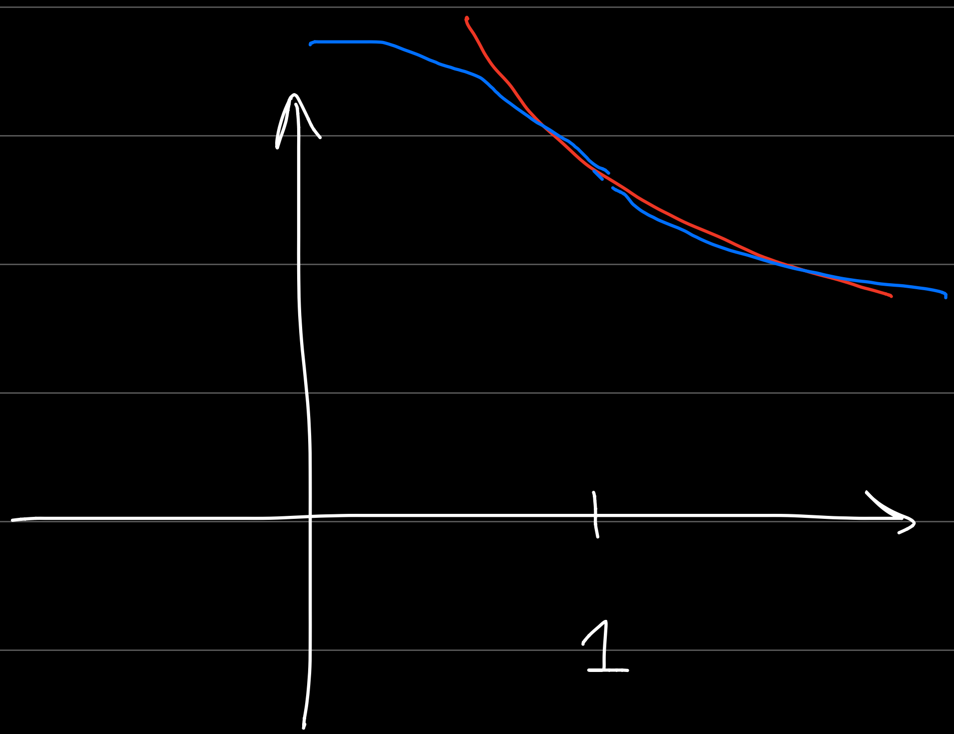
$$\Delta w = w'' + \frac{n-1}{r} w' = -k(n-2)\left[1 + (n-1)\right] = -kn(n-2)$$

$$\boxed{\int_{B_1} \Delta w = -kn(n-2)\,|B_1|}$$

ma $n\,|B_1| = |S^{n-1}|$. Abbiamo preso $k = \dfrac{1}{(n-2)\,|S^{n-1}|}$,

misura $\mathcal{L}^n$ superficie

in modo da risolvere $\Delta w = -\dfrac{1}{|B_1|} \mathbb{1}_{B_1}$



Cioè $\boxed{\Delta w = -\frac{1}{|B_1|}\mathbb{1}_{B_1}}$ se scegliamo $k = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}$

Ora definiamo $w_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

$$w_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{k}{r^{n-2}} & r \geq \varepsilon \\ \frac{k}{\varepsilon^{n-2}}\left[\frac{n}{2} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right] & 0 \leq r < \varepsilon \end{cases}$$

w_ε risolve $\Delta w_\varepsilon = \frac{-1}{\varepsilon^n}\frac{1}{|B_1|}\mathbb{1}_{B_\varepsilon} = \frac{-1}{|B_\varepsilon|}\mathbb{1}_{B_\varepsilon} = -f_\varepsilon$

Quando $\varepsilon \to 0$, $\boxed{w_\varepsilon \to \bar{w}(r) = \frac{k}{r^{n-2}}} = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{r^{n-2}}$

D'altra parte

$f_\varepsilon \to \delta_0$, nel senso che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\boxed{\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \varphi(0)}$ (Dimostrarlo per esercizio)

Definiamo $\boxed{\Gamma(x) = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{|x|^{n-2}}}$ la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace, (o funzione di green)

$\boxed{\Delta\Gamma = -\delta_0}$ $\mathbb{R}^n$

$\Gamma(x)$ é il limite per $\varepsilon \to 0$ di $\boxed{\Gamma_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(|x|)}$

le soluzioni di:

$$\boxed{\Delta\Gamma_\varepsilon = -\frac{1}{|B_\varepsilon|}\mathbb{1}_{B_\varepsilon}} \xRightarrow{\varepsilon\to 0} \Delta\Gamma = -\delta_0$$

Se vogliamo risolvere $\Delta u = -\rho$, (ρ diciamo C^2 a supporto compatto) in $\mathbb{R}^n$

consideriamo $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_\varepsilon(x-y)\rho(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_\varepsilon(y)\rho(x-y)\,dy$$

Oss: $\rho \in C^2 \Rightarrow u_\varepsilon \in C^2 \ \forall \varepsilon$.

$$-\Delta_x u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x\Gamma_\varepsilon(x-y)\rho(y)\,dy = \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon(x)} \underbrace{\rho(y)}_{-\rho(x)+\rho(x)}\,dy = \rho(x) + \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon(x)}(\rho(y)-\rho(x))\,dy$$

Facciamo il limite per $\varepsilon \to 0$, sapendo che ρ ha supporto compatto ed è quindi una funzione uniformemente continua.

Quindi $r_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon(x)}(\rho(y)-\rho(x))\,dx$ converge uniformemente a zero; Infatti, fissato $\delta > 0$ $\exists\, \bar{\varepsilon} > 0$: $|y-x| < \bar{\varepsilon} \Rightarrow |\rho(y)-\rho(x)| < \delta$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}), \quad \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon(x)} |\rho(y)-\rho(x)|\,dy < \delta.$$

Abbiamo quindi dimostrato il

TEOREMA: Sia ρ una funzione $C^2_c(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\rho(y)\,dy$$

è una funzione di classe C^2 e risolve $\Delta u = -\rho$ su $\mathbb{R}^n$

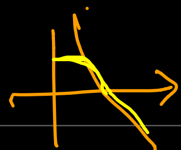
OSSERVAZIONE: Nello spazio tridimensionale

$\Gamma(x)$ è il potenziale elettrico (o gravitazionale) generato da una carica puntiforme concentrata nell'origine

$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x-y)\rho(y)\,dy$ è il potenziale elettrico generato dalla distribuzione di carica di densità ρ.

SOLUZIONE FONDAMENTALE IN DIMENSIONE 2

Se $n=2$, consideriamo



$$v(r) = \begin{cases} -\log r & r \geq 1 \\ \frac{1}{2}(1-r^2) & r \leq 1 \end{cases} \qquad v'' + \frac{v'}{r} = \begin{cases} +\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0 & r \geq 1 \\ -2 & r \leq 1 \end{cases}$$

Poniamo $\boxed{w_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\left[v\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) - \log \varepsilon\right]}$, in modo che

$$w_\varepsilon'' - \frac{w_\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^2 \pi} \quad \text{se } r \in [0,1] \Rightarrow \boxed{\Delta w_\varepsilon = -\frac{1}{|B_\varepsilon|}\mathbb{1}_{B_\varepsilon}}$$

In dimensione 2 la soluzione fondamentale del è

$$\boxed{\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|} \qquad \varepsilon \to 0 \quad \Delta\Gamma = -\delta_0$$

IDENTITÀ DI STOKES

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\boxed{G^x(y) = \Gamma(y-x)} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$-\Delta_y G^x = \delta_x$

Osserviamo che $y \mapsto G^x(y)$ é una funzione armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La funzione G^x si chiama soluzione fondamentale con polo in x.

POTENZIALE DI DIPOLO

Consideriamo un versore $\nu \in S^{n-1}$. La derivata

$$\partial_\nu G^x = \nabla\Gamma(y-x)\cdot\nu = \frac{1}{|S^{n-1}|}\frac{(y-x)\cdot\nu}{|y-x|^n}$$

é ancora una funzione armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Si può ancora interpretare come il limite all'infinito del potenziale generato da due cariche opposte site nei punti $\pm\nu$

$$V(x) = \frac{q}{(n-2)|S^{n-1}|}\left[\frac{1}{|x-\nu|^{n-2}} - \frac{1}{|x+\nu|^{n-2}}\right]$$

$$= \frac{q}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{|x|^{n-2}}\left[\frac{1}{\left|\frac{x}{|x|}-\frac{\nu}{|x|}\right|^{n-2}} - \frac{1}{\left|\frac{x}{|x|}+\frac{\nu}{|x|}\right|^{n-2}}\right]$$

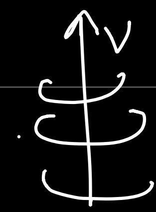
$$\left|\frac{x}{|x|}-\frac{\nu}{|x|}\right|^{2-n} = 1+(n-2)\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\nu}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{per } |x|\to+\infty$$

$$\left[\left|\frac{x}{|x|}-\frac{\nu}{|x|}\right|^2\right]^{-\frac{n-2}{2}} = \left(1-2\frac{x\cdot\nu}{|x|^2}+\frac{1}{|x|^2}\right)^{-\frac{n-2}{2}} = 1+(n-2)\frac{x\cdot\nu}{|x|^2}+O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

Dunque, per $|x| \to +\infty$

$$V(x) \simeq \frac{2q}{|S^{n-1}|\,|x|^n}\, x \cdot \nu = \partial_\nu G^x \quad \text{per } |x| \to +\infty.$$

$2q\nu$ viene detto il momento del dipolo. Il potenziale di dipolo perde la simmetria sferica ma mantiene quella cilindrica attorno all'asse ν



IDENTITÀ DI STOKES

Sia Ω un dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$.

Sia f una funzione di classe $C^2(\bar{\Omega})$. Allora $\forall x \in \Omega$ abbiamo

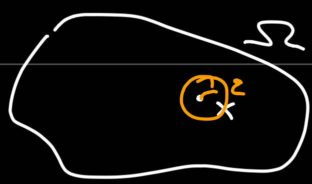
$$\boxed{f(x) = -\int_\Omega G^x(y)\Delta f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega}\left[f(y)\frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) - G^x(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(y)\right] d\sigma_y}$$

Dimostrazione:

Utilizziamo la formula di Gauss-Green: Ω aperto limitato con frontiera regolare e $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$. Allora

$$\boxed{\int_\Omega f\Delta g - g\Delta f = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\right) d\sigma}$$

[È sufficiente osservare che $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f$]



Sia $D_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ _ Abbiamo

$$\int_{D_\varepsilon} (f\underbrace{\Delta G^x(y)}_{=0} - G^x(y)\Delta f) = \int_{\partial D_\varepsilon} f\frac{\partial G^x}{\partial \nu} - G^x\frac{\partial u}{\partial \nu}$$

$$-\int_\Omega G^x(y)\Delta f + \int_{B_\varepsilon(x)} G^x(y)\,\Delta f = \int_{\partial\Omega} f\frac{\partial G^x}{\partial \nu} - G^x\frac{\partial f}{\partial \nu} + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f\frac{\partial G^x}{\partial \nu} - G^x\frac{\partial f}{\partial \nu}$$

Ora mostriamo che, per $\varepsilon \to 0$

(a) $$\int_{B_\varepsilon(x)} G^x(y)\,\Delta f \longrightarrow 0$$

(b) $$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f\frac{\partial G^x}{\partial \nu}\,d\sigma \to f(x)$$

(c) $$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} G^x\frac{\partial f}{\partial \nu}\,d\sigma \longrightarrow 0$$

Cominciamo da (a) $\quad f \in C^2$

$$\left|\int_{B_\varepsilon(x)} G^x(y)\Delta f\right| \le \frac{\|\Delta f\|_{L^\infty(\Omega)}}{(n-2)} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{1}{|y-x|^{n-2}}\,dy$$

$$= \frac{\|\Delta f\|_{L^\infty(\Omega)}}{(n-2)} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-2}} r^{n-1}\,dr$$

$$= \frac{\|\Delta f\|_{L^\infty(\Omega)}}{(n-2)} \frac{1}{2}\varepsilon^2 \to 0$$

se $n=2$ $\quad \int_0^\varepsilon -r\log r\,dr = -\frac{r^2}{2}\log r\Big|_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{r^2}{2}\frac{1}{r}\,dr = -\frac{\varepsilon^2}{2}\log\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \to 0$

(b) $$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} f\frac{\partial G^x}{\partial\nu}\,d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon}[f(y)-f(x)+f(x)]\frac{1}{|S^{n-1}|}\frac{1}{|y-x|^{n-1}}\,d\sigma_y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}|S^{n-1}|}\int_{\partial B_\varepsilon^{n-1}}[f(y)-f(x)]\,d\sigma_y + f(x)$$

f continua $\Rightarrow \forall\, \eta>0\ \exists\,\delta:\ |y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\eta$

$\Rightarrow$ se $\varepsilon<\delta \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^{n-1}|S^{n-1}|}\int_{\partial B_\varepsilon}|f(y)-f(x)|\,d\sigma_y < \eta$. In altre parole,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}|S^{n-1}|}\int_{\partial B_\varepsilon^{n-1}}[f(y)-f(x)]\,d\sigma_y = 0$$

(c) $$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} G^x\frac{\partial f}{\partial\nu}\,d\sigma\right| \le \|\nabla f\|_{L^\infty}\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{|y-x|^{n-2}}\,d\sigma_y$$

$$= \frac{\|\nabla f\|_{L^\infty}}{(n-2)}\frac{\varepsilon^{\cancel{n-1}}}{\cancel{\varepsilon^{n-2}}}\varepsilon \to 0.$$