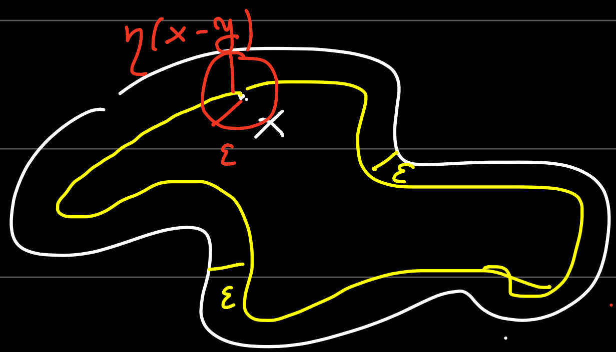
Sia $f_\varepsilon(x) =: \int_{\Omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$, dove $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$



L'integrale é ben definito.

LEMMA: Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é continua in Ω allora $\forall \varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$

Dimostrazione del lemma. Sia $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ e sia $\delta > 0$ t.c.

$d(x_0, \partial\Omega) + \delta < \varepsilon$. In questo modo $\overline{B_{\varepsilon+\delta}(x_0)} \subset \Omega$ e

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\overline{B_{\varepsilon+\delta}(x_0)}} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy \qquad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

compatto

Si può applicare il teorema di derivazione sotto segno di integrale e

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1}(x) = \int_K \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_1}(x-y) f(y)\,dy \qquad \forall x \in B_\delta(x_0)$$

Si possono eseguire tutte le derivate che desideriamo.

Dunque, dal fatto che $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ segue che $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

OSSERVAZIONE: Se $f \in C(\Omega)$ abbiamo: che $\forall\, \omega$ aperto limitato tale che $\overline{\omega} \subset \Omega$, $f_\varepsilon \to f$ uniformemente su $\overline{\omega}$.

Dimostrazione: Sia $\delta_0 = \min_{x \in \overline{\omega}} d(x, \partial\Omega)$ e sia $\delta \in (0, \delta_0)$

Consideriamo $K = \{ x \in \Omega : d(x, \overline{\omega}) \leq \frac{\delta}{2} \}$, che é a sua volta un compatto. Poiché f é continua sul compatto K, é uniformemente continua: $\forall \mu > 0\ \exists \varepsilon_\eta > 0 : |x-y| < \varepsilon_\eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \mu$.

Nel seguito, prenderemo sempre $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, in modo che se $x \in \overline{\omega}$

$$\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy = \int_{B_{\delta/2}(x) \subseteq K} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy =$$

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{B_{\delta/2}(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\big(f(y) - f(x)\big)\, dy$$

Così che se $\varepsilon < \varepsilon_\eta$

$$\sup_{x \in \overline{\omega}} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{< \mu}\, dy < \mu \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy = \eta$$

$\boxtimes$

Dimostrazione del teorema di regolarità delle funzioni armoniche

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{1}{\varepsilon^n}\,\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \left(\int_{S_r(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,d\sigma_y \right) dr =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{S_r(x)} u(y)\,d\sigma_y\,dr = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(x)\, r^{n-1}\, n\,\omega_n\,dr$$

$$= u(x)\,\frac{n\,\omega_n}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) r^{n-1}\,dr = u(x)\,.$$

In altre parole, se u gode della proprietà della media sferica e $\eta_\varepsilon = \eta(|x|)$ allora u coincide con le sue regolarizzate (se ε é sufficientemente piccolo). $\boxtimes$

OSSERVAZIONE: Se u é una funzione armonica in Ω allora lo sono tutte le sue derivate $\partial_{x_i} u$. Infatti da

$$\Delta u = 0 \Rightarrow 0 = \partial_{x_i}\Delta u = \Delta(\partial_{x_i} u).$$

Dunque se u ha la proprietà della media (superficiale o volumetrica) anche $\partial_{x_i} u$ ce l'ha.

OSSERVAZIONE: Consideriamo l'equazione (agli autovalori)

$$\boxed{\Delta u + \lambda u = 0} \qquad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Se $\lambda \geq 0$ l'equazione si riconduce a quella di Laplace.

$$v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = e^{\sqrt{\lambda}\, x_{n+1}}\, u(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = e^{\sqrt{\lambda}\, x_{n+1}}\, \Delta_{(x_1, \dots, x_n)} u(x_1, \dots, x_n) + \lambda e^{\sqrt{\lambda}\, x_{n+1}} u(x_1, \dots, x_n)$$

$$= 0.$$

Dunque $v \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, che implica la stessa proprietà per u

PROPOSIZIONE: Supponiamo di avere una successione di funzioni armoniche in Ω, $(u_k)_k$ che converge uniformemente a u in Ω. Allora

i) u é armonica

ii) $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione: Sappiamo che, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) = \fint_{B_r(x)} u_k(y)\,dy$ $\forall\ \overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Passando al limite uniforme, otteniamo la stessa proprietà della media per u. $\Rightarrow u \in C^\infty$ e $\Delta u = 0$.

TEOREMA DI LIOUVILLE: Se u è una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ limitata, allora è costante.

Dimostrazione: come già osservato anche $\partial_{x_i} u$ ha la proprietà della media volumetrica:

$$\partial_{x_i} u(x) = \fint_{B_r(x)} \partial_{x_i} u = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} (\partial_{x_i} u)(y)\,dy = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{S_r(x)} u\, \vec{e}_i \cdot \nu \, d\sigma_y$$

$$\uparrow \operatorname{div}(u \vec{e}_i)$$

Dunque,

$$|\partial_{x_i} u(x)| \le \frac{1}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \underbrace{|S_r(x)|}_{n\omega_n r^{n-1}} = \frac{n}{r} \|u\|_{L^\infty}$$

Facendo tendere $r \to \infty$ otteniamo $\partial_{x_i} u(x) = 0 \quad \forall x, \forall i$.
Quindi u è costante.

OSSERVAZIONE: C'è una versione più sofisticata del teorema che chiede solo che u sia inferiormente limitata.

DISUGUAGLIANZA DI HARNACK

TEOREMA: Supponiamo che u sia una funzione armonica non negativa in Ω. Allora, per ogni ω aperto connesso, $\overline{\omega} \subset \Omega$, esiste una costante $c = c(\omega)$ tale che

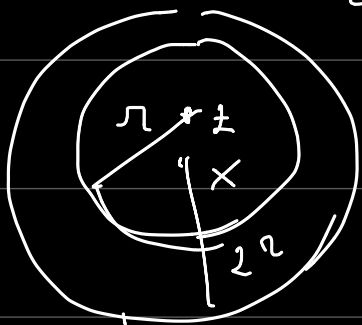
$$\sup_\omega u \le c \inf_\omega u$$

Dimostrazione: sia $4r = \inf_{x \in \omega} d(x, \partial\Omega)$ e sia $x \in \omega$

Per la proprietà della media. Se $|x-z| \leq r$ abbiamo

$$u(x) = \fint_{B_{2r}(x)} u(y)\,dy = \frac{1}{\omega_n (2r)^n} \int_{B_{2r}(x)} \overset{\geq 0}{u(y)}\,dy$$

$B_r(z) \subseteq B_{2r}(x)$



$$\geq \frac{1}{\omega_n (2r)^n} \int_{B_r(z)} u(y)\,dy = \frac{u(z)}{2^n}$$

Ora, per ogni coppia x, z in ω è possibile trovare una catena di N segmenti di lunghezza $\leq r$ che li connette. Da notare che N dipende solo da ω. Infatti possiamo estrarre una collezione di palle $\{B(x_i, 4r)\}_{i=1,..,N}$ che ricopre $\overline{\omega}$. $\boxed{}$

OSSERVAZIONE: Risulta dalla precedente dimostrazione che se u è una funzione armonica non negativa in B_{4r}, allora

$$\sup_{B_r} u \leq 2^n \inf_{B_r} u.$$

È notevole che la stima non dipenda da r.

COROLLARIO: Se u è una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ limitata inferiormente, allora è costante.

Dimostrazione: Sia $C = \inf_{\mathbb{R}^n} u$. Poniamo $v = u - C$, in modo che $v \geq 0$ e $\inf_{\mathbb{R}^n} v = 0$. Abbiamo

$$0 \leq \lim_{r\to+\infty} \sup_{B_r} v \leq \lim_{r\to+\infty} 2^n \inf_{B_r} v = 2^n \inf_{\mathbb{R}^n} v = 0$$

Quindi $\sup_{\mathbb{R}^n} v = \lim_{r\to+\infty} \sup_{B_r} v = 0$

e $v \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n$.

FUNZIONI SUB E SUPER ARMONICHE: PRINCIPIO DEL MASSIMO E DEL MINIMO

Definizione: Una funzione continua in Ω si dice

subarmonica se $u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \quad \forall\, \overline{B_r(x)} \subseteq \Omega$

superarmonica se $u(x) \geq \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy$ "

TEOREMA: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, non vuoto e sia $u \in C(\overline{\Omega})$. Allora

i) Principio del massimo. Se u é subarmonica in Ω,

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega$$

(ii) Principio del massimo forte. Se Ω é connesso, allora o u é costante, oppure

$$u(x) < \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima (ii). Sia $m = \max_{\overline{\Omega}} u$ e $M = \{x \in \Omega : u(x) = m\}$. Sia $\bar{x} \in M$: allora

$$m = u(\bar{x}) \leq \fint_{B_r(\bar{x})} u(y)\,dy \quad , \quad \forall\, \overline{B_r(x)} \subset \Omega .$$

D'altra parte, se $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$\fint_{B_r(\bar{x})} u(y)\,dy \leq \frac{1}{|B_r(\bar{x})|}\, m\,|B_r(x)| = m$$

Quindi $u|_{B_r(\bar{x})} \equiv m$. In questo modo abbiamo dimostrato che M é aperto in Ω. Poiché é anche chiuso (u é continua) e Ω é connesso concludiamo che o $M = \emptyset$ oppure $M = \Omega$.

i) ovviamente abbiamo $\quad \sup_{\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$

Se mai ci fosse $\bar{x} \in \Omega$ t.c. $u(\bar{x}) > \max_{\partial\Omega} u$, detta ω la componente connessa di Ω contenente $\bar{x}$ abbiamo, per il punto i)

$$\max_{\overline{\omega}} u = \max_{\partial\omega} u \geq u(\bar{x}) > \max_{\partial\Omega} u \quad , \quad \text{assurdo.}$$

In modo del tutto analogo abbiamo il principio del minimo per le funzioni superarmoniche:

TEOREMA: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, non vuoto e sia $u \in C(\overline{\Omega})$. Allora

i) Principio del minimo - Se u é superarmonica in Ω,

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u \qquad \forall x \in \Omega$$

(ii) Principio del minimo forte - Se Ω é connesso, allora o u é costante, oppure

$$u(x) > \min_{\partial\Omega} u \qquad \forall x \in \Omega$$

Unendo i due enunciati abbiamo il seguente corollario

COROLLARIO: Se $u \in C(\overline{\Omega})$ é armonica in Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$ non vuoto e limitato, allora

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall x \in \Omega$$

Se inoltre Ω é connesso, allora o u é costante oppure

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall x \in \Omega .$$

COROLLARIO: [Unicità per il problema di Dirichlet non omogeneo.] Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Supponiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sia aperto e limitato, allora se esiste una soluzione $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ del problema, questa é unica.

Dimostrazione: Supponiamo che u_1 e u_2 risolvano lo stesso problema e sia $u = u_1 - u_2$. u risolve

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

essendo di classe $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Il teorema precedente implica $\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega. \Rightarrow u(x) = 0 \quad \forall x$

OSSERVAZIONE: Se Ω non é limitato, il principio del massimo non é valido. Per esempio, se $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ consideriamo $u(x) = x_1$. È una funzione armonica che si annulla su $\partial\Omega = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ ma non

è vero che $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u = 0$.

TEOREMA: Sia Ω un dominio aperto, connesso e limitato in $\mathbb{R}^n$
e sia $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

(i) se $-\Delta u \geq 0$ e u non è costante $\Rightarrow u(x) > \min_{\partial\Omega} u$
$\forall x \in \Omega$

ii) se $-\Delta u \leq 0$ in Ω e u non è costante $\Rightarrow u(x) < \max_{\partial\Omega} u$
$\forall x \in \Omega$.

Dimostrazione: abbiamo già osservato che se $\Delta u \geq 0$ allora
u è subarmonica e se $\Delta u \leq 0$ allora u è superarmonica

OSSERVAZIONE: Il principio del massimo (e del minimo)
si possono anche derivare da quello per le soluzioni dell'equazione
del calore.

OSSERVAZIONE (relazione con il principio del massimo
modulo per le funzioni olomorfe). Se u e v sono due
funzioni armoniche allora $w(x) = \sqrt{u^2 + v^2}$ è una

funzione subarmonica:

$$\nabla w = \frac{2(u\nabla u + v\nabla v)}{2\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u\nabla u + v\nabla v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\mathrm{div}(\nabla w) = \frac{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{|u\nabla u+v\nabla v|^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{u^2|\nabla u|^2+v^2|\nabla v|^2+2uv\,\nabla u\cdot\nabla v}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(u^2+v^2)(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2) - (u^2|\nabla u|^2+v^2|\nabla v|^2+2uv\,\nabla u\cdot\nabla v|}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\cancel{u^2|\nabla u|^2} + u^2|\nabla v|^2 + v^2|\nabla u|^2 + \cancel{v^2|\nabla v|^2} - (\cancel{u^2|\nabla u|^2} + \cancel{v^2|\nabla v|^2} + 2uv\,\nabla u\cdot\nabla v|}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(v\nabla u - u\nabla v|^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} \geq 0$$

Quindi $\sqrt{u^2+v^2} = |f|$ é una funzione subarmonica e si può applicare il principio del massimo per le subarmoniche per ottenere il principio del massimo modulo per le funzioni olomorfe.