IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER IL LAPLACIANO

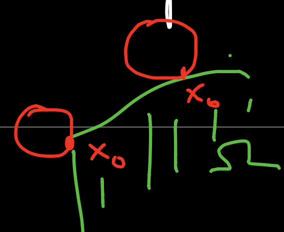
Si tratta del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Dove f e g sono funzioni assegnate. Se $f = 0$, il problema corrispondente consiste nel trovare un'estensione armonica per la funzione g. Sono di rilievo le ipotesi di regolarità sui dati f, g e sul dominio Ω, e le richieste sulla regolarità della soluzione.

Abbiamo già osservato che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é un aperto limitato allora il problema ammette al più una soluzione. La questione principale é dunque quella esistenziale.

Definizione: diciamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato ha la proprietà della sfera esterna se $\forall x_0 \in \partial\Omega$, esiste una palla $B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, tale che $\{x_0\} = \overline{\Omega} \cap \overline{B_r(y_0)}$.



Vale il seguente risultato (che non dimostreremo)

TEOREMA: Supponiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato abbia le proprietà della sfera esterna. Allora, per ogni $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$, il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Ha un'unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Abbiamo anche visto il seguente teorema:

TEOREMA: Se $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ allora, considerata la convoluzione

$$\overline{u}_f(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y)\, dy$$

é di classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e risolve $-\Delta \overline{u}_f = f$ in Ω.

Qui $\Gamma(x) = \Gamma_n(x)$ é la soluzione fondamentale (funzione di Green) del laplaciano che abbiamo studiato a suo tempo.

$$\Gamma_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{se } n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

La traccia $\bar{u}_f|_{\partial\Omega}$ dipende ovviamente da f, Γ e Ω.

La funzione $\bar{u}_f$ permette di ricondurre il problema generale a quello dell'estensione armonica, cioè

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = g - \bar{u}_f & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

infatti, $u = v + \bar{u}_f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ risolve

$-\Delta u = f$ in Ω e $u|_{\partial\Omega} = g - \bar{u}_f|_{\partial\Omega} + \bar{u}_f|_{\partial\Omega} = g$.

Ci concentriamo quindi sul problema dell'estensione armonica e vediamo il caso particolare seguente.

ESTENSIONI ARMONICHE SUL DISCO BIDIMENSIONALE

Data una funzione g definita sulla circonferenza unitaria, vogliamo trovarne un'estensione armonica.

Utilizziamo le coordinate polari e la separazione di variabili.

Poniamo $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Sappiamo che

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta) = v_{rr} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0$$

Cerchiamo soluzioni fattorizzate:

$$v(r,\theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$$

$$v_{rr} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = \varphi''(r)\psi(\theta) + \frac{\varphi'(r)}{r}\psi(\theta) + \frac{\varphi(r)}{r^2}\psi''(\theta) = 0$$

$\forall\ 0 \leq r < 1$, $\forall\ \theta \in [0, 2\pi]$. Otteniamo:

$$\frac{r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda = \text{costante}$$

Guardiamo l'equazione $\quad -\psi'' = \lambda\psi \quad$ su $[0, 2\pi]$

a cui associamo condizioni periodiche: $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$.

La periodicità implica che $\lambda = k^2$, con $k \in \mathbb{N}$, e

$\psi(\theta) = A\cos k\theta + B\sin k\theta$.

Con questa informazione possiamo risolvere l'equazione

in φ: $\quad r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - k^2\varphi(r) = 0$. L'equazion

Per risolverla, poniamo $\mu(t) = \varphi(e^t) \qquad r = e^t \quad t = \log r$

$$\mu' = e^t \varphi'(e^t) \qquad \mu'' = e^t \varphi'(e^t) + e^{2t}\varphi''(e^t) = k^2 \mu(t)$$

Quindi otteniamo

(i) se $k=0$ $\quad \mu(t) = at + b \quad \Rightarrow \varphi(r) = a \log r + b$

(ii) se $k \neq 0$ $\quad \mu(t) = ae^{kt} + be^{-kt} \Rightarrow \varphi(r) = a r^k + b r^{-k}$.

Cerchiamo soluzioni continue, per cui escludiamo il logaritmo e le potenze negative. In definitiva troviamo

$$a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \sin(k\theta) \qquad k \geq 0$$

Abbiamo risolto il problema dell'estensione armonica per le armoniche fondamentali.

Consideriamo il dato al bordo $g: S^1 \to \mathbb{R}$ e poniamo $\varphi(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta)$. Si tratta di una funzione 2π-periodica. Scriviamo φ in serie di Fourier

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$$

dove

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta \quad , \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\, \varphi(\theta)\, d\theta$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\varphi(\theta)\,d\theta$$

Formalmente, l'estensione armonica di g si scrive, usando le coordinate polari, come

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos n\theta + \beta_n r^n \sin n\theta$$

ESEMPIO: $g(x,y) = x^2$

$$\varphi(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,;$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos^2\theta\,d\theta =$$

$$\cos^2\theta = \cos 2\theta + \sin^2 t = \cos 2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$\int \cos n\theta \cos^2\theta\,d\theta = \int \cos n\theta \cos 2\theta\,d\theta + \int \cos n\theta \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \cos n\theta \cos 2\theta\,d\theta + \int \cos n\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int \cos n\theta \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int \cos n\theta \cos 2\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int \cos n\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\pi}\,\delta_{n,2} = \frac{1}{2}\,\delta_{n,2}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos^2\theta \, d\theta = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \quad v(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta$$

In questo esempio la serie di Fourier é finita e non si pongono problemi di convergenza. Altrimenti possiamo avvalerci dai seguenti risultati, del tutto analoghi a quelli già visti per l'equazione del calore (lezione del 15 aprile: confrontare)

Consideriamo una serie

$$(*) \quad v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos n\theta + \beta_n r^n \sin n\theta$$

LEMMA (i) Se le successioni $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ sono limitate, allora la serie $(*)$ converge in $[0,1)\times[0,2\pi]$. Inoltre converge uniformemente in $[0,R]\times[0,2\pi]$ per ogni $R<1$ e, detta $u(x,y) = v(r,\theta)$ con $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, u é armonica nel disco unitario.

(ii) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| + |\beta_n| < +\infty$ allora la serie converge uniformemente in $[0,1]\times[0,2\pi]$.

Dimostrazione: i) Abbiamo $|\alpha_n|+|\beta_n|\leq C \quad \forall n\geq 0$

Se $r\leq R<1$ abbiamo pertanto

$$|r^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)| \leq R^n C$$

Per il criterio di convergenza di Weierstrass deduciamo la convergenza uniforme della serie. In particolare, la somma della serie é una funzione continua. Ora dimostriamo che é una funzione armonica. A questo fine, poniamo

$$v_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n r^n \cos n\theta + \beta_n r^n \sin n\theta$$

e $u_N(x,y) = v_N(r,\theta)$ dove $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

In questo modo, $u_N \to u$ uniformemente. Per dimostrare l'armonicità del limite, utilizziamo la proprietà della media, osservando che questa passa al limite rispetto alla convergenza uniforme

$$u_N(x) = \fint_{B_r(x)} u_N(y)dy$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)dy$$

ii) Se sappiamo che $\sum_n |\alpha_n| + |\beta_n| < +\infty$, allora possiamo usare il test di Weierstrass per la convergenza uniforme su $[0,1]\times[0,2\pi]$

$\boxtimes$

Vogliamo trovare delle condizioni sul dato al bordo che assicurino che, nel suo sviluppo in serie di Fourier, i coefficienti $(\alpha_n), (\beta_n)$ siano assolutamente sommabili.

Sia $\varphi(\theta) = g(\cos\theta, \sin\theta)$ e siano

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\varphi(\theta)\,d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\varphi(\theta)\,d\theta$$

TEOREMA: Supponiamo che $\varphi(\theta)$ sia di classe $C^1([0,2\pi])$ e che α_n, β_n siano i suoi coefficienti di Fourier.

Detta $v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos n\theta + \beta_n r^n \sin n\theta$ e

$u(x,y) = v(r,\theta)$ se $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, abbiamo che

che $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ e soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = g & \text{su } \partial D \end{cases}$$

Dimostrazione: Consideriamo i coefficienti di Fourier di $\varphi'(\theta)$, (γ_n, δ_n). Con una semplice integrazione per parti troviamo (rivedere la lezione del 15 aprile!)

$$\delta_n = -n\alpha_n \qquad n \geq 1$$

$$\gamma_n = n\beta_n \qquad n \geq 1$$

Segue dalla diseguaglianza di Bessel che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(\alpha_n^2+\beta_n^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n^2+\gamma_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi'(\theta))^2\, d\theta$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|+|\beta_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, n\left[|\alpha_n|+|\beta_n|\right]$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\right)\right)^{1/2} < +\infty.$$

Infine, per l'identità di Bessel φ coincide con la somma della sua serie di Fourier. ☑

Nei fatti abbiamo dimostrato il seguente teorema

TEOREMA: Se g é di classe $C^1(\partial D)$ allora il problema

dell'estensione armonica é risolubile in D.