LA FUNZIONE DI GREEN PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET SU DOMINI LIMITATI

Consideriamo un dominio limitato Ω. La funzione di Green relativa a Ω con polo in $x \in \Omega$ è (se esiste) la soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta_y \mathcal{G}^x = \delta_x & \text{in } \Omega \\ \mathcal{G}^x(y) = 0 & \text{se } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

$\Gamma(x-y)$

<u>OSSERVAZIONE</u>: Immaginiamo che $\mathcal{G}^x$ abbia una singolarità per $y \to x$. Scriviamo $\mathcal{G}^x(y) = G^x(y) - \Phi^x(y)$, dove $G^x(y) = \Gamma(x-y)$ è la funzione di Green in $\mathbb{R}^n$ e $\Phi^x(y)$ risolve

$$\boxed{(*) \quad \begin{cases} -\Delta_y \Phi^x = 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi^x(y) = G^x(y) & y \in \partial\Omega \end{cases}}$$

<u>Definizione</u>: Se, per ogni $x \in \Omega$ esiste una funzione $\Phi^x \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluzione del problema $(*)$, diciamo che il dominio Ω ammette una <u>funzione di Green</u> per il problema di Dirichlet relativo al laplaciano. La funzione

di Green è allora definita come $G^x(y) = \Gamma^x(y) - \Phi^x(y)$.

(*) viene detto problema correttore.

OSSERVAZIONE: L'esistenza della funzione di Green è una proprietà del dominio Ω. Se Ω ha la proprietà della sfera esterna va bene. In particolare, se $\partial\Omega \in C^1$

OSSERVAZIONE: La funzione di Green è sempre simmetrica: $G^x(y) = G^y(x)$. Possiamo vederlo come segue

$$\Phi(x,y) \text{ sia la soluzione di } -\Delta_{(x,y)}\Phi(x,y) = 0 \text{ in } \Omega\times\Omega.$$

$$\Phi(x,y) = \Gamma(x-y) \text{ se } (x,y) \in \partial(\Omega\times\Omega) = (\partial\Omega\times\Omega)\cup(\Omega\times\partial\Omega)$$

Poiché $\Gamma(x-y) = \Gamma(y-x)$ abbiamo $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$ $\forall (x,y)$

Questo implica che $\Delta_x\Phi(x,y) = \Delta_y\Phi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega\times\Omega$.

Perciò $\Delta_x\Phi(x,y) = \Delta_y\Phi(x,y) = 0$ e quindi, di nuovo per il teorema di unicità per il problema di Dirichlet,

$$\Phi(x,y) = \Phi^x(y) = \Phi^y(x).$$

Ugualmente si deduce che $\Phi(x,y)$ è una funzione continua in $(x,y) \in \overline{\Omega\times\Omega}$. È C^∞ in $\Omega\times\Omega$.

FORMULA DI STOKES CON LA FUNZIONE DI GREEN

TEOREMA: Sia Ω un dominio limitato con frontiera regolare e sia $g \in C(\partial\Omega)$. Allora, se u é l'estensione armonica di g si ha

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G^x}{\partial \nu} d\sigma_y \qquad \forall x \in \Omega .$$

Dimostrazione: ripercorrere esattamente gli stessi argomenti utilizzati per dimostrare la formula di Stokes con $\Gamma(x-y)$, ricordando che $\Delta u = 0$ e che $G^x(y) = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega$.

OSSERVAZIONE: Data $g \in C(\partial\Omega)$ sia $u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) d\sigma_y$ usando iterativamente il teorema di derivazione sotto segno di integrale, otteniamo che $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω.

Dobbiamo infine dimostrare che

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \in \partial\Omega \\ x \in \Omega}} u(x) = g(\bar{x}) \qquad \forall \bar{x} \in \partial\Omega$$

Questo é un passaggio piuttosto delicato, che non vedremo se non in qualche caso particolare $\boxtimes$

INTERPRETAZIONE PROBABILISTICA E MISURA ARMONICA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, e sia $X(t)$ la posizione di una particella Browniana con partenza in $x \in \Omega$. Introduciamo il tempo $\tau = \tau(x)$ di primo uscita da Ω:

$$\tau(x) = \inf \{ t \geq 0 : X(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \}$$

LEMMA: Per ogni $x \in \Omega$, $P\{ \tau(x) < +\infty \} = 1$, cioè la particella esce da Ω quasi sicuramente.

Definizione: dato $F \subseteq \partial\Omega$ (Boreliano), definiamo la probabilità di fuga da Ω attraverso F:

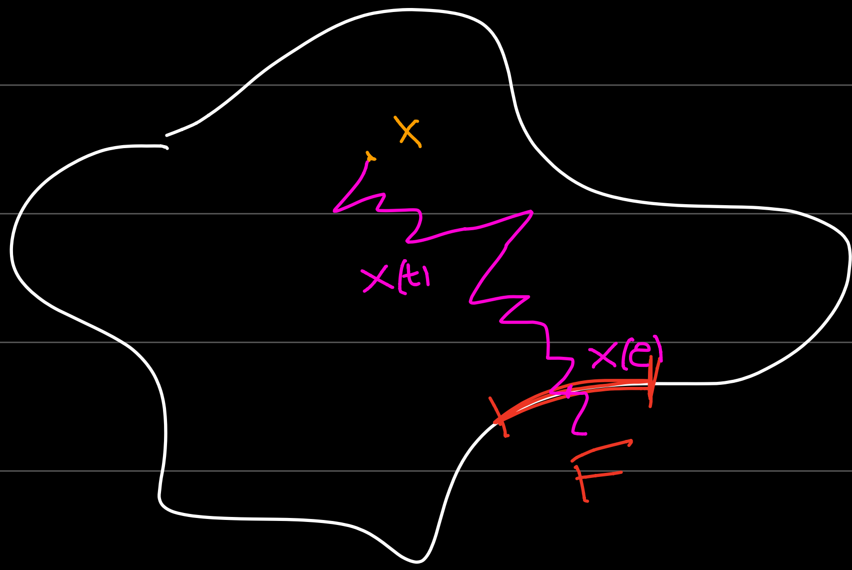
$$P(x, \tau, F) = P\{ X(\tau(x)) \in F \}$$

Per ogni $x \in \Omega$ ho una misura di probabilità su $\partial\Omega$.

Infatti, per il Lemma $P\{ X(\tau(x)) \in \partial\Omega \} = 1$

TEOREMA: Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio regolare e sia $g \in C(\partial\Omega)$. L'unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema dell'estensione armonica per g è data dalla formula seguente:

$$\boxed{u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\, P(x, \tau(x), d\sigma) = E^x[g(X(\tau))]}$$



dunque, se $g = \mathbb{1}_F$, la sua estensione armonica $u_F(x)$ rappresenta la probabilità che la particella browniana parta da $x \in \Omega$ e fugga da Ω attraverso F.

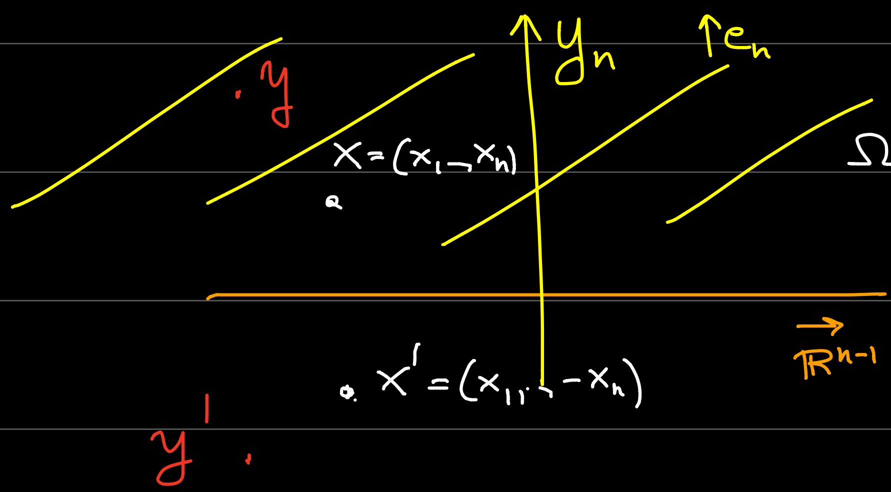
In questo modo definisco, a $x \in \Omega$ fissato, una misura, detta misura armonica in x del dominio Ω. Essa misura l'effetto in x della variazione unitaria del dato sulla porzione F di frontiera. In generale non c'è un'espressione esplicita per la misura armonica. Tuttavia, la formula di Stokes permette di calcolare la sua densità rispetto alla misura superficiale di $\partial\Omega$:

$$P(x, \tau(x), d\sigma) = -\frac{\partial G^x}{\partial \nu}\, d\sigma,$$ dove G^x è la funzione di Green di Ω in x.

CALCOLO DELLA FUNZIONE DI GREEN PER IL SEMISPAZIO

Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} -\Delta_y G^x(y) = \delta_x & \text{se } y_n > 0 \\ G^x(y) = 0 & \text{se } y_n = 0 \end{cases}$$



$\Omega = \{ y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0 \}$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$y' = (y_1, \dots, -y_n)$

$$G^x(y) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x'-y) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x-y')$$

Infatti abbiamo $y = y'$ su $\partial\Omega = \{ y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0 \}$, dunque $G^x(y) = 0$ su $\partial\Omega$. Inoltre $-\Delta G^x(y) = \delta_x - \delta_{x'} = \delta_x$ su Ω.

$$\frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y) = -\nabla G^x(y) \cdot \vec{e}_n = +\frac{1}{n\omega_n}\left[\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{y-x'}{|y-x'|^n} \right] \cdot \vec{e}_n$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}\left[\frac{(y_n - x_n)}{|y-x|^n} - \frac{(y_n - x'_n)}{|y-x'|^n} \right] \qquad x'_n = -x_n$$

per $y_n = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n\omega_n}\left[-\dfrac{2x_n}{|y-x|^n} \right]$

$$u(x) = \frac{2}{n\omega_n} x_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|y-x|^n} dy_1 \cdots dy_{n-1}$$

La formula è valida, per esempio, se g ha supporto compatto ma è valida anche se g è una funzione limitata.

La parte più delicata è nella dimostrazione che

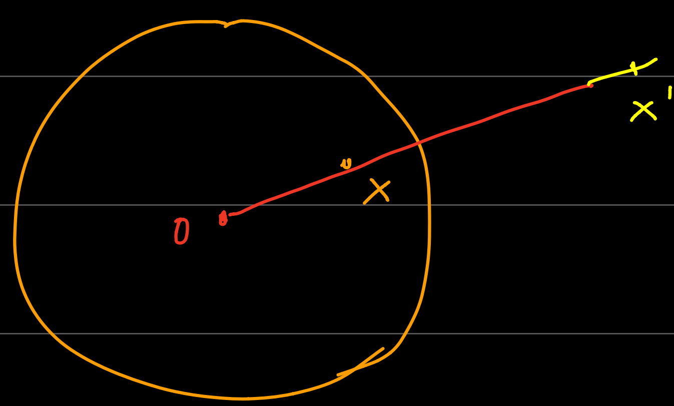
$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x_n > 0}} u(x) = g(\bar{x}) \qquad \text{se } \bar{x}_n = 0 .$$

Abbiamo

$$u(\bar{x}) = \frac{2}{n\omega_n} x_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(\bar{x}+y)}{(|y|^2+x_n^2)^{n/2}} dy_1 \cdots dy_{n-1} = \frac{2}{n\omega_n} \int \frac{g(\bar{x}+x_n z)}{(|z|^2+1)^{n/2}} dz$$

avendo posto $\frac{y}{x_n} = z \in \mathbb{R}^{n-1}$.

CALCOLO DELLA FUNZIONE DI GREEN PER LA PALLA UNITARIA



Dato $x \in B$, riusciamo a trovare x' tale che

$$\Gamma(x-y) = a\Gamma(x'-y) + b \quad \forall y \in \partial B_1 \; ?$$

Si tratta di studiare gli insiemi del tipo

$$S(a,b,\lambda) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \frac{|y-a|}{|y-b|} = \lambda \right\}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$.

LEMMA: (cerchio di Apollonio) Dati $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq b$, l'insieme $S(a,b,\lambda)$ é un iperpiano se $\lambda = 1$ e una sfera se $\lambda \neq 1$. Più precisamente, se $\lambda \neq 1$ si ha

$$S(a,b,\lambda) = \{ x : |x - x_0| = r \}$$

$$\text{dove} \quad x_0 = \frac{\lambda^2 b - a}{\lambda^2 - 1}, \quad r = \frac{\lambda |a-b|}{|\lambda^2 - 1|}.$$

Dimostrazione del lemma

$$|y-a|^2 = \lambda^2 |y-b|^2 \iff |y|^2 - 2y \cdot a + |a|^2 = \lambda^2 |y|^2 - 2\lambda^2 y \cdot b + \lambda^2 |b|^2$$

(i) se $\lambda = 1 \Rightarrow y \cdot (b-a) = \frac{1}{2}(|b|^2 - |a|^2)$ é un iperpiano.

(ii) se $\lambda \neq 1$ (supponiamo per esempio $\lambda > 1$) allora

$$(\lambda^2 - 1)|y|^2 - 2y \cdot (\lambda^2 b - a) + \lambda^2 |b|^2 - |a|^2 = 0$$

$$0 = |y|^2 - 2y \cdot \frac{(\lambda^2 b - a)}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda^2 |b|^2 - |a|^2}{\lambda^2 - 1} =$$

$$= \left| y - \frac{\lambda^2 b - a}{\lambda^2 - 1} \right|^2 - \frac{|\lambda^2 b - a|^2}{(\lambda^2 - 1)^2} + \frac{\lambda^2 |b|^2 - |a|^2}{\lambda^2 - 1}$$

$$= |y - x_0|^2 - r^2$$

dove $x_0 = \dfrac{\lambda^2 b - a}{\lambda^2 - 1}$ e

$$r^2 = \frac{|\lambda^2 b - a|^2}{(\lambda^2-1)^2} - \frac{\lambda^2 |b|^2 - |a|^2}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda^4 |b|^2 - 2\lambda^2 a\cdot b + |a|^2 - \lambda^4 |b|^2 + \lambda^2 |a|^2 + \lambda^2 |b|^2 - |a|^2}{(\lambda^2-1)^2}$$

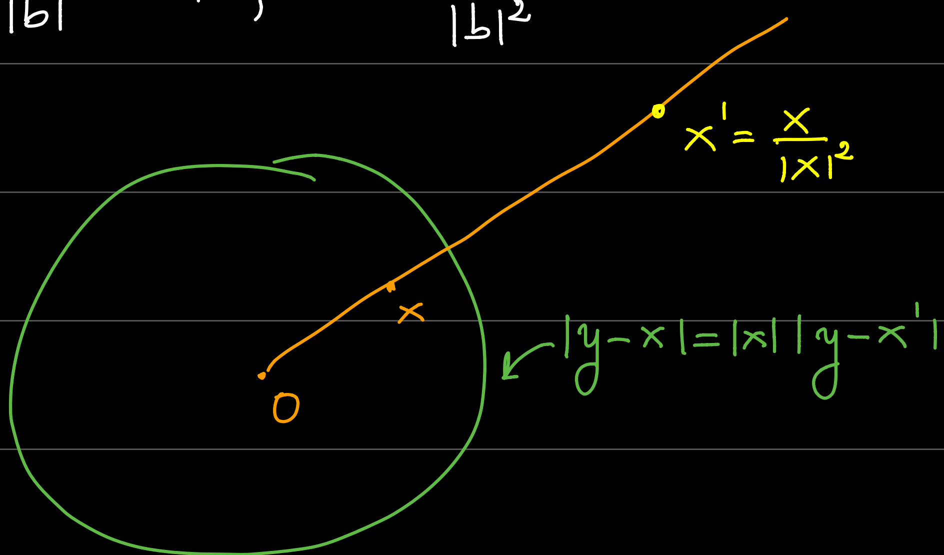
$$= \frac{\lambda^2 |b|^2 - 2\lambda^2 a\cdot b + \lambda^2 |a|^2}{(\lambda^2-1)^2} = \frac{\lambda^2 |b-a|^2}{(\lambda^2-1)^2}.$$

Dato $b \in B_1$, vogliamo trovare a e λ t.c. $x_0 = 0$ e $r = 1$.

$$x_0 = 0 \Rightarrow \lambda^2 b = a \qquad \lambda^2 |b| = |a|$$

$$r^2 = \frac{\lambda^2 |b - \lambda^2 b|^2}{(\lambda^2-1)^2} = \frac{\lambda^2 |b|^2 (\lambda^2-1)^2}{(\lambda^2-1)^2} = 1$$

Da cui $\lambda = \dfrac{1}{|b|} = |a|$, $a = \dfrac{b}{|b|^2}$



Possiamo quindi ricavare l'estensione armonica in B_1 di $\Gamma(x-y)$: infatti, se $n=2 \Rightarrow \Gamma(x-y) = -\frac{1}{4\pi}\log|x-y| = -\frac{1}{4\pi}\log(|x|\,|x'-y|)$

$= -\frac{1}{4\pi}\log(|x'-y|) - \frac{1}{4\pi}\log|x| = \Phi^x(y)$

se $n \geq 3 \Rightarrow \Gamma(x-y) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}} =$

$= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}|x'-y|^{n-2}} \qquad = \Phi^x(y)$

Quindi

$n=2 \Rightarrow \quad G^x(y) = \Gamma(x-y) - \Phi^x(y) =$

$-\frac{1}{4\pi}\log|x-y| + \frac{1}{4\pi}\log|x| + \frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{x}{|x|^2}-y\right|$

$n \geq 3 \Rightarrow \quad G^x(y) = \Gamma(x-y) - \frac{1}{|x|^{n-2}}\Gamma\left(\frac{x}{|x|^2}-y\right)$

Dobbiamo calcolare la derivata normale sul bordo della palla. In effetti, $\forall\, n \geq 2$, $\nabla\Gamma(z) = \frac{-1}{n\omega_n}\frac{z}{|z|^n}$

pertanto, ricordato che $\nu = \frac{y}{|y|}$

$\frac{\partial G^x(y)}{\partial \nu} = \nabla G^x(y)\cdot\nu = \frac{-1}{n\omega_n}\left[\frac{y-x}{|y-x|^n} - \frac{1}{|x|^{n-2}}\frac{y-\frac{x}{|x|^2}}{\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|^n}\right]\cdot y$

$= \frac{-1}{n\omega_n}\left[\frac{|y|^2 - x\cdot y}{|y-x|^n} - \frac{1}{|x|^{n-2}}\frac{|y|^2 - \frac{x\cdot y}{|x|^2}}{\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|^n}\right]$

$$\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|^2 = |y|^2 - \frac{2x\cdot y}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} = \frac{|x|^2|y|^2 - 2x\cdot y + 1}{|x|^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{|y|^2 - \frac{x\cdot y}{|x|^2}}{\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|^n} = \frac{|x|^2|y|^2 - x\cdot y}{\left(|x|^2|y|^2 - 2x\cdot y + 1\right)^{n/2}}$$

ma $|y|=1 \Longrightarrow \; = \dfrac{x\cdot(x-y)}{|x-y|^n}$

$$\frac{\partial G^x(y)}{\partial \nu} = \frac{-1}{n\omega_n}\left[\frac{|y|^2 - x\cdot y - |x|^2 + x\cdot y}{|x-y|^n}\right] = -\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

La funzione $k(x,y) = \dfrac{1}{n\omega_n}\dfrac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ prende il nome di nucleo di Poisson.

TEOREMA: Per ogni $g\in C(\partial B)$ la funzione $u: B\to\mathbb{R}$ definita da

$$u(x) = \int_{\partial B} k(x,y)\, g(y)\, d\sigma_y$$

é di classe $C^2(B)\cap C(\overline{B})$, é armonica in B e risulta

$$\lim_{\substack{x\to\overline{x}\\ x\in B}} u(x) = g(\overline{x}), \quad \forall\, \overline{x}\in\partial B.$$

Dimostrazione: 1 passo) Per esercizio, verificare che

che $\Delta_x K(x,y) = 0 \quad \forall x \in B_1, \; \forall y \in \partial B_1$, avendo
fissato

osservato che il denominatore non si annulla mai.

Notiamo anche che K è di classe C^∞ nella variabile $x \in B_1$ se $|y| = 1$. Possiamo quindi applicare ripetutamente il teorema di derivazione sotto segno di integrale e dedurre che anche $u \in C^\infty(B_1)$, inoltre

$$\Delta_x u(x) = \int_{\partial B} \Delta_x K(x,y)\, g(y)\, d\sigma_y = 0$$

Dimostriamo ora che è verificata la condizione al contorno. A questo fine osserviamo preliminarmente che

$$\forall x \in B_1 \qquad \int_{\partial B} K(x,y)\, d\sigma_y = 1$$

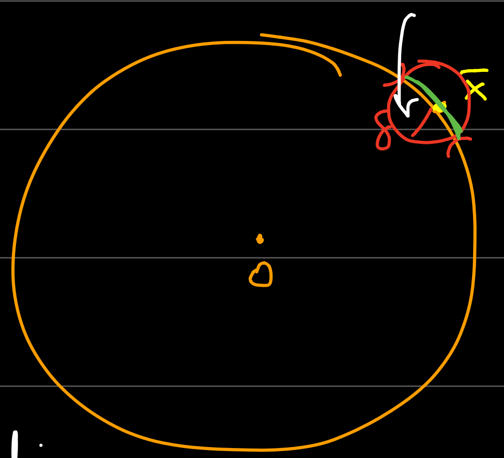
Infatti, sappiamo che $u \equiv 1$ è la soluzione del problema con $g \equiv 1$. Dunque la formula di Stokes ci fornisce

$$1 = -\int_{\partial B_1} \frac{\partial G^x}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y = \int_{\partial B_1} K(x,y)\, d\sigma_y$$

Ora consideriamo, per $\delta > 0$ assegnato,

$$u(x) - g(\bar{x}) = \int_{\partial B_1} K(x,y)\big(g(y) - g(\bar{x})\big)\, d\sigma_y$$

$$= \int_{\partial B_1 \cap \{|y-\bar{x}|<\delta\}} k(x,y)\big(g(y)-g(\bar{x})\big)\, d\sigma_y + \int_{\partial B_1 \cap \{|y-\bar{x}|\geq\delta\}} k(x,y)\big(g(y)-g(\bar{x})\big)\, d\sigma_y$$



Per la continuità di g,

Fissato $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ t.c. $|y-\bar{x}|<\delta \Rightarrow |g(y)-g(\bar{x})|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial B_1 \cap \{|y-\bar{x}|<\delta\}} k(x,y)\big(g(y)-g(\bar{x})\big)\, d\sigma_y \right| < \varepsilon$$

Vogliamo controllare l'integrale sulla parte arancione: se $|x-\bar{x}|<\frac{\delta}{2}$

$$\delta \leq |y-\bar{x}| \leq |y-x| + |x-\bar{x}| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |y-x| \geq \frac{\delta}{2}$$

e $k(x,y) \leq \frac{2^n}{n\omega_n} \frac{(1-|x|^2)}{\delta^n}$. Quindi

$$\left| \int_{\partial B_1 \cap \{|y-\bar{x}|\geq\delta\}} k(x,y)\big(g(y)-g(\bar{x})\big)\, d\sigma_y \right| \leq 2\|g\|_\infty \frac{2^n}{n\omega_n \delta^n} (1-|x|^2)\, n\omega_n$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\delta^n} \|g\|_\infty (1-|x|^2)$$

Quindi, se $x \to \bar{x}$, $|x|^2 \to 1$ e anche il secondo integrale tende a zero. $\square$

OSSERVAZIONE: Per domini generici non è possibile determinare l'espressione esatta del nucleo di Poisson.
Tuttavia si può dimostrare che questo esiste se la frontiera $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare.

Per domini generici, se vogliamo risolvere il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

possiamo cercare di avvalerci del principio di Dirichlet, che consiste nella minimizzazione di

$$E(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)\right] dx$$

fra le funzioni $u \in X = \{ v \in C^1(\bar{\Omega}) : v = g \text{ su } \partial\Omega \}$.

$\rightarrow$ Il minimo è raggiunto?

$\rightarrow$ È una funzione di classe C^2?