Note delle lezioni di Metodi variazionali

Prima parte: alcuni problemi di Calcolo delle Variazioni

Paolo Caldiroli

25 marzo 2019

1 Note storiche

Il Calcolo delle Variazioni è una branca classica della matematica. tuttora campo di feconda ricerca. Tratta di argomenti alcuni dei quali affrontati già dai matematici dell'antichità (ad esempio, i problemi isoperimetrici, studiati da Zenodoro e Archimede nel periodo ellenistico e poi da Pappo nel periodo tardo imperiale). Nella sua accezione moderna viene fatto partire col problema della brachistòcrona, già noto a Galileo che ne congetturò una prima soluzione nel 1638, rivelatasi però errata. Poi riproposto da Johann Bernoulli nel 1696 come problema test per verificare efficacia e portata del calcolo infinitesimale (sviluppato da Newton e Leibniz), il problema della brachistocrona fu risolto nel 1697 indipendentemente da diversi matematici dell'epoca, tra cui Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, tutti annoverabili tra i padri fondatori del Calcolo delle Variazioni, assieme a Eulero, studente di Johann Bernoulli.

In realtà nel XVII secolo, ancora prima del problema della brachistocrona, vennero formulati altri due problemi di Calcolo delle Variazioni: un problema di Newton sulla ricerca della superficie di rivoluzione di un corpo che si muove in un fluido offrendo la minima resistenza e, ancor prima, il principio di Fermat in ottica geometrica sulla traiettoria che compie un raggio luminoso in un mezzo con indice di rifrazione non costante (1662, prima trattazione moderna di un problema variazionale).

La prima monografia in cui si parla chiaramente di Calcolo delle Variazioni è dovuta a Eulero nel 1744. Nello stesso anno Maupertuis espose il principio di minima azione, generalizzando il principio di Fermat. Ulteriori importanti contributi allo sviluppo del Calcolo delle Variazioni furono forniti da Lagrange, Hamilton, Jacobi, etc.

Di fatto, per arrivare alla risoluzione di molti problemi del Calcolo delle Variazioni occorre attendere il XX secolo, avendo a disposizione gli strumenti di teoria dell'integrazione e dell'analisi funzionale elaborati da Tonelli, Hilbert e Lebesgue.

2 Alcuni esempi significativi

I problemi del Calcolo delle Variazioni sono accomunati e si caratterizzano per la seguente formulazione. Dati una classe X di oggetti ammissibili e un'applicazione $F\colon X \to \mathbb{R}$ inferiormente limitata, studiare il "problema di minimo"

$$\inf_X F$$

cioè studiare esistenza ed eventuale unicità del punto di minimo.

Definizione 2.1. *Un elemento $u \in X$ è punto di minimo di F in X se $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in X$. Una successione minimizzante per F in X è una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che $F(u_n) \to \inf_X F$.*

Tipicamente X è una classe di funzioni u definite in un aperto non vuoto Ω di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^k$ soddisfacenti certi requisiti e l'applicazione F è un funzionale della forma

$$F(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$$

dove Du denota la matrice delle derivate parziali del prim'ordine di u.

Esempio 2.2 (Problema delle geodetiche)**.** *Fissata una superficie in $\mathbf{R}^3$ o, più in generale, una varietà riemanniana finito-dimensionale M e fissati due punti $p, q \in M$, studiare l'esistenza di una curva di minima lunghezza tra tutte quelle contenute in M che congiungono p con q. In tal caso $X = \{\gamma \in C^1([0,1], M) \mid \gamma(0) = p\,,\ \ \gamma(1) = q\}$ e*

$$F(\gamma) = \int_0^1 \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}^{\frac{1}{2}}\, dt$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è la metrica riemanniana di cui è munita la varietà M.

Esempio 2.3 (Problema di Plateau)**.** *Fissata una curva chiusa e semplice Γ nello spazio euclideo 3-dimensionale, studiare l'esistenza di una superficie di area minima tra tutte quelle che hanno Γ come bordo. In tal caso, detto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ il disco unitario aperto 2-dimensionale, si prende $X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid u|_{\partial\Omega}$ parametrizzazione di $\Gamma\}$ e*

$$F(u) = \int_\Omega |u_x \wedge u_y|\, dx\, dy\,.$$

Non sempre l'insieme di minimizzazione è costituito da funzioni, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.4 (Disuguaglianza isoperimetrica)**.** *Fissata una costante $\alpha > 0$ trovare il dominio 3-dimensionale di massimo volume tra tutti quelli la cui frontiera ha area α. Ciò equivale a trovare il dominio con bordo di area minima tra quelli di volume fissato fissato. In generale, in dimensione n, si ha che*

$$\frac{|\partial\Omega|^n}{|\Omega|^{n-1}} \geq \frac{|\partial B|^n}{|B|^{n-1}} \quad \forall \Omega \text{ dominio limitato regolare di } \mathbb{R}^n$$

dove $|\Omega|$ denota il volume n-dimensionale di Ω, $|\partial\Omega|$ denota l'area $(n-1)$-dimensionale di $\partial\Omega$ e B è la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$.

Lo studio di problemi di minimo è motivato anche dal fatto che una classe di problemi definiti da equazioni differenziali e condizioni al contorno si possono trasformare e quindi studiare come problemi di minimo. L'esempio classico fondamentale è espresso dal seguente:

Teorema 2.5 (Principio di Dirichlet)**.** *Siano Ω un aperto limitato regolare di $\mathbb{R}^n$ e siano $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ due assegnate funzioni continue sui rispettivi domini. Allora una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ è soluzione di*

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

se e solo se u è punto di minimo del funzionale

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega f u\, dx$$

nella classe $X = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v = g \text{ su } \partial\Omega\}$.

Osservazione 2.6. *La scrittura ∇u presente nell'espressione del funzionale è il gradiente di u cioè*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

e quindi

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Il simbolo Δ denota l'operatore di Laplace, definito da

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

L'equazione che compare nel problema (1) *è l'equazione di Poisson con dato f. L'equazione $u = g$ su $\partial\Omega$ si dice condizione al bordo di tipo Dirichlet.*

Dimostrazione. Osserviamo che si assume per ipotesi u sufficientemente regolare, più di quanto richiesto nella classe di minimizzazione X. Dimostriamo che se u è soluzione di (1) allora è punto di minimo di F in X. Presa $v \in X$, poniamo $h = v - u$ e calcoliamo

$$F(v) - F(u) = F(u+h) - F(u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 \, dx - \int_\Omega fh \, dx$$
$$= \int_{\partial\Omega} h \, \nabla u \cdot \nu \, d\sigma - \int_\Omega (\Delta u)\, h \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 \, dx - \int_\Omega fh \, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 \, dx \geq 0$$

cioè u è punto di minimo di F in X. Abbiamo applicato il teorema della divergenza nella forma

$$\int_\Omega \mathrm{div}(h \, \nabla u) \, dx = \int_{\partial\Omega} h \, \nabla u \cdot \nu \, d\sigma$$

dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$. L'applicabilità del teorema della divergenza è garantita dalle ipotesi di regolarità di Ω, dal fatto che $h \, \nabla u$ è un campo vettoriale di classe C^1 in $\overline{\Omega}$, per le ipotesi fatte su u e su h. Inoltre abbiamo usato il fatto che $h = 0$ su $\partial\Omega$.
Viceversa supponiamo che u sia punto di minimo di F in X. Fissiamo $h \in C_c^\infty(\Omega)$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che $u + th \in X$ e quindi, applicando anche il teorema della divergenza,

$$0 \leq F(u+th) - F(u) = t\left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx - \int_\Omega fh \, dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 \, dx$$
$$= -t\int_\Omega (\Delta u + f)\, h \, dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 \, dx \, .$$

Se prendiamo $t > 0$, dividiamo per t e passiamo al limite $t \to 0^+$, troviamo $\int_\Omega (\Delta u + f)\, h \, dx \leq 0$. Se prendiamo $t < 0$, dividiamo per t e passiamo al limite $t \to 0^-$, troviamo $\int_\Omega (\Delta u + f)\, h \, dx \geq 0$. Quindi

$$\int_\Omega (\Delta u + f)\, h \, dx = 0$$

e ciò vale per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$. Possiamo ora usare il seguente risultato:

Lemma 2.7 (lemma fondamentale del Calcolo delle variazioni)**.** *Dato un aperto non vuoto Ω di $\mathbb{R}^n$, se $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$ verifica*

$$\int_\Omega \varphi \, h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

allora $\varphi = 0$ quasi ovunque in Ω. Se in più φ è continua in Ω, allora $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Grazie al lemma 2.7 possiamo concludere che $\Delta u + f = 0$ in Ω. La condizione al contorno $u = g$ su $\partial\Omega$ è già contenuta nel fatto che $u \in X$. Dunque u è soluzione di (1). □

Nella dimostrazione precedente, l'implicazione per cui se u è punto di minimo allora u risolve il problema (1) si può rileggere in tre passi:

1. Per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$ esiste la derivata direzionale

$$\frac{\partial F}{\partial h}(u) := \lim_{t\to 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t}$$

2. Fissato $h \in C_c^\infty(\Omega)$, la funzione $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = F(u+th)$ ha minimo in $t = 0$, è ivi derivabile, con $\varphi'(0) = \frac{\partial F}{\partial h}(u)$ e quindi, per il teorema di Fermat, $\frac{\partial F}{\partial h}(u) = 0$.

3. Applicazione del teorema della divergenza e del lemma fondamentale del Calcolo delle variazioni per passare dall'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial h}(u) = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2}$$

   che è espressa in forma integrale, all'equazione differenziale che compare in (1).

L'equazione integrale (2) è la cosiddetta versione debole dell'equazione differenziale per u. Le soluzioni di tale equazione si chiamano *punti critici* del funzionale F.

Esempio 2.8. *Nel caso discusso nel teorema 2.5, esaminando i calcoli svolti nella dimostrazione, possiamo riconoscere che*

$$\frac{\partial F}{\partial h}(u) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h - fh)\, dx \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Quindi la forma debole dell'equazione differenziale $\Delta u + f = 0$ in Ω è l'equazione integrale

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h - fh)\, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

In generale quando si studia un problema le cui soluzioni si possono caratterizzare come punti critici di un certo funzionale F, il problema si dice *variazionale* e il funzionale si chiama *energia*. Inoltre l'equazione differenziale per u la cui formulazione debole è data da (2) si chiama *equazione di Eulero-Lagrange* corrispondente al funzionale F.

Gran parte di fenomeni osservabili nel mondo fisico (meccanica, ottica, elettromagnetismo, ecc.) sono descrivibili mediante principi variazionali le cui configurazioni di equilibrio stabile corrispondono ai minimi di un'opportuna grandezza identificabile con il funzionale energia.

D'altra parte, non tutti i problemi espressi mediante equazioni differenziali sono variazionali e anche quelli che lo sono si possono affrontare con metodi differenti. Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni consiste nella ricerca di soluzioni di problemi variazionali come punti di minimo del relativo funzionale.

Vi sono inoltre situazioni in cui il funzionale non è inferiormente limitato. In tal caso si possono ancora cercare punti critici che però non sono punti di minimo. Le tecniche usate per affrontare questo tipo di problema costituiscono la cosiddetta teoria dei punti critici.

3 Il problema dell'estensione armonica via principio di Dirichlet

Il problema dell'estensione armonica è così formulato: dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ (per dominio intendiamo un aperto connesso non vuoto) e una funzione continua $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ studiare il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Per soluzione del problema (3) si intende una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che verifichi puntualmente le due equazioni presenti in (3). Le funzioni $u \in C^2(\Omega)$ che risolvono l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω si dicono *funzioni armoniche in* Ω. Il problema (3) consiste quindi nella ricerca di estensioni armoniche in un dato dominio di una assegnata funzione definita sulla frontiera del dominio.

Da un punto di vista fisico, il problema (3) individua il potenziale elettrostatico presente in una regione dello spazio individuata dal dominio Ω in presenza di una distribuzione di carica sul bordo di Ω la cui densità è data da g.

Dal punto di vista matematico, il problema dell'estensione armonica si può affrontare con metodi diversi (serie di Fourier, teoria del potenziale, metodo di Perron, etc.) che forniscono informazioni più o meno precise a seconda delle ipotesi fatte sul dominio. Qui lo studiamo con il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni cioè, sulla base del principio di Dirichlet (teorema 2.5) studiamo il problema di minimo

$$\inf_X F \quad \text{dove} \quad F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\,, \quad X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}\,. \tag{4}$$

Vedremo in seguito un teorema più generale che include anche il caso del problema dell'estensione armonica. Tuttavia iniziamo a trattare nello specifico tale problema perché da un lato rappresenta il prototipo dei problemi di minimizzazione affrontabili con il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, contenente tutte le caratteristiche tipiche di tali problemi. Dall'altro, per la sua semplicità, ci permette di fornire una trattazione completa anche relativamente alla

questione della *regolarità* delle soluzioni deboli. Infine la discussione di tale problema si rivela utile anche ai fini della trattazione del problema di Plateau.

Lo schema consiste nel prendere una successione minimizzante ed estrarre una successione convergente in qualche topologia rispetto a cui il funzionale risulti continuo. Per poter estrarre sottosuccessioni convergenti conviene ambientare il problema in uno spazio metrico in cui le successioni minimizzanti risultino limitate. Lo spazio $C^1(\overline{\Omega})$ è inadeguato perché non si hanno informazioni sulla limitatezza rispetto alla norma C^1. Possiamo munire $C^1(\overline{\Omega})$ di un'altra norma, rispetto a cui si ha limitatezza delle successioni minimizzanti. Precisamente possiamo considerare in $C^1(\overline{\Omega})$ la norma L^2:

$$\|u\| = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} .$$

Tuttavia con tale norma lo spazio non è più completo. Per avere uno spazio di Banach dobbiamo lavorare nello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. Ciò richiede attenzione nel formulare la condizione al bordo $u|_{\partial\Omega} = g$ perché gli elementi di $W^{1,2}(\Omega)$ sono funzioni definite quasi ovunque e condizioni puntuali in generale non hanno senso. Occorre quindi riformulare la condizione al bordo secondo una versione debole. Si assume che la funzione assegnata g, inizialmente definita solo su $\partial\Omega$, ammetta un'estensione a tutto $\overline{\Omega}$ appartenente a $W^{1,2}(\Omega)$. Chiamiamo ancora g tale estensione. Quindi si introduce lo spazio

$$W^{1,2}_g = g + W^{1,2}_0(\Omega)$$

dove $W^{1,2}_0(\Omega)$ è definito come la chiusura di $C^\infty_c(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Il nostro obiettivo è dimostrare questo risultato:

Teorema 3.1. *Dati un dominio limitato Ω in $\mathbb{R}^n$ e una funzione $g \in W^{1,2}(\Omega)$, esiste un'unica $u \in W^{1,2}_g$ tale che $F(u) = \inf_{v \in W^{1,2}_g} F(v)$. Inoltre u verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in C^\infty_c(\Omega)$$

Se in più Ω è un dominio sufficientemente regolare (ad esempio, di classe C^2), g è continua su $\overline{\Omega}$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ allora u è soluzione del problema (3)*.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'esistenza del minimo si vuole applicare la seguente generalizzazione del classico Teorema di Weierstrass:

Teorema 3.2. *Siano X uno spazio di Banach riflessivo, $\mathcal{C}$ un suo sottoinsieme chiuso e convesso e $F\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ un funzionale. Supponiamo che:*

(i) le successioni minimizzanti siano limitate;

(ii) F sia debolmente semicontinuo inferiormente.

Allora $\inf_{\mathcal{C}} F > -\infty$ *e F ammette minimo in $\mathcal{C}$.*

Nel caso in questione prendiamo $X = W^{1,2}(\Omega)$, $\mathcal{C} = W^{1,2}_g$ e F come in (4). Per verificare la condizione (i) del teorema 3.2 (limitatezza delle successioni minimizzanti) è utile ricordare la *disuguaglianza di Poincaré*:

$$\exists C = C(\Omega) > 0 \quad | \quad \|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in W^{1,2}_0(\Omega)\,.$$

Ora proviamo la seguente versione, adattata a $W^{1,2}_g$:

$$\exists C_1,\, C_2 > 0 \quad | \quad \|u\|_{L^2} \leq C_1 + C_2\|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in W^{1,2}_g\,. \tag{5}$$

Infatti, presa $u \in W^{1,2}_g(\Omega)$, possiamo scrivere $u = g + v$ con $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$ e quindi

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2} &\leq \|g\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} + C\,\|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq \|g\|_{L^2} + C\|\nabla(u-g)\|_{L^2} \leq \underbrace{\|g\|_{L^2} + C\|\nabla g\|_{L^2}}_{C_1} + C\,\|\nabla u\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

Se $(u_k) \subset W^{1,2}_g$ è una successione minimizzante, cioè $F(u_k) \to \inf_{W^{1,2}_g} F$, allora la successione $(F(u_k))$ è limitata e quindi esiste $K \geq 0$ tale che $\|\nabla u_k\|_{L^2} \leq K\ \forall k$. Grazie a (5), la successione (u_k) è limitata anche in $L^2(\Omega)$ e dunque lo è in $W^{1,2}(\Omega)$. Infine verifichiamo la condizione (ii) del teorema 3.2. Se $(u_k) \subset W^{1,2}_g$ converge a u debolmente in $W^{1,2}(\Omega)$ allora $\nabla u_k \to \nabla u$ debolmente in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e quindi

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u\,dx \\ = F(u_k) + F(u) - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + o(1) &= F(u_k) - F(u) + o(1)\end{aligned}$$

dove $o(1) \to 0$ per $k \to \infty$. Quindi $F(u) \leq \liminf F(u_k)$, cioè F è debolmente semicontinuo inferiormente. Tutte le ipotesi del teorema 3.2 sono soddisfatte e dunque possiamo concludere che esiste $u \in W^{1,2}_g$ punto di minimo di F in $W^{1,2}_g$. Con calcoli simili a quelli svolti nella dimostrazione del teorema 2.5 si ottiene che

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h\,dx \quad \forall h \in C^\infty_c(\Omega)\,.$$

Supponiamo ora che Ω sia un dominio regolare (di classe C^1), g sia continua su $\overline{\Omega}$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Ancora con calcoli analoghi a quelli svolti nella dimostrazione del teorema 2.5 si prova che $\Delta u = 0$ in Ω. Per quanto riguarda la condizione al bordo, ci appoggiamo al seguente risultato (cfr. Brezis, cap.9)

Teorema 3.3. *Supponiamo Ω di classe C^1. Una funzione $v \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ appartiene a $W_0^{1,2}(\Omega)$ se e solo se $v(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega$.*

Applichiamo tale teorema a $u - g$ che appartiene a $W_0^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Quindi $u(x) = g(x) \ \ \forall x \in \partial\Omega$. □

Il punto di minimo $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$ la cui esistenza è garantita dal teorema 3.1 è solo una soluzione debole del problema (3). Per avere una soluzione classica occorre provare che u sia sufficientemente regolare in modo da poter applicare la seconda parte del teorema 3.1. In particolare serve che $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. In realtà basta provare che esiste una funzione $\widetilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ quasi ovunque uguale a u in Ω.

La continuità su $\overline{\Omega}$ si può ottenere mediante un'opportuna versione del principio del massimo, assumendo che il dominio Ω sia sufficientemente regolare e che la condizione al bordo sia definita mediante una funzione g continua su $\overline{\Omega}$. Non approfondiamo qui questo aspetto.

Discutiamo invece la regolarità "interna" $u \in C^2(\Omega)$. In generale, possiamo dare diverse definizioni di "soluzione" dell'equazione $\Delta u = 0$ in Ω:

- *Soluzione classica:* $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.
- *Soluzione debole:* $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = 0$ per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$.
- *Soluzione molto debole:* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\int_\Omega u \, \Delta h \, dx = 0$ per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$.

In questo contesto, le funzioni $h \in C_c^\infty(\Omega)$ si dicono "funzioni test". In generale valgono le implicazioni [soluzione classica $\Rightarrow$ soluzione debole] (per il teorema della divergenza) e [soluzione debole $\Rightarrow$ soluzione molto debole] (per definizione di derivata debole). Dimostriamo che le tre nozioni sono equivalenti (a meno di cambiare la funzione su un insieme di misura nulla).

Teorema 3.4 (Caccioppoli (1934); Weyl (1940))**.** *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $\int_\Omega u \, \Delta h = 0 \ \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora esiste una funzione armonica v in Ω tale che $u = v$ quasi ovunque in Ω.*

Dimostrazione. Ricordiamo la caratterizzazione delle funzioni armoniche mediante la proprietà della media: data una funzione $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ si ha che

$$v \text{ armonica in } \Omega \ \ (\text{cioè } v \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta v = 0 \text{ in } \Omega) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} v \text{ continua in } \Omega \\ v(x) = \fint_{B_r(x)} v \quad \forall B_r(x) \subset\subset \Omega \, . \end{cases}$$

Un altro strumento utile è la regolarizzazione via mollificatori. Richiamiamo quello che ci serve. Data una famiglia di mollificatori φ_ϵ e data una funzione $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ poniamo

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$
$$f_\varepsilon(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{B_\epsilon} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{B_\epsilon(x)} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon$$

Si ha che:

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ con $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}$ e analogamente per le derivate di ordine maggiore. In particolare $\Delta f_\varepsilon = f * \Delta\varphi_\varepsilon$.

(ii) $f_\epsilon \to f$ in $L^1(K)$ $\forall K \subset\subset \Omega$.

Ora possiamo procedere con la dimostrazione del teorema. Per ogni $\varepsilon > 0$ (sufficientemente piccolo) poniamo

$$u_\varepsilon(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x) \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon$$

Step 1. u_ε è armonica in Ω_ε.

...

Step 2. Per ogni $x \in \Omega$ esiste

$$v(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) = \fint_{B_r(x)} u \quad \forall B_r(x) \subset\subset \Omega,$$

con le medie integrali indipendenti da r. Inoltre $u = v$ quasi ovunque in Ω.

...

Step 3. v verifica la proprietà della media ed è una funzione continua.

...

Step 4. Conclusione.

... □

4 Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni

Dati un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ e una funzione $L\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, detta *lagrangiana*, con opportune proprietà, introduciamo il cosiddetto funzionale d'azione

$$F(u) := \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\,dx \tag{6}$$

definito in una certa classe $\mathcal{C}$ di funzioni ammissibili $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Per definire correttamente un problema di minimo $\inf_{\mathcal{C}} F$ e formulare un risultato di esistenza del punto di minimo occorre determinare condizioni (possibilmente minimali) su L e su $\mathcal{C}$ tali da poter applicare il teorema di Weierstrass generalizzato.

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, sia $\mathcal{C}$ un suo sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto e sia $F\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ un funzionale*

(i) coercivo, cioè $F(u) \to \infty$ se $\|u\| \to \infty$, $u \in \mathcal{C}$;

(ii) (sequenzialmente) debolmente semicontinuo inferiormente, cioè se $(u_n) \subset \mathcal{C}$ converge debolmente a u, allora $F(u) \le \liminf F(u_n)$.

Allora esiste $\overline{u} \in \mathcal{C}$ punto di minimo di F in $\mathcal{C}$.

Osserviamo che se $(u_n) \subset \mathcal{C}$ converge debolmente a u, allora $u \in \mathcal{C}$ perché $\mathcal{C}$, essendo convesso e chiuso per la topologia forte) è chiuso anche per la topologia debole. A volte non è semplice verificare direttamente l'ipotesi di debole semicontinuità inferiore. Tale proprietà è soddisfatta se il funzionale F è continuo (rispetto alla topologia forte) e convesso in $\mathcal{C}$, cioè

$$F(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \le \lambda F(u_1) + (1-\lambda)F(u_2) \quad \forall u_1,\, u_2 \in \mathcal{C}\,, \quad \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

In genere, queste due condizioni sono più semplici da studiare. Ricorreremo quindi alla seguente versione del teorema di Weierstrass:

Teorema 4.2. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, sia $\mathcal{C}$ un suo sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto e sia $F\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ un funzionale continuo, convesso e coercivo in $\mathcal{C}$. Allora esiste $\overline{u} \in \mathcal{C}$ punto di minimo di F in $\mathcal{C}$. Se in più F è strettamente convesso, cioè*

$$F(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) < \lambda F(u_1) + (1-\lambda)F(u_2) \quad \forall u_1,\, u_2 \in \mathcal{C} \ \textit{con}\ u_1 \neq u_2\,, \quad \forall \lambda \in (0,1)\,,$$

allora il punto di minimo è unico.

Dimostrazione. Verifichiamo la sola unicità: se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}$ sono punti di minimo, allora lo è anche il punto medio $\overline{u} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$. Infatti, essendo $\mathcal{C}$ convesso, $\overline{u} \in \mathcal{C}$ ed, essendo F convesso,

$$\inf_{\mathcal{C}} F \le F(\overline{u}) \le \frac{1}{2}F(u_1) + \frac{1}{2}F(u_2) \le \inf_{\mathcal{C}} F\,.$$

Se fosse $u_1 \neq u_2$, dalla stretta convessità, si otterrebbe la disuguaglianza stretta $F(\overline{u}) < \frac{1}{2}F(u_1) + \frac{1}{2}F(u_2)$ e quindi una contraddizione. □

Dato che la lagrangiana presenta una dipendenza anche dalle derivate del prim'ordine, gli spazi di Banach "naturali" in cui ambientare il problema sono gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

L'ipotesi di riflessività, necessaria per poter applicare il teorema 4.1 o 4.2, richiede di prendere $1 < p < \infty$. La scelta dell'esponente p è determinata dalla crescita di L rispetto alla terza variabile.

Discutiamo due risultati preliminari:

Lemma 4.3. *Sia $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti condizioni dette condizioni di Carathéodory:*

$$(C) \quad \begin{cases} f(\cdot, s) \text{ misurabile } \forall s \in \mathbb{R}^k \\ f(x, \cdot) \text{ continua per q.o. } x \in \Omega\,. \end{cases}$$

Se $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ è misurabile, allora anche $w(x) = f(x, v(x))$ è misurabile da Ω in $\mathbb{R}$.

Osservazione 4.4. *Se denotiamo $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ lo spazio delle funzioni misurabili da Ω in $\mathbb{R}^k$ e poniamo $\mathcal{F}(v) = w$ dove $w(x) = f(x, v(x))$, il lemma 4.3 stabilisce che l'operatore $\mathcal{F}$ è ben definito da $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ in $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$. Nel caso in cui f dipenda solo dalla seconda variabile, il lemma 4.3 esprime il fatto ben noto secondo cui la composizione di una funzione misurabile $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ con una funzione continua $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dà una funzione misurabile.*

Dimostrazione. Iniziamo a dimostrare il lemma nel caso in cui v sia funzione semplice, cioè esprimibile nella forma:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$$

per opportuni $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}^k$ tutti distinti tra loro e $A_i = v^{-1}(\alpha_i)$ sottoinsiemi misurabili di Ω a due a due disgiunti. Grazie a ciò si verifica che

$$w(x) = f\left(x, \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}(x)\right) = \sum_i \underbrace{f(x, \alpha_i)\chi_{A_i}(x)}_{w_i(x)}\,.$$

Ogni w_i è misurabile, perché prodotto di $f(\cdot, \alpha_i)$ che è misurabile per la condizione (C) di Carathéodory, con la funzione χ_{A_i} che è misurabile perché funzione caratteristica di un insieme misurabile. Quindi w è misurabile, perché somma di funzioni misurabili. Ora consideriamo il caso generale in cui v sia una funzione misurabile. La teoria della misura ci dice che esiste una successione $(v_j)_j$ di funzioni semplici da Ω in $\mathbb{R}^k$ tale che $v_j \to v$ puntualmente quasi ovunque in Ω. Per quanto provato sopra, ogni $w_j(x) = f(x, v_j(x))$ è misurabile e, siccome, per la condizione (C), f è continua rispetto alla seconda variabile, si ha che $w(x) = f(x, v(x)) = \lim_j = f(x, v_j(x)) = \lim_j w_j(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega$. ALlora w è una funzione misurabile perché limite puntuale quasi ovunque di una successione di funzioni misurabili in uno spazio di misura completa. □

Lemma 4.5. *Siano Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ e $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente (C) e tale che*

$$\exists p \in [1,\infty)\,,\ \ \exists a,b \in \mathbb{R}\ \ :\ \ |f(x,s)| \le a + b|s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R}^k \text{ e per q.o. } x \in \Omega\,.$$

Allora il funzionale $F(v) = \int_\Omega f(x,v(x))\,dx$ è ben definito e continuo in $L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$.

Dimostrazione. Se $v \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$, in particolare v è misurabile e quindi, per il lemma 4.3, lo è anche $w(x) = f(x,v(x))$. Inoltre, per la condizione di crescita

$$|w(x)| \le a + b|v(x)|^p \quad \text{per q.o. } x \in \Omega$$

Dato che $v \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$ e Ω è limitato, segue che la funzione $x \mapsto a + b|v(x)|^p$ è in $L^1(\Omega)$. Quindi anche $w \in L^1(\Omega)$ cioè il funzionale F è ben definito. Proviamo ora che è continuo. Sia (v_j) una successione in $L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$ che converge in L^p ad una certa v. Poniamo $w_j(x) = f(x,v_j(x))$ e $w(x) = f(x,v(x))$. Vogliamo dimostrare che $F(v_j) \to F(v)$ cioè che

$$\int_\Omega w_j(x)\,dx \to \int_\Omega w(x)\,dx\,.$$

Teorema 4.6. *Siano Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ e $L\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione lagrangiana soddisfacente:*

(i) Condizioni di Carathéodory:

$$\begin{cases} L(\cdot,u,\xi) \text{ misurabile } \forall (u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ L(x,\cdot,\cdot) \text{ continua per q.o. } x \in \Omega\,. \end{cases}$$

(ii) Condizioni di crescita: $\exists p \in [1,\infty)\,,\ \ \exists a,b > 0$ tali che

$$a(|\xi|^p - 1) \le L(x,u,\xi) \le b(1 + |u|^p + |\xi|^p) \quad \forall (u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \text{ e per q.o. } x \in \Omega\,.$$

(iii) Condizione di convessità: per q.o. $x \in \Omega$, $\forall (u_1,\xi_1),\ (u_2,\xi_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha che

$$L(x,\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2), \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \le \lambda L(x,u_1,\xi_1) + (1-\lambda)L(x,u_2,\xi_2)\,.$$

Allora, se $1 < p < \infty$, per ogni $g \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste $\overline{u}$ punto di minimo del funzionale d'azione F (definito in (6)) in $W_g^{1,p} := g + W_0^{1,p}(\Omega)$. Inoltre se L è strettamente convessa (cioè la condizione di convessità vale con la disuguuaglianza stretta se $(u_1,\xi_1) \neq (u_2,\xi_2)$ e $0 < \lambda < 1$), allora il punto di minimo è unico.

Dimostrazione. ....

....

.... □

Osservazione 4.7. *(i) Il teorema 3.1 nella parte di esistenza e unicità del minimo è un caso particolare del teorema 4.6 con* $L(x,u,\xi)=\frac{1}{2}|\xi|^2$ *e* $p=2$*.*

(ii) Il teorema 4.6 vale anche nel caso vettoriale, cioè per funzioni $u\colon \Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$*. In tal caso si deve intendere la lagrangiana* $L\colon \Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{nk}\to\mathbb{R}$*, il funzionale d'azione*

$$F(u)=\int_\Omega L(x,u(x),Du(x))\,dx \quad \textit{dove} \quad Du=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}}.$$

In particolare se $n=1$ *e* $\Omega=(t_1,t_2)$ *si ha* $L\colon (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ *e*

$$F(u)=\int_{t_1}^{t_2} L(t,u(t),u'(t))\,dt\,.$$

I seguenti esempi mostrano che l'assenza di anche una sola delle ipotesi fatte nel teorema 4.6 compromette il risultato di esistenza del minimo. Tutti gli esempi sono in dimensione 1, con dominio Ω dato dall'intervallo unitario $(0,1)$.

Esempio 4.8. *Consideriamo la lagrangiana* $L(t,u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$ *e una qualunque* $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ *sufficientemente regolare e tale che* $g(0)=0$ *e* $g(1)=1$*, ad esempio* $g(t)=t$*. La classe di funzioni ammissibili è*

$$\mathcal{C}=\{u\in W^{1,1}([0,1])\ :\ u(0)=0\,,\ \ u(1)=1\,\}$$

e il funzionale è

$$F(u)=\int_0^1\sqrt{u^2+|u'|^2}\,dt$$

Risulta $\inf_{\mathcal{C}} F=1$ *ma non assunto in* $\mathcal{C}$*. Infatti*

$$F(u)\geq\int_0^1|u'|\,dt\geq\left|\int_0^1 u'\,dt\right|=|u(1)-u(0)|=1\quad\forall u\in\mathcal{C}\,. \tag{7}$$

Prendendo $u_k(t)=t^k$ *si ha che*

$$F(u_k)=\int_0^1\sqrt{t^{2k}+k^2t^{2(k-1)}}\,dt=\int_0^1 t^{k-1}\sqrt{t^2+k^2}\,dt\leq\sqrt{1+k^2}\int_0^1 t^{k-1}\,dt=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\to 1\,.$$

D'altra parte se esistesse $u \in \mathcal{C}$ tale che $F(u) = 1$ allora in (7) *si avrebbero tutte uguaglianze e quindi con le stesse stime di* (7) *si otterrebbe*

$$0 = 1 - \int_0^1 |u'|\,dt = \int_0^1 \left(\sqrt{u^2 + |u'|^2} - |u'|\right)\,dt \geq 0$$

da cui $\sqrt{u^2 + |u'|^2} = |u'|$ q.o. e quindi $u = 0$ q.o. Dato che in dimensione 1 le funzioni di $W^{1,1}$ sono continue, avremmo u identicamente nulla, in contrasto con la condizione $u(1) = 1$. In questo esempio il teorema 4.6 non è applicabile perché la lagrangiana soddisfa la condizione di crescita solo per $p = 1$ mentre il teorema richiede $p > 1$.

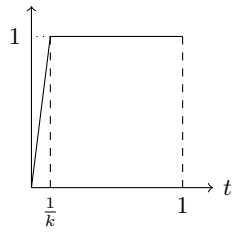
Esempio 4.9 (Weierstrass)**.** *Consideriamo la lagrangiana $L(t, u, v) = t^2 v^2$ e una qualunque $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare e tale che $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$, ad esempio $g(t) = t$. La classe di funzioni ammissibili è*

$$\mathcal{C} = \{u \in W^{1,2}([0, 1]) \,:\, u(0) = 0\,,\ \ u(1) = 1\,\}$$

e il funzionale è

$$F(u) = \int_0^1 t^2 |u'|^2\,dt$$

Risulta $\inf_{\mathcal{C}} F = 0$ ma non assunto in $\mathcal{C}$. Per provare che $\inf_{\mathcal{C}} F = 0$ basta osservare che $F(u) \geq 0$ per ogni $u \in \mathcal{C}$ e stimare F sulla successione (u_k) come in figura:



$$u_k'(t) = \begin{cases} k & \text{if } \ t \in [0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{if } \ t \in (\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$$

$$F(u_k) = k^2 \int_0^{\frac{1}{k}} t^2\,dt = \frac{1}{3k}$$

Se esistesse $u \in \mathcal{C}$ tale che $F(u) = 0$ dovrebbe essere $u' = 0$ q.o. e quindi u costante (si usa il fatto che $W^{1,2}([0, 1]) \subset C([0, 1])$). Ma ciò contraddice $u(0) = 0 \neq u(1)$. In questo esempio il teorema 4.6 non è applicabile perché nella condizione di crescita manca il controllo dal basso con una costante positiva.

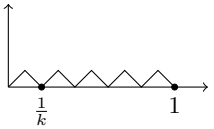
Esempio 4.10 (Bolza)**.** *Consideriamo la lagrangiana $L(t, u, v) = (|v| - 1)^2 + u^2$ e una qualunque $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare e tale che $g(0) = 0 = g(1)$, ad esempio $g \equiv 0$. La classe di funzioni ammissibili è*

$$\mathcal{C} = \{u \in W^{1,2}([0, 1]) \,:\, u(0) = u(1) = 0\,\}$$

e il funzionale è

$$F(u) = \int_0^1 [(|u'| - 1)^2 + u^2]\, dt$$

Risulta $\inf_C F = 0$ *ma non assunto in* C. *Per provare che* $\inf_{\mathcal{C}} F = 0$ *basta osservare che* $F(u) \geq 0$ *per ogni* $u \in \mathcal{C}$ *e stimare* F *sulla successione* (u_k) *come in figura:*



$$\begin{array}{l} u_k' = 1 \ \ \textit{q.o.} \\ 0 \leq u_k \leq \frac{1}{2k} \end{array} \ \Rightarrow \ F(u_k) \leq \frac{1}{4k^2}$$

In questo esempio il teorema 4.6 non è applicabile perché la lagrangiana non è convessa (rispetto a v*).*

5 Le equazioni di Eulero-Lagrange

Nello studio del problema dell'estensione armonica via principio di Dirichlet si è visto che il punto di minimo u del funzionale di Dirichlet nello spazio affine $W_g^{1,2}$ verifica l'equazione

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Inoltre se u è sufficientemente regolare (in particolare se u è di classe C^2) allora u è soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$ in Ω.

Considerando che il teorema 4.6 stabilisce delle condizioni sotto cui il funzionale d'azione associato ad una certa lagrangiana ammette punto di minimo nello spazio $W_g^{1,p}$, ci chiediamo se il punto di minimo soddisfa una certa equazione integrale, in caso affermativo quale sia e, in caso di maggior regolarità del punto di minimo, quale sia l'equazione differenziale da esso soddisfatta.

Supponiamo, per cominciare, che $L\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifichi le condizioni di Caratheodory ed una condizione di crescita della forma

$$\exists C \geq 0\,,\ p \in [1,\infty) \ : \ |L(x,u,\xi)| \leq C(1+|u|^p+|\xi|^p) \quad \forall (u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \text{ e per q.o. } x \in \Omega\,.$$

Posto

$$F(u) = \int_\Omega L(x,u,\nabla u)\, dx \tag{8}$$

sappiamo che F è ben definito e continuo in $W^{1,p}(\Omega)$ (cfr. la dimostrazione del teorema 4.6). Fissato $g \in W^{1,p}(\Omega)$ poniamo $W_g^{1,p} = g + W_0^{1,p}(\Omega)$ e supponiamo che esista $u \in W_g^{1,p}$ punto di minimo per F in $W_g^{1,p}$.

Lemma 5.1. *Fissato $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se F ammette derivata direzionale in u nella direzione di h, cioè se esiste*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+th)-F(u)}{t} =: \frac{\partial F}{\partial h}(u)$$

allora $\frac{\partial F}{\partial h}(u) = 0$.

Dimostrazione. Sappiamo che $F(u) \le F(v)$ per ogni $v \in W_g^{1,p}$. In particolare $F(u) \le F(u+th)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = F(u+th)$ ammette minimo in $t = 0$. Per ipotesi tale funzione è derivabile in 0 e $\varphi'(0) = \frac{\partial F}{\partial h}(u)$. Quindi per il teorema di Fermat $\varphi'(0) = 0$, cioè la tesi. □

Si tratta quindi di stabilire se e sotto quali ipotesi sulla lagrangiana L il funzionale d'azione F ammette derivata direzionale in un fissato punto lungo una data direzione. Conviene trattare inizialmente il caso di funzionali integrali della forma

$$F(v) = \int_\Omega f(x, v(x))\, dx \tag{9}$$

assumendo che $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sia una funzione di Carathéodory (cioè verifichi le condizioni di Carathéodory) soddisfacente una condizione di crescita della forma

$$\exists a, b \ge 0\,,\ \ p \in [1,\infty) \ \ :\ \ |f(x,v)| \le a + b|v|^p \quad \forall v \in \mathbb{R}^k \text{ e per q.o. } x \in \Omega$$

tale da garantire la buona positura del corrispondente funzionale integrale nello spazio $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Per avere esistenza della derivata direzionale, serve che f sia derivabile rispetto alla seconda variabile e che la corrispondente derivata verifichi una condizione di crescita. Più precisamente:

Lemma 5.2. *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $f\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ supponiamo f di classe C^1 sul proprio dominio e*

$$\exists a, b \ge 0\,,\ \ p \in [1,\infty) \ \ :\ \ |\nabla_v f(x,v)| \le a + b|v|^{p-1} \quad \forall (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^k\,.$$

Allora il funzionale F dato da (9) *è ben definito in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e per ogni $v, h \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ esiste*

$$\frac{\partial F}{\partial h}(v) = \int_\Omega \nabla_v f(x, v(x)) \cdot h(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. ...

...

□

Lemma 5.3. *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $L = L(x,u,\xi)\colon \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 sul proprio dominio, supponiamo che esistano $C \geq 0$ e $p \in [1,\infty)$ tali per cui*

$$\left|\frac{\partial L}{\partial u}(x,u,\xi)\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x,u,\xi)\right| \leq C(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}) \quad \forall (x,u,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\,.$$

Allora il funzionale d'azione F dato da (8) *è ben definito in $W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni $v, h \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste*

$$\frac{\partial F}{\partial h}(u) = \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u}(x,u,\nabla u)\,h + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x,u,\nabla u)\,\frac{\partial h}{\partial x_i}\right]\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità la vediamo nel caso 1-dim.

.....

.....

□

Definizione 5.4. *Punto critico o punto stazionario di F in $W^{1,p}_g$ è una funzione $u \in W^{1,p}_g$ tale che*

$$\frac{\partial F}{\partial h}(u) = 0 \quad \forall h \in W^{1,p}_0(\Omega)\,.$$

Teorema 5.5. *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $L = L(x,u,\xi)\colon \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come nel lemma 5.3, se u è un punto stazionario di F in $W^{1,p}_g$ allora verifica*

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u}(x,u,\nabla u)\,h + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x,u,\nabla u)\,\frac{\partial h}{\partial x_i}\right]\,dx = 0 \quad \forall h \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

detta equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. *In particolare ciò vale per i punti di minimo di F in $W^{1,p}_g$. Se inoltre L è di classe C^2 e $u \in C^2(\Omega)$ allora u risolve l'equazione*

$$\mathrm{div}_x\left(\nabla_\xi L(x,u,\nabla u)\right) = \frac{\partial L}{\partial u}(x,u,\nabla u) \quad \textit{in } \Omega$$

nota come equazione di Eulero-Lagrange *in forma differenziale.*

In dimensione 1 l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale si scrive

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial u}(t,u,\dot u)\,h + \frac{\partial L}{\partial \dot u}(t,u,\dot u)\,\dot h\right]\,dt = 0 \quad \forall h \in W^{1,p}_0(t_1,t_2)$$

mentre quella in forma differenziale si riduce a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot u}(t,u,\dot u)\right] = \frac{\partial L}{\partial u}(t,u,\dot u)\,.$$

Riferimento bibliografico per i capitoli 1-5:

B. Dacorogna: Introduction to the Calculus of Variations, Imperial College Press (1992).

6 Il problema delle geodetiche

Sia M una varietà differenziabile[1] n-dimensionale, munita di una metrica riemanniana $\mathbf{g}$. Ciò significa che per ogni $p \in M$ è definito un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sullo spazio tangente T_pM e la funzione $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ è differenziabile per ogni coppia di campi differenziabili $X, Y \colon M \to TM$.

In coordinate locali ciò si esprime nel modo seguente: fissata una carta (U, φ) con U aperto di M e φ omeomorfismo tra U e un aperto V di $\mathbb{R}^n$, per ogni $p \in U$ sia $\{\partial_1|_p, ..., \partial_n|_p\}$ la base di T_pM indotta dalla parametrizzazione locale φ. Quindi, posto per brevità $\partial_i = \partial_i|_p$, ogni vettore $u \in T_pM$ si scrive come

$$u = \sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i$$

dove $(x^1, ..., x^n)$ sono le coordinate di u rispetto alla base $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$. Inoltre, se $u = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$ e $v = \sum_{i=1}^n y^i \partial_i$ si ha che

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, x^i y^j \quad \text{dove} \quad g_{ij} = g_{ij}(p) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p \,.$$

D'ora in poi useremo la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti: se lo stesso indice compare due volte nella stessa espressione, una volta in basso ed una in alto, è sottintesa una sommatoria su quell'indice.

Dire che $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ è un prodotto interno significa che la matrice $(g_{ij})_{i,j}$ è simmetrica e definita positiva. Dire che il prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ dipende in modo liscio da p significa che le funzioni $x \mapsto g_{ij}(\varphi^{-1}(x))$ sono C^∞ da V in $\mathbb{R}$.

Esempio 6.1. *Dati $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto e $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, sia M il grafico di f, cioè*

$$M = \{(x, x_{n+1}) \in \Omega \times \mathbb{R} \ : \ x_{n+1} = f(x)\} \,.$$

L'insieme M munito della metrica indotta di $\mathbb{R}^{n+1}$ si può considerare come varietà n-dimensionale, ricoperta da una carta sola, data da (M, φ) dove $\varphi(x, x_{n+1}) = x$ se $(x, x_{n+1}) \in M$. Fissato un punto $p = (x, f(x)) \in M$, lo spazio tangente a M in p è dato da

$$T_pM = \{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ \nabla f(x) \cdot u = v \,\}$$

[1] qui per "differenziabile" o "liscia" intendiamo infinite volte differenziabile.

e una base in T_pM è costituita dai vettori

$$\{\partial_1, ..., \partial_n\} \quad \textit{dove} \quad \partial_i = \mathbf{e}_i + \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x \mathbf{e}_{n+1} \quad (i = 1, ..., n)\,.$$

La metrica euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$ induce in modo naturale una metrica riemanniana su M che per ogni punto $p \in M$, è definita dalla restrizione del prodotto scalare euclideo al sottospazio dei vettori tangenti a M in p. Cioè, fissato $p = (x, x_{n+1}) \in M$, per ogni $u = x^i\partial_i\,,\ \ v = y^i\partial_i \in T_pM$ si pone

$$\langle u, v\rangle_p = g_{ij}\, x^i\, y^j \quad \textit{dove} \quad g_{ij} = g_{ij}(p) = \langle \partial_i, \partial_j\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \delta_{ij} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x .$$

Che la matrice $(g_{ij})_{i,j}$ sia definita positiva deriva dal fatto che la metrica è indotta da quella euclidea. La regolarità C^∞ deriva dalla corrispondente ipotesi fatta su f.

Definizione 6.2. *Una curva continua $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$ in una varietà M è detta* regolare *se per ogni $t \in [t_1, t_2]$ il vettore tangente $\gamma'(t)$ esiste è non nullo e la funzione $t \mapsto \gamma'(t)$ è continua. Inoltre diciamo che la curva γ unisce $p_1 = \gamma(t_1)$ con $p_2 = \gamma(t_2)$.*

Definizione 6.3. *Data una curva regolare $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$ in una varietà riemanniana $(M, \mathbf{g})$, si chiama* lunghezza della curva *il numero*

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt$$

dove $\|u\|_p = \sqrt{\langle u, u\rangle_p}$ è la norma di T_pM indotta da $\mathbf{g}$.

Definizione 6.4. *Data una varietà riemanniana $(M, \mathbf{g})$ connessa, per ogni coppia di punti $p, q \in M$ si definisce* distanza di p da q indotta dalla metrica $\mathbf{g}$ *il numero*

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} \mathcal{L}(\gamma) \tag{10}$$

dove $\Gamma_{p,q}$ denota la classe delle curve regolari che uniscono p con q.

Vale che:

Lemma 6.5. *Data una varietà riemanniana connessa $(M, \mathbf{g})$, la funzione $d\colon M \times M \to \mathbb{R}^+$ definita da* (10) *è una distanza in M, detta* distanza riemanniana di M, *che induce la topologia della varietà.*

Teorema 6.6 (Hopf-Rinow)**.** *Data una varietà riemanniana connessa $(M, \mathbf{g})$, se M è completa con la distanza riemanniana, allora per ogni $p, q \in M$ con $p \neq q$ esiste una curva regolare che unisce p e q e tale per cui $d(p, q) = \mathcal{L}(\gamma)$.*

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso in cui M sia ricoperta da una carta sola (M, φ) con φ omeomorfismo tra M e $\mathbb{R}^n$. Fissati $p, q \in M$ con $p \neq q$, siano $a = \varphi(p)$ e $b = \varphi(q)$. Data una curva regolare $\gamma\colon [t_1, t_2] \to M$ tale che $\gamma(t_1) = p$ e $\gamma(t_2) = q$, la funzione $u = \varphi \circ \gamma\colon [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ definisce una curva regolare in $\mathbb{R}^n$ tale che $u(t_1) = a$ e $u(t_2) = b$. Inoltre

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u)\, \dot{u}^i\, \dot{u}^j}\, dt$$

dove i coefficienti $g_{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono definiti da

$$g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p \quad \text{con} \quad p = \varphi^{-1}(x) \quad \text{e} \quad \partial_i = \partial_i|_p\,.$$

Assumiamo che

$$\exists c_1, c_2 > 0 \ : \ c_1|\xi|^2 \leq g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq c_2|\xi|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in T_x\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n, \quad \forall i, j = 1, ..., n\,.$$

Come primo passo, riportiamo il problema di minimo del funzionale lunghezza in $\Gamma_{p,q}$ al problema di minimo del funzionale

$$F(u) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(u)\, \dot{u}^i\, \dot{u}^j}\, dt$$

in

$$C = \{u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \mid \ u(0) = a\,, \ \ u(1) = b\,, \ \ Q(u(t), \dot{u}(t)) > 0 \ \ \forall t\,\}$$

dove

$$Q(x, \xi) = g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \quad (x, \xi \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Per fare ciò, ci basiamo sul seguente fatto, dato per noto (o comunque di semplice verifica).

Lemma 6.7. *Se ϕ è un diffeomerfismo crescente di $[\tau_1, \tau_2]$ su $[t_1, t_2]$ e $u\colon [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^n$ che unisce a con b, allora anche $v = u \circ \phi\colon [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}^n$ è tale, ha lo stesso supporto di u e $F(u) = F(v)$.*

Il lemma precedente mette in luce la natura geometrica del problema evidenziata dal fatto che il funzionale F è invariante rispetto a cambi di parametrizzazione. In particolare ciò ci permette di limitarci a curve con parametro variabile sempre nell'intervallo unitario $[0, 1]$. Otteniamo così il seguente fatto:

Lemma 6.8. *Se u è punto di minimo di F in C allora $\phi^{-1} \circ u$ è punto di minimo di $\mathcal{L}$ in $\Gamma_{p,q}$.*

Dimostrazione. Si verifica che $\phi^{-1} \circ u \in \Gamma_{p,q}$. Inoltre, presa una qualunque curva $\gamma \in \Gamma_{p,q}$, definita su $[t_1, t_2]$, sia $v(s) = (\varphi \circ \gamma)(t_1 + s(t_2 - t_1))$ con $s \in [0, 1]$. Risulta che $v \in C$ e $F(v) = \mathcal{L}(\gamma)$. Quindi $\mathcal{L}(\gamma) = F(v) \geq F(u) = \mathcal{L}(\phi^{-1} \circ u)$. □

Tenuto conto che il funzionale F è il funzionale d'azione associato ad una lagrangiana

$$L(u, \xi) = \sqrt{g_{ij}(u)\, \xi^i\, \xi^j}$$

che verifica le limitazioni

$$\sqrt{c_1}\, |\xi| \leq L(u, \xi) \leq \sqrt{c_1}\, |\xi|$$

si potrebbe prendere in considerazione la possibilità di studiare il problema di minimo di F nella classe delle funzioni $u \in W^{1,1}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ tali che $u(0) = a$ e $u(1) = b$. Tuttavia il metodo diretto del calcolo delle variazioni non è applicabile perché lo spazio $W^{1,1}$ non è riflessivo. Per superare questo ostacolo si va a considerare un altro funzionale, al posto di F, corrispondente ad una lagrangiana con crescita più che lineare. Ciò è possibile sfruttando l'invarianza del funzionale F rispetto a cambi di parametrizzazione. Più precisamente, per ogni $u \in C$ possiamo trovare $v \in C$ equivalente ad u (cioè che differisce da u per un diffeomorfismo crescente) e tale per cui $Q(v(t), \dot{v}(t)) =$ costante. Tale v si ottiene così: introduciamo la funzione lunghezza d'arco (normalizzata)

$$\psi(t) = \frac{1}{F(u)} \int_0^t \sqrt{g_{ij}(u(s))\, \dot{u}^i(s)\, \dot{u}^j(s)}\, ds\,.$$

Tale ψ risulta essere un diffeomorfismo crescente di $[0, 1]$ in sè e la curva $v = u \circ \psi^{-1}$ appartiene a C e verifica $F(v) = F(u)$ e

$$Q(v(t), \dot{v}(t)) = F(u) \quad \forall t \in [0, 1]\,.$$

Ora definiamo

$$C^* := \{ u \in C \ :\ Q(u(t), \dot{u}(t)) = \text{costante} \ \ \forall t \in [0, 1] \}$$

$$E(u) := \int_0^1 Q(u, \dot{u})\, dt$$

e osserviamo che

$$F(u) \leq \sqrt{E(u)} \quad \forall u \in C\,, \quad F(u) = \sqrt{E(u)} \quad \forall u \in C^*. \tag{11}$$

Infatti, per la disuguaglianza di Schwartz,

$$F(u) = \int_0^1 \sqrt{Q(u,\dot{u})}\, dt \le \sqrt{\int_0^1 Q(u,\dot{u})\, dt} \sqrt{\int_0^1 1\, dt} = \sqrt{E(u)}$$

mentre l'uguaglianza nel caso $u \in C^*$ si ottiene perché $Q(u,\dot{u})$ è costante. Da (11) segue:

Lemma 6.9. *Se $u \in C$ è punto di minimo di E in C allora è tale anche per F in C.*

Dimostrazione. Presa un'arbitraria curva $v \in C$, esiste $w \in C^*$ equivalente a v. Quindi, da (11) segue $F(v) = F(w) = \sqrt{E(w)} \ge \sqrt{E(u)} \ge F(u)$ perché u è punto di minimo di E in C. □

Il funzionale E riscritto rispetto a γ corrisponde a

$$E(u) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2_{\gamma(t)}\, dt$$

e rappresenta quindi l'*energia cinetica* di γ (a meno di un coefficiente $\frac{1}{2}$). La funzione $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}$ è la velocità riemanniana lungo la curva γ. Il lemma 6.9 quindi ci dice che se minimizziamo l'energia cinetica minimizziamo anche la lunghezza.

A differenza del funzionale F (che dà la lunghezza di una curva), il funzionale energia cinetica non è invariante per cambi di parametrizzazione. Grazie a ciò il problema di minimo per E può essere affrontato più facilmente rispetto all'analogo problema per F. In particolare, verrà discusso in due passi, studiando dapprima il problema in $W^{1,2}$ e poi provando la regolarità del punto di minimo.

Lemma 6.10. *Posto*

$$W^{1,2}_{a,b} = \{u \in W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^n) \ : \ u(0) = a\,,\ u(1) = b\}\,,$$

esiste $u \in W^{1,2}_{a,b}$ punto di minimo di E in $W^{1,2}_{a,b}$.

Dimostrazione. Intendiamo applicare il teorema di Weierstrass generalizzato nella forma del teorema 4.1. Lo spazio $W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^n)$ è riflessivo e $W^{1,2}_{a,b}$ è un suo sottoinsieme convesso e chiuso. Il funzionale E è coercivo. Infatti per ogni $u \in W^{1,2}_{a,b}$ si ha

$$E(u) \ge c_1 \|\dot{u}\|^2_{L^2}\,. \tag{12}$$

Inoltre per ogni $u \in W^{1,2}_{a,b}$ si ha

$$|u(t)| \le |u(0)| + \int_0^t |\dot{u}(s)|\, ds \le |a| + \|\dot{u}\|_{L^2} \quad \forall t \in [0,1]$$

e quindi anche

$$\|u\|_{L^2} \leq |a| + \|\dot{u}\|_{L^2}. \tag{13}$$

Pertanto, se $\|u\|_{W^{1,2}} \to \infty$ e $u \in W^{1,2}_{a,b}$, (13) implica che $\|\dot{u}\|_{L^2} \to \infty$ e dunque $E(u) \to \infty$ per (12). In generale il funzionale E non è convesso perché la corrispondente lagrangiana Q non lo è rispetto a u. Possiamo però provare che E è debolmente semicontinuo inferiormente e questo è sufficiente per poter concludere, grazie al teorema 4.1. Sia $(u_k) \subset W^{1,2}_{a,b}$ una successione debolmente convergente in $W^{1,2}$ ad una certa $u \in W^{1,2}$. Si ha che $u \in W^{1,2}_{a,b}$ e siccome $W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^n)$ è immerso con compattezza in $C([0,1],\mathbb{R}^n)$ (teorema di Rellich), $u_k \to u$ uniformemente. Scriviamo

$$E(u_k) = \int_0^1 [g_{ij}(u_k) - g_{ij}(u)]\, \dot{u}^i_k\, \dot{u}^j_k\, dt + \int_0^1 g_{ij}(u)\, \dot{u}^i_k\, \dot{u}^j_k\, dt \tag{14}$$

e stimiamo

$$\left| \int_0^1 [g_{ij}(u_k) - g_{ij}(u)]\, \dot{u}^i_k\, \dot{u}^j_k\, dt \right| \leq \max_{i,j} \|g_{ij}(u_k) - g_{ij}(u)\|_\infty \|\dot{u}_k\|^2_{L^2}\,.$$

Dato che g_{ij} è localmente lipschitziana, $\|g_{ij}(u_k) - g_{ij}(u)\|_\infty \to 0$. Inoltre $(\dot{u}_k)$ è limitata in L^2. Quindi

$$\int_0^1 [g_{ij}(u_k) - g_{ij}(u)]\dot{u}^i_k \dot{u}^j_k\, dt \to 0 \quad \text{per } k \to \infty.$$

L'ultimo integrale in (14) può essere scritto nella forma

$$\int_0^1 L(t, \dot{u}_k)\, dt \quad \text{dove } L(t,\xi) = g_{ij}(u(t))\, \xi^i\, \xi^j\,.$$

Siccome $L(t,\xi)$ è continua e convessa rispetto a ξ, si ha che

$$\int_0^1 L(t,\dot{u})\, dt \leq \liminf \int_0^1 L(t,\dot{u}_k)\, dt\,.$$

In conclusione $E(u) \leq \liminf E(u_k)$. □

Lemma 6.11. *Se $u \in W^{1,2}_{a,b}$ è punto di minimo di E in $W^{1,2}_{a,b}$ allora $u \in C^*$.*

Per dimostrare il lemma 6.11 è utile ricordare i seguenti fatti sulle funzioni assolutamente continue:

- una funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua se e solo se esiste una funzione $g \in L^1(0,1)$ tale che $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\, ds$ per ogni $t \in [0,1]$. In particolare una funzione assolutamente continua è continua e derivabile quasi ovunque (in senso classico).

- Se $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sono assolutamente continue, allora anche fg lo è e $(fg)' = f'g + fg'$.
- Se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua e $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lipschitziana sull'immagine di f, allora $\phi \circ f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua e $(\phi \circ f)' = (\phi' \circ f) f'$ quasi ovunque.
- $W^{1,1}(0,1)$ coincide con lo spazio delle funzioni assolutamente continue in $[0,1]$. In particolare se $f \in W^{1,1}(0,1)$ allora f è derivabile in senso classico in quasi ogni punto di $(0,1)$ e la derivata debole di f coincide quasi ovunque con la derivata di f in senso classico.

Dimostrazione. Fissato $u \in W^{1,2}((0,1), \mathbb{R}^n)$, poniamo

$$f = \frac{\partial Q}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}) \quad \text{e} \quad \widetilde{f} = \frac{\partial Q}{\partial u}(u, \dot{u}) \tag{15}$$

cioè

$$f_i = \frac{\partial Q}{\partial \dot{u}^i}(u, \dot{u}) = 2 g_{ij}(u)\, \dot{u}^j \quad \text{e} \quad \widetilde{f}_i = \frac{\partial Q}{\partial u^i}(u, \dot{u}) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}(u)\, \dot{u}^j\, \dot{u}^k \quad (i = 1, ..., n) \tag{16}$$

ed osserviamo che $f \in L^2((0,1), \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{f} \in L^1((0,1), \mathbb{R}^n)$. Ragionando come nella dimostrazione del lemma 5.2 e sfruttando in particolare l'immersione di $W^{1,2}(0,1)$ in $C([0,1])$, si può dimostrare che per ogni $h \in W^{1,2}((0,1), \mathbb{R}^n)$ esiste la derivata direzionale di E in u nella direzione di h ed è data da

$$\frac{\partial E}{\partial h}(u) = \int_0^1 \left[\frac{\partial Q}{\partial u}(u, \dot{u}) \cdot h + \frac{\partial Q}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}) \cdot \dot{h} \right] dt\,.$$

In particolare se $u \in W^{1,2}_{a,b}$ è punto di minimo di E in $W^{1,2}_{a,b}$, allora u è un punto stazionario di E cioè verifica l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial Q}{\partial u}(u, \dot{u}) \cdot h + \frac{\partial Q}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}) \cdot \dot{h} \right] dt = 0 \quad \forall h \in W^{1,2}_0((0,1), \mathbb{R}^n)\,.$$

Con le notazioni (15), tale equazione si scrive:

$$\int_0^1 \left[\widetilde{f} \cdot h + f \cdot \dot{h} \right] dt = 0 \quad \forall h \in W^{1,2}_0((0,1), \mathbb{R}^n)\,.$$

Per la definizione di derivata debole, ciò significa che f è derivabile in senso debole e $\dot{f} = \widetilde{f}$. Quindi $f \in W^{1,1} := W^{1,1}((0,1), \mathbb{R}^n)$. Ricordiamo che la matrice (g_{ij}) è invertibile e, denotata (g^{ij}) la sua inversa, dalla prima equazione di (16) segue che

$$u^i = \frac{1}{2} g^{ij}(u)\, f_j\,. \tag{17}$$

Essendo le g_{ij} localmente lipschitziane e $u \in W^{1,1}$, anche $g^{ij}(u) \in W^{1,1}$ e quindi, essendo $W^{1,1}$ un'algebra, anche $\dot{u}^i \in W^{1,1}$. In particolare $\dot{u} \in C([0,1],\mathbb{R}^n)$ cioè $u \in C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. Inoltre, dall'essere $g^{ij}(u), \dot{u}^i \in W^{1,1}$ segue che

$$Q(u,\dot{u}) = g_{ij}(u)\dot{u}^i\dot{u}^j \in W^{1,1}.$$

In modo analogo si ottiene che $\dot{f} \in W^{1,1}$ per via dell'espressione di $\dot{f} = \widetilde{f}$ e perché $\frac{\partial g^{jk}}{\partial u^i}(u), \dot{u}^i \in W^{1,1}$. Allora possiamo calcolare per quasi ogni $t \in [0,1]$

$$\frac{d}{dt}[Q(u,\dot{u})] = \frac{\partial Q}{\partial u}(u,\dot{u})\cdot\dot{u} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{u}}(u,\dot{u})\cdot\ddot{u} = \dot{f}\cdot\dot{u} + f\cdot\ddot{u} = \frac{d}{dt}\left(\dot{f}\cdot\dot{u}\right) = \frac{d}{dt}[2\,Q(u,\dot{u})]$$

da cui segue che $\frac{d}{dt}[Q(u,\dot{u})] = 0$ quasi ovunque. Quindi esiste $c_0 \geq 0$ tale che $Q(u(t),\dot{u}(t)) = c_0$ per ogni $t \in [0,1]$. Siccome $\sqrt{c_0} = F(u) = \mathcal{L}(\phi^{-1}\circ u) \geq d(p,q)$ e $p \neq q$, deve essere $c_0 > 0$. □

conclusione della dimostrazione del teorema 6.6. Per il lemma 6.10, esiste $u \in W^{1,2}_{a,b}$ punto di minimo di E in $W^{1,2}_{a,b}$. Per il lemma 6.11, $u \in C^*$ e quindi, in particolare, u è punto di minimo di E in C. Per il lemma 6.9, u è anche punto di minimo di F in C e infine, per il lemma 6.8, $\phi^{-1}\circ u$ è punto di minimo di $\mathcal{L}$ in $\Gamma_{p,q}$. □

Notiamo che in generale non vi è unicità nel problema di minimo $\inf_{\gamma\in\Gamma_{p,q}}\mathcal{L}(\gamma)$. Ad esempio se M è la sfera e p, q sono poli, tutti i meridiani sono curve di minima distanza. L'assenza di unicità per tale problema è legata all'assenza di convessità della lagrangiana Q rispetto a u. Infine proviamo:

Teorema 6.12. *La curva di minima distanza riemanniana trovata nel teorema 6.6 è una geodetica cioè verifica l'equazione*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0 \tag{18}$$

dove ∇ denota la connessione di Levi-Civita.

Dimostrazione. Sia u la curva ottenuta come minimo del funzionale E in $W^{1,2}_{a,b}$. Nella dimostrazione del lemma 6.11 si è provato che $\dot{u} \in W^{1,1}$. Possiamo calcolare $\ddot{u}$ derivando (17). Tenuto conto che $\dot{f} = \widetilde{f}$, troviamo

$$\ddot{u}^i = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k}(u)\,\dot{u}^k\,f_j + \frac{1}{2}g^{ij}(u)\,\frac{\partial g_{\ell k}}{\partial u^j}(u)\,\dot{u}^\ell\,\dot{u}^k\,.$$

Da tale formula deduciamo che anche $\ddot{u} \in W^{1,1}$ e quindi $u \in C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$. Di conseguenza u risolve le equazioni di Eulero-Lagrange in forma differenziale

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Q}{\partial \dot{u}}(u,\dot{u})\right] = \frac{\partial Q}{\partial u}(u,\dot{u})$$

che, facendo i conti, equivalgono al sistema

$$\ddot{u}^i + \Gamma^i_{jk}\, \dot{u}^j\, \dot{u}^k = 0 \quad (i = 1, ..., n) \tag{19}$$

dove Γ^i_{jk} sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita, dati da

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\ell}(u) \left[\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^k}(u) + \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial u^j}(u) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^\ell}(u) \right].$$

L'equazione (19) è la scrittura in coordinate locali della (18). Perciò $\gamma = \varphi^{-1} \circ u$ è una geodetica. □

Osservazione 6.13. *L'equazione delle geodetiche* (18) *dice che il moto lungo la curva γ avviene con accelerazione nulla. Tale equazione non è invariante per cambi di parametrizzazione. Se $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ è una curva che minimizza la distanza riemanniana tra p e q, non tutte le sue parametrizzazioni risolvono* (19) *perché non tutte le sue parametrizzazioni sono punti stazionari del funzionale energia cinetica E. In effetti solo i punti stazionari di E hanno velocità riemanniana costante. Quindi le geodetiche sono punti stazionari dell'energia e non della lunghezza. Nella dimostrazione che abbiamo sviluppato si è trovato una curva che è punto di minimo di F e anche punto stazionario di E.*

Riferimenti bibliografici

Per gli aspetti di geometria differenziale si è fatto riferimento a:

- Ben Andrews, Lectures on Differential Geometry (http://maths-people.anu.edu.au/∼andrews/DG/)
- Sigmundur Gudmundsson, An Introduction to Riemannian Geodesics (http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/Riemann.pdf)

Per la discussione del problema variazionale sono stati adattati argomenti presentati in:

- Giuseppe Buttazzo, Mariano Giaquinta, Stefan Hildebrandt: One-dimensional Variational Problems, Oxford Science Publications (1998).

7 Il problema di Plateau

7.1 Formulazione del problema

Sia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria nel piano e sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ il disco unitario aperto.

Definizione 7.1. *Una curva di Jordan in $\mathbb{R}^3$ è l'immagine Γ di una funzione continua e iniettiva $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$, detta parametrizzazione della curva. Una curva di Jordan Γ è detta C^1 a tratti se ammette una parametrizzazione C^1 a tratti.*

Definizione 7.2. *Una superficie parametrica del tipo del disco in $\mathbb{R}^3$ è l'immagine Σ di una funzione $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Se $u_x \wedge u_y \neq 0$ in ogni punto di Ω, la funzione u è una parametrizzazione* regolare *della superficie Σ e la si chiama anche* immersione*. Il bordo di Σ è dato da $\partial\Sigma = u(\partial\Omega)$.*

La condizione $u_x \wedge u_y \neq 0$ permette di definire in ogni punto $p = u(x, y)$ di Σ un versore normale $N = \frac{u_x \wedge u_y}{|u_x \wedge u_y|}$ ed un piano tangente $T_p\Sigma = \{p \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle p, N\rangle = 0\}$. In particolare i vettori u_x e u_y appartengono al piano tangente.

Il problema di Plateau consiste nella ricerca di superfici parametriche del tipo del disco che minimizzano l'area tra tutte quelle che hanno come bordo una data curva di Jordan. Si tratta di uno dei problemi classici dell'Analisi geometrica e uno dei più grandi successi del metodo diretto nel calcolo delle variazioni. È stato formulato da Lagrange (1760) e prende nome dal fisico belga Joseph Plateau che realizzò esperimenti con pellicole di acqua saponata. Il problema è stato risolto indipendentemente da T. Radó e J. Douglas nel 1930. Per questo, il secondo fu insignito della prima medaglia Fields (1936). Il nostro obiettivo è dimostrare il seguente risultato:

Teorema 7.3. *Se Γ è una curva di Jordan C^1 a tratti in $\mathbb{R}^3$, allora esiste una superficie parametrica del tipo del disco Σ che minimizza l'area tra tutte le superfici con bordo Γ.*

Dalla geometria differenziale, l'area di una superficie parametrica Σ con parametrizzazione $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ è data da

$$\operatorname{area}(\Sigma) = \int_\Omega \sqrt{\det(\nabla u^\top \nabla u)}\, dx\, dy \quad \text{dove} \quad \nabla u = (u_x,\, u_y) = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{1y} \\ u_{2x} & u_{2y} \\ u_{3x} & u_{3y} \end{bmatrix}.$$

Si può verificare che

$$\sqrt{\det(\nabla u^\top \nabla u)} = \sqrt{|u_x|^2|u_y|^2 - (u_x \cdot u_y)^2} = |u_x \wedge u_y|\,.$$

Dato che

$$|u_x \wedge u_y| \leq \frac{1}{2}(|u_x|^2 + |u_y|^2) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2, \tag{20}$$

il *funzionale dell'area*

$$A(u) := \int_\Omega |u_x \wedge u_y|\, dx\, dy$$

è ben definito per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Fissata una curva di Jordan Γ in $\mathbb{R}^3$, poniamo

$$\mathcal{C}_\Gamma = \{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid u|_{\partial\Omega} \text{ parametrizzazione debolmente monotona di } \Gamma\}$$

dove per *parametrizzazione debolmente monotona di* Γ si intende una funzione continua $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(\mathbb{S}^1) = \Gamma$ e $\gamma^{-1}(\Gamma')$ è connesso per ogni insieme connesso $\Gamma' \subset \Gamma$. Si noti che una parametrizzazione debolmente monotona può non essere iniettiva (perché γ può mantenersi costante su un certo arco di $\mathbb{S}^1$). Quindi non è detto che sia una parametrizzazione nel senso della definizione 7.1.

In generale non basta che la curva di Jordan Γ ammetta una parametrizzazione continua per garantire che $\mathcal{C}_\Gamma$ sia non vuoto. Esistono infatti funzioni continue su $\mathbb{S}^1$ che non ammettono estensioni su $\overline{\Omega}$ appartenenti a $W^{1,2}(\Omega)$. Tuttavia appena Γ è più regolare, si può concludere che $\mathcal{C}_\Gamma$ è non vuoto. Più precisamente:

Lemma 7.4. *Se Γ è una curva di Jordan C^1 a tratti, allora $\mathcal{C}_\Gamma \neq \varnothing$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, Γ è l'immagine omeomorfa di una funzione continua $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$, di classe C^1 a tratti. Quindi esiste una funzione continua e 2π-periodica $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(e^{i\theta}) = g(\theta)$ e una partizione $\{0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n = 2\pi\}$ tale che $g \in C^1([\theta_{j-1}, \theta_j], \mathbb{R}^3)$ per ogni $j = 1, ..., n$. Sia $v\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che $v(0) = 0$ e $v(r) = 1$ per $r \in [1-\delta, 1]$. Definiamo $u(x,y) = v(r)g(\theta)$ in coordinate polari. Risulta $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus (R_0 \cup ... \cup R_n), \mathbb{R}^3)$ dove $R_j = \{re^{i\theta_j} \mid r \geq 0\}$. In particolare u è una funzione lipschitziana e $u|_{\partial\Omega} = \gamma$. Perciò $u \in \mathcal{C}_\Gamma$. □

Il nostro obiettivo è studiare il problema di minimizzazione

$$\inf_{u \in \mathcal{C}_\Gamma} A(u)\,. \tag{21}$$

Il problema di minimizzazione (21) esibisce due principali difficoltà:

- Il funzionale dell'area è invariante rispetto a diffeomorfismi del disco per ogni diffeomorfismo g di $\overline{\Omega}$ su se stesso e per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ si ha $A(u \circ g) = A(u)$.
- Il funzionale dell'area non è coercivo: potrebbe mantenersi $u_x \wedge u_y$ limitato anche se $|u_x|$ e $|u_y|$ divergono. Ciò causa la possibilità di fenomeni patologici: un disco a cui sono attaccati dei fili ("hairy disk") ha la stessa area del disco liscio.

Nello stesso spirito del problema delle geodetiche, possiamo superare alcune difficoltà sostituendo il funzionale dell'area con un altro funzionale detto "energia" così definito

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy\,.$$

Ciò è possibile grazie al seguente teorema:

Teorema 7.5 (Morrey)**.** $\forall \varepsilon > 0\ \forall u \in \mathcal{C}_\Gamma\ \exists \widetilde{u} \in \mathcal{C}_\Gamma$ *tale che* $E(\widetilde{u}) \leq A(u) + \varepsilon$.

Possiamo comprendere meglio il contenuto di tale risultato osservando che per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ si ha

$$A(u) \leq E(u) \quad \text{e} \quad A(u) = E(u) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} |u_x| = |u_y| \\ u_x \cdot u_y = 0 \end{cases} \quad \text{q.o. in } \Omega\,. \tag{22}$$

La disuguaglianza $A(u) \leq E(u)$ segue da (20). Dato che $|u_x \wedge u_y| = \sqrt{|u_x|^2|u_y|^2 - (u_x \cdot u_y)^2}$ e $|\nabla u|^2 = (|u_x| - |u_y|)^2 + 2\,|u_x|\,|u_y|$, si ha che

$$\begin{aligned} A(u) = E(u) \ &\Leftrightarrow \ |u_x|^2|u_y|^2 - (u_x \cdot u_y)^2 = \left[\frac{1}{2}(|u_x| - |u_y|)^2 + |u_x|\,|u_y|\right]^2 \\ &\Leftrightarrow -(u_x \cdot u_y)^2 = \frac{1}{4}(|u_x| - |u_y|)^4 + \frac{1}{2}(|u_x| - |u_y|)^2|u_x||u_y| \ \Leftrightarrow \begin{cases} |u_x| = |u_y| \\ u_x \cdot u_y = 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Le equazioni $|u_x| = |u_y|$ e $u_x \cdot u_y = 0$ sono note come *condizioni di conformalità* ed esprimono il fatto che i vettori tangenti u_x e u_y hanno eguale lunghezza e sono ortogonali. Le parametrizzazioni u che verificano tali condizioni si chiamano parametrizzazioni conformi. La differenza tra i funzionali di area e di energia di una fissata parametrizzazione u misura in un certo senso la mancanza di conformalità di u. Il teorema di Morrey dice che possiamo sempre sostituire una parametrizzazione con un'altra che è prossima quanto si vuole all'essere conforme. Infatti tale teorema è anche noto come lemma di ε-conformalità. Una sua dimostrazione si trova in: F. Sauvigny, Partial differential equations 2 (§10, Proposition 1; §8). Una dimostrazione alternativa, di natura variazionale, è esposta in: M. Struwe, Plateau's problem and the Calculus of Variations (Appendix, Part A, Ch. 1). Grazie al teorema di Morrey possiamo sostituire il problema di minimizzazione (21) con il seguente

$$\inf_{u \in \mathcal{C}_\Gamma} E(u)\,. \tag{23}$$

Infatti:

Lemma 7.6. *Si ha che* $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma} A = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E$ *e se* $u \in \mathcal{C}_\Gamma$ *è punto di minimo di* E*, allora lo è anche di* A *e* u *verifica le condizioni di conformalità q.o.*

Dimostrazione. Dalla prima disuguaglianza in (22) segue che $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma} A \leq \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E$. Dal teorema di Morrey segue che $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E \leq A(u) + \varepsilon\ \forall u \in \mathcal{C}_\Gamma, \forall \varepsilon > 0$. Perciò $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E \leq \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} A\ \forall \varepsilon > 0$. Quindi vale l'uguaglianza. Infine, se $u \in \mathcal{C}_\Gamma$ soddisfa $E(u) = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E$, allora per (22), $A(u) \leq E(u) = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} A$. Quindi $A(u) = E(u)$ e la conclusione segue da (22). □

Grazie al lemma 7.6 possiamo concentrarci sullo studio del problema di minimizzazione (23). Il funzionale dell'energia possiede buone proprietà: è continuo e convesso. Tuttavia l'insieme di

minimizzazione $\mathcal{C}_\Gamma$ non è debolmente chiuso. Ciò dipende dal fatto che il funzionale dell'energia è invariante rispetto al gruppo dei diffeomorfismi conformi di $\overline{\Omega}$ su se stesso e tale gruppo non è topologicamente chiuso. Esaminiamo più in dettaglio questi aspetti nel prossimo paragrafo.

7.2 Il gruppo conforme del disco

Un diffeomorfismo tra due sottoinsiemi aperti A e B di $\mathbb{R}^n$ si dice *conforme* se preserva gli angoli, cioè:

$$\frac{\langle DF(x)u, DF(x)v\rangle}{|DF(x)u||DF(x)v|} = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \forall x \in A.$$

Ciò equivale a dire

$$\forall x \in A\ \exists \lambda(x) > 0 \text{ tale che } \langle DF(x)u, DF(x)v\rangle = \lambda(x)\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

o anche

$$\forall x \in A\ \exists \lambda(x) > 0 \text{ tale che } \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \lambda(x)\delta_{ij}\langle u, v\rangle \quad \forall i, j = 1, ..., n\,.$$

In dimensione $n = 2$, scrivendo $(x_1, x_2) = (x, y)$, si ha che

$$F \text{ conforme } \Leftrightarrow \begin{cases} |F_x| = |F_y| \\ F_x \cdot F_y = 0\,. \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2$ si possono verificare due sole possibilità:

- F conserva sia gli angoli sia l'orientazione, cioè $F_y =$ rotazione di $F_x$di un angolo di 90°. In notazione complessa questo significa $F_y = iF_x$, cioè, posto $F = \varphi + i\psi$,

$$\begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases} \Leftrightarrow F \text{ olomorfa.}$$

- F conserva gli angoli ma inverte l'orientazione, cioè $F_x =$ rotazione di F_y di un angolo di 90°. In notazione complessa questo significa $F_y = -iF_x$, cioè, posto $F = \varphi + i\psi$,

$$\begin{cases} \varphi_x = -\psi_y \\ \varphi_y = \psi_x \end{cases} \Leftrightarrow F \text{ anti-olomorfa.}$$

Abbiamo così provato che

Lemma 7.7. *Le trasformazioni conformi del piano che conservano gli angoli orientati sono le funzioni olomorfe con derivata complessa che non si annulla mai.*

In particolare, le trasformazioni conformi del disco sono le funzioni olomorfe $g\colon \Omega \to \Omega$ tali che $g'(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$, dove $z = (x, y)$ e g' denota la derivata complessa.

Lemma 7.8. *Se $g\colon \Omega \to \Omega$ è una trasformazione conforme del disco, allora $E(u \circ g) = E(u)$, per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

Dimostrazione. Posto $g = (\varphi, \psi)$, si ha che $Dg = \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ -\varphi_y & \varphi_x \end{bmatrix}$, grazie alle equazioni di Cauchy-Riemann. Inoltre $J_g = \det(Dg) = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = |g'|^2 \neq 0$ e

$$\nabla u\, Dg = [u_x \ \ u_y] \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ -\varphi_y & \varphi_x \end{bmatrix} = [\varphi_x u_x + \varphi_y u_y \ \ \varphi_y u_x - \varphi_x u_y]\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(u \circ g)|^2\, dx\, dy &= \int_\Omega |\nabla u(g(x,y))\, Dg(x,y)|^2\, dx\, dy \\ &= \int_\Omega \left[|u_x|^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + |u_y|^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \right] dx\, dy \\ &= \int_\Omega |\nabla u(g(x,y))|^2\, |J_g(x,y)|\, dx\, dy \\ &= \int_{g(\Omega)} |\nabla u(x', y')|^2\, dx'\, dy' = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy\,. \quad \square \end{aligned}$$

Una *trasformazione di Möbius* o *trasformazione lineare fratta* è una funzione di variabile complessa a valori complessi della forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \ \text{ tali che } \ ad - bc \neq 0.$$

È conveniente considerare le trasformazioni di Möbius come funzioni dal piano complesso compattificato $\mathbb{C}^*$ in sé definendo $f\big(-\frac{d}{c}\big) = 0$ e $f(\infty) = \frac{a}{c}$, con la convenzione che $\frac{1}{0} = \infty$. Le trasformazioni di Möbius sono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^*$ con derivata complessa mai nulla. Dunque sono trasformazioni conformi del piano complesso compattificato.

Osservazione 7.9. *(1) La classe delle trasformazione di Möbius è un gruppo rispetto alla composizione ed è omomorfo al gruppo delle matrici $GL(2, \mathbb{C})$ mediante la corrispondenza*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Si ha che $f_A \circ f_B = f_{AB}$, $f_I = \mathrm{id}$ *e* $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$.

(2) Il gruppo delle trasformazioni di Möbius contiene alcuni sottogruppi significativi, consistenti nelle seguenti trasformazioni: traslazioni $z \mapsto z + w$ *(*$w \in \mathbb{C}$*), omotetie* $z \mapsto \lambda z$ *(*$\lambda > 0$*), rotazioni* $z \mapsto e^{i\varphi} z$ *(*$\varphi \in \mathbb{R}$*), inversione* $z \mapsto z^{-1}$*. Ogni trasformazione di Möbius può essere ottenuta come opportuna combinazione di queste.*

(3) Una trasformazione di Möbius è univocamente determinata dai suoi valori in 0*,* 1 *e* ∞*. Equivalentemente, fissati tre valori distinti* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$*, la funzione*

$$f(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

è l'unica trasformazione di Möbius tale che $f(z_1) = 0$*,* $f(z_2) = 1$ *e* $f(z_3) = \infty$*.*

L'insieme

$$G = \left\{ g \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \mid g(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{\overline{a} z - 1},\ \varphi \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{C},\ |a| < 1 \right\}$$

è il gruppo delle trasformazioni di Möbius del disco in sè. Più precisamente, ogni $g \in G$ verifica $g(\Omega) = \Omega$ e $g(\partial\Omega) = \partial\Omega$. Si dimostra che G è la classe di tutte le trasformazioni conformi del disco (cfr. W. Rudin, Real and Complex Analysis, Theorem 12.6).

Proposizione 7.10. *La classe* $\mathcal{C}_\Gamma$ *non è debolmente chiusa in* $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Dimostrazione. Prendiamo una successione $(a_n) \subset \Omega$ tale che $a_n \to a \in \partial\Omega$ e poniamo

$$g_n(z) = \frac{z - a_n}{\overline{a}_n z - 1}.$$

Inoltre, fissata $u \in \mathcal{C}_\Gamma$, poniamo $u_n = u \circ g_n$. Dato che $g_n \in G$, si ha che $u_n \in \mathcal{C}_\Gamma$ e $\|u_n\|_\infty = \|u\|_\infty$. Inoltre per il lemma 7.8, $\|\nabla u_n\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}$. Ma $g_n(z) \to a$ per ogni $z \in \Omega$ e quindi $u_n \to u(a)$ debolmente in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ e puntualmente q.o. Il limite debole è la funzione costante $u(a)$ che non appartiene a $\mathcal{C}_\Gamma$. □

7.3 Il problema di minimizzazione ridotto

Il problema dovuto al fatto che la classe $\mathcal{C}_\Gamma$ non è debolmente chiusa può essere superato selezionando una opportuna sottoclasse di $\mathcal{C}_\Gamma$, in maniera tale da impedire il fenomeno di concentrazione ad un punto esibito nella dimostrazione della proposizione 7.10. Ciò si realizza nel modo seguente.

Sia γ una fissata parametrizzazione della curva di Jordan Γ. Fissiamo $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$ e poniamo $p_j = \gamma(e^{i\theta_j})$. La terna ordinata $\{p_1, p_2, p_3\}$ definisce anche un'orientazione su Γ. Ora poniamo

$$\mathcal{C}_\Gamma^* = \left\{ u \in \mathcal{C}_\Gamma \mid u\big(e^{i\theta_j}\big) = p_j \;\; j = 1, 2, 3 \right\}$$

La condizione introdotta nella definizione di $\mathcal{C}_\Gamma^*$ è detta *condizione dei tre punti* e definisce una relazione d'equivalenza in $\mathcal{C}_\Gamma$ nel senso del lemma seguente.

Lemma 7.11. *$\forall u \in \mathcal{C}_\Gamma \; \exists g \in G$ tale che $u \circ g \in \mathcal{C}_\Gamma^*$. In particolare $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma^*} E = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E$ e se u è punto di minimo di E in $\mathcal{C}_\Gamma^*$ allora lo è anche in $\mathcal{C}_\Gamma$.*

Dimostrazione. Fissata $v \in \mathcal{C}_\Gamma$, siano $z_j \in \partial\Omega$ tali che that $u(z_j) = p_j$ $(j = 1, 2, 3)$. In base all'osservazione 7.9 (3), esistono delle trasformazioni di Möbius g_1 e g_2 tali che $g_1(p_1) = 0 = g_2\big(e^{i\theta_1}\big)$, $g_1(p_2) = 1 = g_2\big(e^{i\theta_2}\big)$, $g_1(p_3) = \infty = g_2\big(e^{i\theta_3}\big)$. La funzione $g = g_1^{-1} \circ g_2$ risulta essere una trasformazione conforme del disco in sè. Quindi $w := v \circ g \in \mathcal{C}_\Gamma$ e per il lemma 7.8 $E(v) = E(w)$. Inoltre $w\big(e^{i\theta_j}\big) = p_j$ $(j = 1, 2, 3)$, cioè $w \in \mathcal{C}_\Gamma^*$. Quindi $E(w) \geq E(u)$, essendo u punto di minimo di E in $\mathcal{C}_\Gamma^*$. Dunque $E(v) \geq E(u)$ per ogni $v \in \mathcal{C}_\Gamma$ cioè u è punto di minimo di E anche in $\mathcal{C}_\Gamma$. □

Grazie al lemma 7.11 possiamo limitarci a studiare il problema di minimo *ridotto*

$$\inf_{u \in \mathcal{C}_\Gamma^*} E(u)\,.$$

Lemma 7.12. *Esiste $v \in \mathcal{C}_\Gamma^*$ tale che $E(v) = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma^*} E$. Inoltre $\overline{v}$ è una funzione armonica in Ω, è di classe C^∞ e verifica le condizioni di conformalità in Ω.*

Dimostrazione. Sia $(u_n) \subset \mathcal{C}_\Gamma^*$ una successione minimizzante per E (che esiste perché $\mathcal{C}_\Gamma$ e quindi anche $\mathcal{C}_\Gamma^*$ sono non vuoti). Per ogni n esiste $v_n \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = \gamma_n & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{dove } \; \gamma_n = u_n|_{\partial\Omega}\,.$$

In particolare $v_n \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ e

$$E(v_n) = \min\{E(u) \mid u \in u_n + W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)\}\,.$$

Allora $E(v_n) \leq E(u_n)$ e dunque anche (v_n) è una successione minimizzante per E in $\mathcal{C}_\Gamma^*$. Dato che ogni v_n soddisfa la condizione dei tre punti e $\sup_n \|\nabla v_n\|_{L^2} < \infty$, si ha che

Lemma 7.13. *La successione $(\gamma_n) \subset C(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente su $\partial\Omega$ ad una certa funzione $\overline{\gamma} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

Lasciamo in sospeso la dimostrazione del lemma 7.13 e completiamo quella del lemma 7.12. Sia $\overline{v}$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = \overline{\gamma} & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Affermiamo che

$$v_n \to \overline{v} \text{ uniformemente in } \overline{\Omega} \tag{24}$$

$$\nabla v_n \to \nabla \overline{v} \text{ puntualmente in } \Omega. \tag{25}$$

Assumendo per un momento che (24) e (25) siano vere, la dimostrazione può essere completata in questo modo: per (24), $\overline{v}|_{\partial\Omega}$ è una parametrizzazione debolmente monotona di Γ e $\overline{v}$ soddisfa la condizione dei tre punti. Inoltre $\overline{v} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ e quindi, in particolare, $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Infine, per (25) e per il lemma di Fatou

$$E(\overline{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^2 \, dx\, dy \le \liminf \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx\, dy = \inf_{\mathcal{C}_\Gamma} E\,.$$

Ciò implica che $\overline{v} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ e quindi $\overline{v} \in \mathcal{C}^*_\Gamma$, e che $\overline{v}$ è punto di minimo di E. Infine $\overline{v}$ è armonica in Ω, per costruzione, è di classe C^∞ in Ω in quanto armonica, e verifica le condizioni di conformalità in Ω per il lemma 7.6.

Dimostrazione di (24). La funzione $w = v_n - \overline{v}$ risolve

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = \gamma_n - \overline{\gamma} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Quindi per il principio del massimo, ogni componente v_n^i di v_n ($i = 1, 2, 3$) verifica

$$\|v_n^i - \overline{v}^i\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\gamma_n^i - \overline{\gamma}^i\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\,.$$

Allora, grazie anche al lemma 7.13, si ha che

$$\|v_n - \overline{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\gamma_n - \overline{\gamma}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \to 0\,.$$

Dimostrazione di (25). Si usa il seguente risultato:

Lemma 7.14. *Se $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è una funzione armonica in Ω, allora*

$$|\nabla w(z)| \le \frac{1}{\pi r^2}\int_{\partial B_r(z)} |w| ds \;\; \forall z \in \Omega, \;\; \forall r \in (0, \operatorname{dist}(z, \partial\Omega))\,.$$

Dimostrazione del lemma 7.14. Essendo w armonica in Ω, $w \in C^\infty(\Omega)$ e anche $\partial_{x_i} w$ è armonica in Ω. Per la proprietà della media delle funzioni armoniche, per ogni disco $B_r(z) \subset\subset \Omega$ si ha

$$|\partial_{x_i} w(z)| = \left| \fint_{B_r(z)} \partial_{x_i} w(\zeta)\, d\zeta \right| = \frac{1}{\pi r^2} \left| \int_{B_r(z)} \operatorname{div}(w(\zeta) e_i)\, d\zeta \right|$$
$$= \frac{1}{\pi r^2} \left| \int_{\partial B_r(z)} (e_i \cdot \nu) w \, ds \right| \le \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(z)} |w|\, ds$$

avendo usato anche il teorema della divergenza. □

Dimostriamo ora (25). Applicando il lemma 7.14 ad ogni componente di $w = v_n - \overline{v}$ si ottiene

$$|\nabla v_n(z) - \nabla \overline{v}(z)| \le \frac{2}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(z)} |v_n - \overline{v}|\, d\sigma \le \frac{4}{r} \|v_n - \overline{v}\|_\infty \quad \forall B_r(z) \subset\subset \Omega\,.$$

Grazie a (24) si conclude. □

Dimostrazione del lemma 7.13. Si tratta della parte più tecnica e dedicata della discussione, dove la condizione dei tre punti entra in modo essenziale. Il lemma 7.13 può essere dimostrato mediante il teorema di Ascoli-Arzelà oppure usando il teorema di selezione di Helly sulle successioni di funzioni monotone, insieme ad un risultato aggiuntivo che assicura l'uniforme convergenza. Qui seguiamo questa seconda strategia, come svolto nel libro di Struwe: Variational Methods. Ricordiamo che (γ_n) è una successione di parametrizzazioni monotone di Γ che verificano

$$\gamma_n\big(e^{i\theta_j}\big) = \gamma\big(e^{i\theta_j}\big) \quad \forall j = 1,2,3\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{26}$$

dove $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ è una fissata parametrizzazione di Γ e $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$ sono pure fissati. Siccome ogni γ_n è una parametrizzazione monotona, esiste $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua e debolmente crescente, tale che

$$\gamma_n\big(e^{i\theta}\big) = \gamma\big(e^{i\varphi_n(\theta)}\big) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Da (26) segue che

$$\varphi_n(\theta_j) = \theta_j \quad \forall j = 1,2,3\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Inoltre $\varphi_n(\theta + 2\pi) = \varphi_n(\theta) + 2\pi$.

Teorema 7.15 (teorema di selezione di Helly)**.** *Sia (f_n) una successione di funzioni crescenti da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, con $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$. Allora esiste una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ed una sottosuccessione (f_{n_k}) tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per $k \to \infty$, per ogni $x \in [a,b]$. Inoltre se f è continua, allora $f_{n_k} \to f$ uniformemente.*

Applichiamo il teorema 7.15 alla successione (φ_n). Quindi esiste una funzione $\varphi\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ tale che per una sottosuccessione $\varphi_n(\theta) \to \varphi(\theta)$ per ogni $\theta \in [0,2\pi]$. In particolare φ è debolmente crescente e verifica

$$\varphi(\theta_j) = \theta_j \ \ \forall j = 1,2,3, \ \ \varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi\,.$$

Se dimostriamo che φ è continua, allora, per la seconda parte del teorema 7.15, $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente in $[0,2\pi]$ e conseguentemente $\gamma_n \to \overline{\gamma}$ uniformemente in $\partial\Omega$, essendo $\overline{\gamma}(\theta) = \gamma(e^{i\varphi(\theta)})$, e questo completa la dimostrazione del lemma 7.13.

Assumiamo per contraddizione che φ non sia continua in un certo $\theta^* \in [0,2\pi)$. Per costruzione, φ è una funzione debolmente crescente e $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2\pi$. Poniamo $\theta_0 = \theta_3 - 2\pi$ e $\theta_4 = \theta_1 + 2\pi$, esiste $j \in \{1,2,3\}$ tale che $\theta^* \in (\theta_{j-1}, \theta_{j+1})$. Poniamo

$$\Gamma_- = \left\{ \overline{\gamma}\left(e^{i\theta}\right) \mid \theta \in (\theta_{j-1}, \theta^*) \right\} \quad \text{e} \quad \Gamma_+ = \left\{ \overline{\gamma}\left(e^{i\theta}\right) \mid \theta \in (\theta^*, \theta_{j+1}) \right\}.$$

Quindi per ogni $\theta \in (\theta_{j-1}, \theta^*)$ e per ogni $\theta' \in (\theta^*, \theta_{j+1})$ si ha che

$$\theta_{j-1} = \varphi(\theta_{j-1}) \le \varphi(\theta) \le \varphi(\theta^*_-) < \varphi(\theta^*_+) \le \varphi(\theta') \le \varphi(\theta_{j+1}) = \theta_{j+1}\,.$$

Siccome $\overline{\gamma} = \gamma \circ e^{i\varphi}$, γ è un omeomorfismo, φ non è continua in θ^* ed esiste $p_k \in \{p_1, p_2, p_3\}$ che non appartiene a $\overline{\Gamma_-} \cup \overline{\Gamma_-}$, segue che

$$\operatorname{dist}(\Gamma_-, \Gamma_+) =: 2\varepsilon_0 > 0\,. \tag{27}$$

Dato che $\gamma_n \to \overline{\gamma}$ puntualmente su $\partial\Omega$,

$$\forall \theta^- \in (\theta_{j-1}, \theta^*)\,, \ \ \forall \theta^+ \in (\theta^*, \theta_{j+1}) \ \ \exists n_0 = n_0(\theta_-, \theta_+) \ \ : \ \ \operatorname{dist}(\Gamma_n^-, \Gamma_n^+) \ge \varepsilon_0 \quad \forall n \ge n_0\,. \tag{28}$$

dove

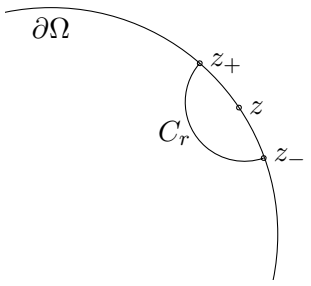
$$\Gamma_n^- = \left\{ \gamma_n\left(e^{i\theta}\right) \mid \theta \in [\theta_{j-1}, \theta^-] \right\} \quad \text{e} \quad \Gamma_n^+ = \left\{ \gamma_n\left(e^{i\theta}\right) \mid \theta \in [\theta^+, \theta_{j+1}] \right\}. \tag{29}$$

Ora utilizziamo il seguente risultato:

Lemma 7.16 (Courant-Lebesgue)**.** *$\forall \delta \in (0,1)$, $\forall u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega)$, $\forall z \in \partial\Omega$, $\exists r \in \left[\delta, \sqrt{\delta}\right]$, in generale dipendente da u e da z, tale che*

$$|u(z_+) - u(z_-)|^2 \le \frac{6\pi}{|\log \delta|} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\, dy$$

dove $z_\pm$ sono i due punti di $\partial\Omega$ tali che $|z_\pm - z| = r$.



Fine della dimostrazione del lemma 7.13. Sia $\varepsilon_0 > 0$ dato da (27). Sia $K > 0$ tale che $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \leq K\ \forall n$ e sia $\delta \in (0,1)$ tale che

$$\frac{6\pi K}{|\log \delta|} < \varepsilon_0^2 \quad \text{e} \quad \sqrt{\delta} < |e^{i\theta_{j\pm1}} - e^{i\theta^*}|\,.$$

Applichiamo il lemma 7.16 prendendo $z = e^{i\theta^*}$ e $u = v_n$. Allora per ogni n esiste $r_n \in \left[\delta, \sqrt{\delta}\right]$ tale per cui

$$|v_n(z_n^+) - v_n(z_n^-)|^2 \leq \frac{6\pi K}{|\log \delta|} < \varepsilon_0^2 \tag{30}$$

dove $z_n^\pm$ sono i due punti in $\partial\Omega$ con $|z_n^\pm - z| = r_n$. Infine, siano $\theta^\pm$ tali che $|e^{i\theta^\pm} - z| = \delta$. Allora $\gamma_n(z_n^\pm) \in \Gamma_n^\pm$ (definiti in (29)) e (30) implica

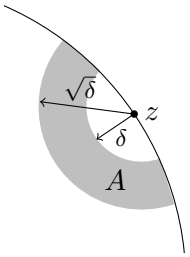
$$\operatorname{dist}(\Gamma_n^+, \Gamma_n^-) < \varepsilon_0$$

in contraddizione con (28). Dunque φ non ammette punti di discontinuità. □

Dimostrazione del lemma 7.16. Fissiamo $\delta \in (0,1)$, $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega)$, $z \in \partial\Omega$ e introduciamo gli insiemi

$$A = \{z' \in \Omega\ :\ \delta < |z' - z| < \sqrt{\delta}\} \quad \text{e} \quad C_r = \Omega \cap \partial B_r(z) \quad (\delta \leq r \leq \sqrt{\delta})$$

dove $B_r(z)$ denota il disco di raggio r e centro z.



Per ogni $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ esistono $\theta_-, \theta_+ \in [0, 2\pi)$ con $\theta_- < \theta_+$ tali che

$$C_r = \{z + re^{i\theta} \ : \ \theta_- < \theta < \theta_+\}\,.$$

Poniamo $w(\theta) = u(z + re^{i\theta})$ ed osserviamo che $|w'(\theta)| = |\nabla u(z + re^{i\theta}) \cdot ire^{i\theta}| \leq |\nabla u(z + re^{i\theta})|\, r$. Quindi, posto $z_\pm = z + re^{i\theta_\pm}$, si ha che $z_\pm \in \partial\Omega$ e

$$\begin{aligned} |u(z_+) - u(z_-)| &\leq \int_{\theta_-}^{\theta_+} |w'(\theta)|\, d\theta \leq \int_{\theta_-}^{\theta_+} |\nabla u(z + re^{i\theta})|\, r\, d\theta \\ &= \int_{C_r} |\nabla u|\, ds \leq \sqrt{|C_r|} \left(\int_{C_r} |\nabla u|^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} \left(r \int_{C_r} |\nabla u|^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{31}$$

D'altra parte, posto

$$\Phi(r) = r \int_{C_r} |\nabla u|^2\, ds$$

si ha che

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \int_A |\nabla u|^2 = \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \left(\int_{C_r} |\nabla u|^2\, ds \right) dr = \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \Phi(r)\, \frac{dr}{r} \geq \frac{1}{2} |\log \delta| \inf_{r \in [\delta, \sqrt{\delta}]} \Phi(r)\,.$$

Quindi esiste $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ tale che

$$\Phi(r) \leq \frac{3}{|\log \delta|} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

e allora, da (31), segue la tesi. □

Completiamo la presentazione del problema di Plateau enunciando senza dimostrazione i seguenti risultati. Sia $\overline{v} \in \mathcal{C}^*_\Gamma$ un punto di minimo di E in $\mathcal{C}^*_\Gamma$ e sia $\Sigma = \overline{v}(\Omega)$. Allora:

- $\overline{v}|_{\partial\Omega}$ è strettamente monotona e dunque iniettiva, cioè è una parametrizzazione di Γ nel senso della definizione 7.1 (cfr. Teorema 3, p.269 in: U. Dierkes, S. Hildebrandt, F. Sauvigny: Minimal Surfaces, GMW 339, Springer (2010)).

- $\overline{v}_x \wedge \overline{v}_y \neq 0$ in ogni punto di Ω, cioè $\overline{v}$ è una parametrizzazione regolare di Σ, nel senso della definizione 7.2 (cfr. U. Dierkes, S. Hildebrandt, F. Sauvigny: Minimal Surfaces, GMW 339, Springer (2010), p.339).

- La superficie Σ ha curvatura media nulla in ogni suo punto: infatti nei punti regolari la curvatura media si può calcolare mediante la formula

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}$$

  dove $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sono i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale, rispettivamente, dati da

$$\begin{gathered}\mathcal{E} = |\overline{v}_x|^2, \quad \mathcal{F} = \overline{v}_x \cdot \overline{v}_y, \quad \mathcal{G} = |\overline{v}_y|^2, \\ \mathcal{L} = \overline{v}_{xx} \cdot N, \quad \mathcal{M} = \overline{v}_{xy} \cdot N, \quad \mathcal{N} = \overline{v}_{yy} \cdot N,\end{gathered}$$

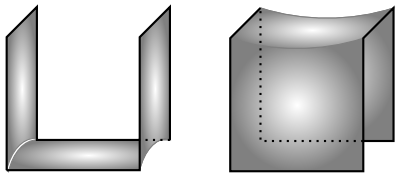
  e $N = \frac{\overline{v}_x \wedge \overline{v}_y}{|\overline{v}_x \wedge \overline{v}_y|}$ è il versore normale. Tenuto conto che $\overline{v}_x \wedge \overline{v}_y \neq 0$ e delle condizioni di conformalità, si ottiene che

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta\overline{v} \cdot N}{2|\overline{v}_x|^2} = 0$$

  perché $\overline{v}$ è armonica in Ω.

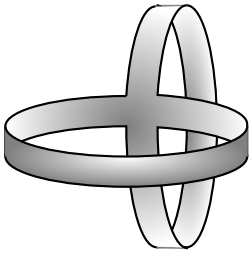
Le superfici con curvatura media nulla in ogni punto si chiamano *superfici minime* (in inglese "minimal surfaces"). Ci sono superfici minime che non sono minimi per il funzionale dell'area.

In generale il problema di Plateau non ha unicità di soluzione:



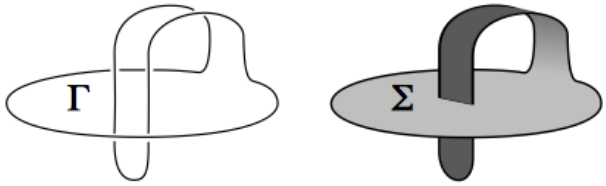
Un esempio di non unicità della superficie che minimizza l'area tra tutte le superfici con fissato bordo

Nella discussione del problema di Plateau sviluppata in precendenza viene fissato il tipo topologico delle superfici ammissibili (cioè il dominio delle parametrizzazioni). Tuttavia, in generale, la superficie parametrica corrispondente ad un punto di minimo per il problema può differire sostanzialmente dalla superficie di area minima con bordo Γ.



Un esempio di superficie di area minima che non è del tipo del disco per una data curva di Jordan.

Le superfici parametriche che minimizzano l'area sono immerse (nel senso che ammettono una parametrizzazione regolare) ma non sono necessariamente superfici iniettive, cioè possono ammettere auto-intersezioni.



Appendice: dimostrazione del teorema di selezione di Helly

Per ogni $x \in [a,b]$ la successione $(f_n(x))$ ammette un'estratta convergente. Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali. Sfruttando la numerabilità di $\mathbb{Q} \cap [a,b]$, con il metodo diagonale di Cantor, possiamo trovare una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ tale che per ogni $q \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ esiste $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(q) =: f(q)$. Estendiamo f su $[a,b]$ ponendo $f(x) = \sup_{q\in[a,x]\cap\mathbb{Q}} f(q)$. Osserviamo che f è una funzione crescente in $[a,b]$. Per definizione di $f(x)$,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists q \in [a,x) \cap \mathbb{Q} \;\; / \;\; f(q) > f(x) - \varepsilon \, .$$

Siccome $f_{n_k}(q) \leq f_{n_k}(x)$ per ogni k, passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene

$$f(x) - \varepsilon < f(q) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(q) \leq \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \, .$$

Quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \, .$$

Supponiamo ora che f sia continua in un punto x. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $y > x$ tale che $f(y) < f(x) + \varepsilon$. Per $q \in (x,y) \cap \mathbb{Q}$ si ha che

$$f_{n_k}(x) \leq f_{n_k}(q) \;\; \forall k \quad \text{e} \quad f(q) \leq f(y).$$

Quindi

$$\limsup f_{n_k}(x) \leq \limsup f_{n_k}(q) = \lim f_{n_k}(q) = f(q) \leq f(y) < f(x) + \varepsilon\,.$$

Allora, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$,

$$\limsup f_{n_k}(x) \leq f(x)\,.$$

Dunque abbiamo provato che $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ in ogni punto di continuità di f. Essendo f monotona, l'insieme dei suoi punti di non continuità è al più numerabile. Usando ancora il metodo diagonale di Cantor, possiamo trovare un'altra sottosuccessione di $(f_{n_k})_k$ che converge puntualmente a f in ogni $x \in [a,b]$. Dimostriamo infine che la convergenza è uniforme se f è continua. Infatti, per il teorema di Heine-Cantor,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \;\; \forall x, y \in [a,b]\,, \;\; |x - y| \leq \delta\,.$$

Prendiamo una partizione $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ con $x_i - x_{i-1} \leq \delta$ per ogni $i = 1, ..., n$. Si ha che

$$\forall i = 0, ..., n \;\; \exists k_i \in \mathbb{N} \;\; / \;\; |f_{n_k}(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon \;\; \forall k \geq k_i\,.$$

Sia $\overline{k} = \max\{k_0, ..., k_n\}$. Per ogni $x \in [a,b]$ esiste un indice $i \in \{1, ..., n\}$ tale che $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Allora, per ogni $k \geq \overline{k}$ si ha

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_i) - f(x_i)| - |f(x_i) - f(x)|\,.$$

Osserviamo che $|f_{n_k}(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon$ perché $k \geq k_i$. Inoltre $|f(x_i) - f(x)| \leq \varepsilon$ perché $|x - x_i| \leq \delta$. Infine,

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_i)| &= f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x) \leq f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_{i-1}) \\ &\leq |f_{n_k}(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f_{n_k}(x_{i-1})| \leq 3\varepsilon\,. \end{aligned}$$

In conclusione $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 5\varepsilon$ per ogni $k \geq \overline{k}$ e per ogni $x \in [a,b]$. Ciò significa che $f_{n_k} \to f$ uniformemente su $[a,b]$. □

Riferimenti bibliografici

- M. Struwe: Variational methods, pp. 19–25
- B. Dacorogna: Introduction to the Calculus of Variations, Ch. 5
- T. Colding, W. Minicozzi: A course in Minimal Surfaces, GSM-121, AMS (2011). pp. 133–146

- U. Dierkes, S. Hildebrandt, F. Sauvigny: Minimal Surfaces, GMW 339, Springer (2010).

Il teorema di selezione di Helly si può trovare sul testo di W. Rudin: Principi di Analisi matematica, p.166, es. 13.