9 Problemi ellittici lineari

Siamo interessati a studiare problemi della forma

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.1}$$

dove Ω è un dato dominio limitato di $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è una assegnata funzione e $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è l'incognita. Sulla funzione f chiediamo almeno che sia in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definizione 9.1. *Una* soluzione classica *di* (9.1) *è una funzione* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *che risolve* (9.1) *puntualmente. Una* soluzione debole *di* (9.1) *è una funzione* $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ *tale che*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = \int_\Omega (\lambda u + f)\, h \quad \forall h \in C^\infty_c(\Omega)\,.$$

Grazie al teorema della divergenza si può dimostrare che ogni soluzione classica che stia in $W^{1,2}(\Omega)$ è anche una soluzione debole (si usa un risultato che afferma che se $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ si annulla puntualmente su $\partial\Omega$ allora $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (cfr. Teorema 9.17 e osservazione 19 in H. Brezis: Functional Analyis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer 2011)). Siamo qui interessati alla ricerca di soluzioni deboli.

Quando $f = 0$ il problema (9.1) si riduce a

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.2}$$

ed ammette sempre la soluzione nulla. Tale problema si chiama problema agli autovalori.

Definizione 9.2. *Un numero* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che* (9.2) *ammette soluzioni deboli non nulle si dice* autovalore *dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo. Le soluzioni non nulle di* (9.2) *si dicono* autofunzioni *relative all'autovalore* λ*. Se* λ *è un autovalore, l'insieme delle soluzioni di* (9.2) *è uno spazio vettoriale, detto* autospazio *relativo all'autovalore* λ *e la sua dimensione algebrica si chiama* molteplicità dell'autovalore λ*. Un autovalore di molteplicità 1 si dice* semplice*.*

Le definizioni precedenti si estendono in maniera ovvia per problemi della forma

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.3}$$

dove $q \in L^\infty$ è una funzione assegnata. Gli operatori della forma $Lu = -\Delta u + q(x)u$ si chiamano *operatori di Schrödinger* e la funzione q si chiama potenziale. Tali operatori fanno parte della classe degli operatori ellittici del second'ordine e i problemi (9.3) sono detti problemi ellittici lineari (perché la dipendenza rispetto a u è lineare) con condizioni di Dirichlet al bordo.

Osservazione 9.3. *Si può fornire una simile trattazione anche per problemi ellittici lineari con condizioni di Neumann al bordo:*

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.4}$$

dove $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ denota la derivata di u in un generico punto del bordo di Ω rispetto al versore normale diretto verso l'esterno di Ω. In tal caso si assume che Ω sia un dominio regolare (almeno di classe C^1) in modo da assicurare l'esistenza del versore normale in ogni punto di $\partial\Omega$. Nella definizione di soluzione classica di (9.4) *si chiede $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soddisfacente il problema puntualmente, mentre per soluzione debole si intende una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = \int_\Omega (\lambda u + f)\, h \quad \forall h \in C^\infty(\overline{\Omega})\,.$$

Consideriamo ora il problema (9.1) e proviamo i seguenti risultati. Per quanto riguarda il problema agli autovalori (9.2) vale quanto segue:

Teorema 9.4. *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^N$, il problema* (9.2) *ammette una successione crescente di autovalori $\lambda_n > 0$ con $\lambda_n \to \infty$ e una successione di corrispondenti autofunzioni $\varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ che costituisce una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$. Inoltre ogni autovalore è uno dei λ_n e ogni autofunzione è in $C^\infty(\Omega)$.*

Per quanto riguarda il problema non omogeneo (9.1), detto anche *problema di Fredholm* per il laplaciano con condizioni di Dirichlet al bordo, vale il seguente risultato.

Teorema 9.5 (alternativa di Fredholm)**.** *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^N$, si ha che:*

(i) Se λ non è un autovalore, allora per ogni $f \in L^2(\Omega)$ il problema (9.1) *ammette una e una sola soluzione (debole).*

(ii) Se λ è un autovalore e $f \in L^2(\Omega)$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché (9.1) *ammetta soluzioni deboli è che $\int_\Omega f\varphi = 0$ per ogni autofunzione φ relativa a λ. In tal caso le soluzioni di* (9.1) *sono della forma $u = v + \varphi$ dove v è una particolare soluzione di* (9.1) *e φ è un'autofunzione relativa all'autovalore λ.*

I teoremi 9.4 e 9.5 valgono anche per i problemi (9.3) e (9.4), con le seguenti differenze:

- Non è detto che tutti gli autovalori siano positivi, mentre è sempre vero che $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ per ogni n e $\lambda_n \to \infty$ per $n \to \infty$.
- La regolarità delle autofunzioni φ_n (all'interno di Ω) dipende dalla regolarità del potenziale q. Se $q \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ allora $\varphi_n \in C^{2+k,\alpha}(\Omega)$.

Per quanto riguarda il problema di Neumann per il laplaciano, cioè il problema (9.4) con $q = 0$, il primo autovalore è $\lambda_1 = 0$ e le corrispondenti autofunzioni sono le costanti.

9.1 Dimostrazione del teorema 9.4

Iniziamo a discutere il seguente fatto:

Lemma 9.6. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ soluzione debole di*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{9.5}$$

Inoltre, l'operatore $f \mapsto R(f) =$ soluzione debole di (9.5) *è lineare e continuo da L^2 in $W_0^{1,2}$.*

L'operatore R è in un certo senso l'inverso del laplaciano da L^2 in $W_0^{1,2}$ (infatti si usa anche la notazione $(-\Delta)^{-1}$) e si chiama anche *operatore risolvente* per il laplaciano con condizioni di DIrichlet al bordo.

Dimostrazione. Per il principio di Dirichlet, il problema (9.5) può essere affrontato studiando il problema di minimizzazione

$$\inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} F(u) \quad \text{dove} \quad F(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu \right) \tag{9.6}$$

Ricordiamo che $W_0^{1,2}(\Omega)$ è spazio di Hilbert con norma $\|u\|_{W_0^{1,2}} = \|\nabla u\|_{L^2}$. Il funzionale F risulta convesso e continuo in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Inoltre è coercivo, grazie alla disuguaglianza di Poincaré, in base alla quale esiste $C > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^2} \le C\|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

Allora

$$F(u) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \ge \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}} - C\,\|f\|_{L^2}\|u\|_{W_0^{1,2}} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Ciò implica che se $\|u\|_{W_0^{1,2}} \to \infty$ allora $F(u) \to \infty$. Possiamo allora applicare il teorema di Weierstrass generalizzato per dedurre che il problema (9.6) ammette un punto di minimo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Per il principio di DIrichlet, tale u risulta soluzione debole del problema (9.5). Proviamo l'unicità. Se $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sono soluzioni di (9.5) allora $u = u_1 - u_2$ risolve

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

In particolare, prendendo $h = u$ troviamo $0 = \|\nabla u\|^2_{L^2} = \|u\|^2_{W_0^{1,2}}$ e quindi $u = 0$, cioè $u_1 = u_2$. È quindi ben definito l'operatore $R\colon L^2 \to W_0^{1,2}$ che associa ad ogni f la soluzione debole del

problema (9.5). La linearità di R è immediata. Proviamo che R è continuo. Posto $u = Rf$ si ha che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = \int_\Omega fh \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

In particolare, prendendo $h = u$ troviamo

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega fu \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}\,\|\nabla u\|_{L^2}$$

da cui $\|Rf\|_{W_0^{1,2}} = \|\nabla u\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}$. □

Ricordiamo ora due importanti teoremi.

Teorema 9.7 (Rellich-Kondrachov)**.** *L'immersione di $W_0^{1,2}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta.*

Teorema 9.8 (Hilbert-Schmidt)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert (reale o complesso) e sia $T\colon H \to H$ un operatore lineare compatto e autoaggiunto. Allora esistono un insieme al più numerabile $\{\mu_n\}_{n\in I}$ di autovalori non nulli di T (dove I è finito, eventualmente vuoto, oppure $I = \mathbb{N}$) e un insieme $\{u_n\}_{n\in I} \subset H$ di corrispondenti autovettori, tali che*

(i) $\mu_n \to 0$ per $n \to \infty$ se $I = \mathbb{N}$;

(ii) i vettori u_n sono ortonormali e $H = \ker T \oplus \overline{\operatorname{span}\{u_n\}}$.

Osservazione 9.9. *Dalle proprietà (i)–(ii) segue che ogni autovalore μ_n ha molteplicità finita e se μ è un autovalore non nullo di T allora deve essere uno dei μ_n.*

Per dimostrare il teorema 9.4 applichiamo il teorema 9.8 con $H = L^2(\Omega)$ e $T = J \circ R$ dove $R\colon L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ è l'operatore risolvente, definito nel lemma 9.6 e $J\colon W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è l'operatore identità. In base al teorema 9.7, J è un operatore compatto e quindi lo è anche T (la composizione di un operatore lineare continuo con un operatore lineare compatto è un operatore lineare compatto). Verifichiamo che T è autoaggiunto cioè $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ per ogni $f, g \in L^2(\Omega)$, dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota l'usuale prodotto interno in L^2. Osserviamo che

$$Tf = u \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = \int_\Omega fh \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

perché $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Siano $f, g \in L^2(\Omega)$ e siano $u = Tf$ e $v = Tg$. Allora

$$\langle Tf, g\rangle = \int_\Omega ug = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega vf = \langle f, Tg\rangle$$

cioè T è autoaggiunto. Ora proviamo che T è un operatore positivo cioè

$$\langle Tf, f\rangle \geq 0 \quad \forall f \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \langle Tf, f\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0\,. \tag{9.7}$$

Infatti, detto $u = Tf$, si ha che

$$\langle Tf, f\rangle = \int uf = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0$$

e se $\langle Tf, f\rangle = 0$ allora $u = 0$. Quindi

$$\int_\Omega fh = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

e di conseguenza $f = 0$. Da (9.7) segue che se μ è un autovalore di T, cioè $Tf = \mu f$ per qualche $f \in L^2(\Omega)$, $f \neq 0$, allora $0 < \langle Tf, f\rangle = \mu\|f\|^2$ e quindi $\mu > 0$. Avendo provato che T è un operatore (lineare) compatto e autoaggiunto, possiamo applicare il teorema 9.8. Dato che 0 non può essere autovalore di T, si ha che $\ker T = \{0\}$ e $L^2(\Omega) = \overline{\text{span}\{\varphi_n\}}$. In particolare i φ_n e quindi i μ_n devono essere infiniti e $\mu_n \to 0$ per $n \to \infty$. Ogni μ_n è isolato ed, essendo tutti positivi, possiamo ordinarli in senso decrescente. Infine osserviamo che, posto $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ si ha che $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$, $\lambda_n \to \infty$ per $n \to \infty$ e per ogni n

$$\begin{aligned} T\varphi_n = \mu_n\varphi_n \;&\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mu_n\varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla(\mu_n\varphi_n)\cdot\nabla h = \int_\Omega \varphi_n h \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\; \begin{cases} \varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla\varphi_n\cdot\nabla h = \lambda_n\int_\Omega \varphi_n h \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \end{aligned}$$

cioè λ_n è un autovalore del laplaciano con condizioni di Dirichlet al bordo e φ_n è una corrispondente autofunzione. Che non vi siano altri autovalori oltre ai λ_n segue dalle precedenti equivalenze e dall'osservazione 9.9.

Vediamo ora come si modifica la dimostrazione per provare lo stesso risultato nel caso del problema agli autovalori

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $q \in L^\infty(\Omega)$. Se $q \geq 0$, basta considerare in $W_0^{1,2}(\Omega)$ il prodotto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v + q(x)uv)$$

che induce una norma equivalente a quella standard di $W_0^{1,2}$. In tal caso quindi si trova ancora una sequenza di autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ tale che $\lambda_n \to \infty$ ed una corrispondente sequenza di autofunzioni (φ_n) che costituisce una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$. Se si rinuncia alla condizione $q \geq 0$ si procede così: si introduce la funzione $\widetilde{q}(x) = q(x) + \|q\|_\infty$ che è non negativa. Quindi per quanto già visto, si trovano autovalori $0 < \widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 \leq ...$ con $\widetilde{\lambda}_n \to \infty$ e corrispondenti autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, ...$ che formano una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$. Allora i numeri $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n - \|q\|_\infty$ formano una successione crescente e illimitata di autovalori per l'operatore $-\Delta + q$ e le φ_n sono corrispondenti autofunzioni. Può essere che qualche λ_n sia ≤ 0 ma solo per un numero finito.

Per quanto riguarda il problema agli autovalori con condizioni di Neumann al contorno

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.8}$$

la dimostrazione va modificata considerando lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ al posto di $W_0^{1,2}(\Omega)$. Vale ancora che $W^{1,2}(\Omega)$ è immerso compattamente in $L^2(\Omega)$, purché il dominio Ω sia sufficientemente regolare, ad esempio di classe C^1. Questa è un'ipotesi che occorre fare su Ω (cfr. osservazione 9.3). Inoltre, si usa il fatto che la disuguaglianza di Poincaré vale nel sottospazio di $W^{1,2}(\Omega)$ delle funzioni a media nulla. Conviene quindi decomporre $W^{1,2}$ nella somma ortogonale del sottospazio delle funzioni costanti con quello $W_*^{1,2}(\Omega)$ delle funzioni a media nulla. Il lemma 9.6 va modificato nel senso seguente:

Lemma 9.10. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ a media nulla esiste un'unica $u \in W_*^{1,2}(\Omega)$ soluzione debole di*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \textit{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{9.9}$$

Inoltre, l'operatore $f \mapsto R(f) =$ soluzione debole di (9.9) *è lineare e continuo da L^2 in $W_*^{1,2}$.*

Infine discutiamo la regolarità delle autofunzioni limitatamente ai problemi (9.2) e (9.8) relativi al laplaciano:

Proposizione 9.11. *Ogni autofunzione è in $C^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla h = \int_\Omega \varphi h \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

Consideriamo la funzione di $(N+1)$ variabili $u\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$u(x,t) = \varphi(x)\, e^{\sqrt{\lambda}t}$$

e osserviamo che

$$\nabla u = \left(\nabla_x u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = e^{\sqrt{\lambda} t} \left(\nabla \varphi, \sqrt{\lambda}\, \varphi \right) .$$

Presa una generica funzione $h \in C_c^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, sia $R > 0$ tale che $\mathrm{supp}(h) \subset \Omega \times [-R, R]$. Allora per ogni $t \in [-R, R]$ si ha che $h(\cdot, t) \in C_c^\infty(\Omega)$ e, applicando il teorema di Fubini e un'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \times \mathbb{R}} \nabla u \cdot \nabla h &= \int_{\Omega \times [-R,R]} \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x h + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} \right) \\
&= \int_{-R}^{R} e^{\sqrt{\lambda} t} \left(\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla_x h \, dx \right) dt + \int_\Omega \sqrt{\lambda}\, \varphi \left(\int_{-R}^{R} e^{\sqrt{\lambda} t} \frac{\partial h}{\partial t} \, dt \right) dx \\
&= \int_{-R}^{R} e^{\sqrt{\lambda} t} \left(\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla_x h \, dx \right) dt - \int_\Omega \lambda\, \varphi \left(\int_{-R}^{R} e^{\sqrt{\lambda} t} \, h \, dt \right) dx \\
&= \int_{-R}^{R} e^{\sqrt{\lambda} t} \left(\int_\Omega \left(\nabla \varphi \cdot \nabla_x h - \lambda \varphi h \right) \, dx \right) dt = 0 .
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che u è soluzione debole di $\Delta u = 0$ in $\Omega \times \mathbb{R}$. Per il teorema di Caccioppoli-Weyl $u \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ e quindi $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. □

9.2 Dimostrazione del teorema 9.5

Lemma 9.12. *Se $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è la base hilbertiana di $L^2(\Omega)$ di autofunzioni del laplaciano data dal teorema 9.4, allora la successione di funzioni*

$$u_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

è una base hilbertiana di $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Dimostrazione. Ogni φ_n verifica

$$\int_\Omega \nabla \varphi_n \cdot \nabla h = \lambda_n \int_\Omega \varphi_n h \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) .$$

Quindi

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \int_\Omega \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \int_\Omega \varphi_n \varphi_m = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

cioè la famiglia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ costituisce un sistema ortonormale in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Proviamo che è una base hilbertiana. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ verifica

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u = 0 \quad \forall n$$

allora

$$\int_\Omega \varphi_n u = \frac{1}{\lambda_n} \int_\Omega \nabla \varphi_n \cdot \nabla u = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi, essendo $\{\varphi_n\}$ una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$, $u = 0$. Perciò $\overline{\operatorname{span}\{u_n\}}^{\perp} = \{0\}$, cioè $\overline{\operatorname{span}\{u_n\}} = W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Ora procediamo con la dimostrazione del teorema 9.5. Supponiamo che λ non sia un autovalore. Prendiamo $f \in L^2(\Omega)$. Dato che la successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di autofunzioni del laplaciano data dal teorema 9.4 è una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$, vale che

$$f = \sum_n \alpha_n \varphi_n \quad \text{dove} \quad \alpha_n = \int_\Omega f u_n \quad \text{e} \quad \sum_n \alpha_n^2 < \infty\,.$$

Per il lemma 9.12, una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ è soluzione debole del problema (9.1) se e solo se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_n = \int_\Omega (\lambda u + f) u_n \quad \forall n\,. \tag{9.10}$$

Posto

$$c_n := \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u = \langle u_n, u \rangle_{W_0^{1,2}}\,,$$

siccome

$$\int_\Omega u_n u = \frac{1}{\lambda_n} \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u\,.$$

le equazioni (9.10) diventano

$$c_n = \frac{\lambda}{\lambda_n}\, c_n + \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \forall n$$

da cui

$$c_n = \frac{\alpha_n \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n - \lambda} \quad \forall n\,.$$

Notiamo che ogni c_n è ben definito perché $\lambda \neq \lambda_n$ per ogni n. Inoltre $\sum_n c_n^2 < \infty$ perché, essendo $\lambda_n \to \infty$ per $n \to \infty$,

$$c_n^2 \sim \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n} \leq \frac{\alpha_n^2}{\lambda_1} \quad \text{per } n \to \infty$$

e $\sum_n \alpha_n^2 < \infty$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ converge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ed ha per somma una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ che per costruzione verifica (9.10), cioè è soluzione debole di (9.1).

Proviamo l'unicità della soluzione di (9.1). Siano u_1, u_2 due soluzioni. Allora $u = u_1 - u_2$ è soluzione debole di (9.2). Ma λ non è autovalore e quindi $u = 0$, cioè $u_1 = u_2$.

Supponiamo ora che λ sia un autovalore. Prendiamo $f \in L^2(\Omega)$. Se il problema (9.1) ammette una soluzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, allora per ogni autofunzione φ relativa a λ si ha che

$$\lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi + \int_\Omega f\varphi$$

e quindi f deve verificare

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \quad \text{per ogni autofunzione } \varphi \text{ relativa all'autovalore } \lambda\,. \tag{9.11}$$

Se al contrario f verifica tale condizione, allora, grazie al lemma 9.12, la serie

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \lambda_n\neq\lambda}} \frac{\alpha_n\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n - \lambda}\, u_n$$

è ben definita e converge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ad una funzione u che, per (9.11), verifica (9.10), cioè è soluzione debole di (9.1). Se prendiamo una qualsiasi altra soluzione $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ di (9.1), la funzione $w = v - u$ risulta autofunzione relativa a λ. □

9.3 Caratterizzazione variazionale degli autovalori

Teorema 9.13. *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^N$ ed una funzione $q \in L^\infty(\Omega)$ si ha che*

$$\lambda_1(-\Delta + q, \Omega) = \inf_{\substack{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q\,u^2)}{\int_\Omega u^2}\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\mu := \inf_{\substack{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q\,u^2)}{\int_\Omega u^2} \tag{9.12}$$

Presa un'autofunzione φ_1 relativa all'autovalore λ_1, vale che

$$\int_\Omega (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla h + q\varphi_1 h) = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 h \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

In particolare, prendendo $h = \varphi_1$, troviamo che

$$\int_\Omega (|\nabla \varphi_1|^2 + q\varphi_1^2) = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2$$

e quindi

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega (|\nabla \varphi_1|^2 + q\varphi_1^2)}{\int_\Omega \varphi_1^2} \geq \mu\,.$$

Ora dimostriamo che

(1) il problema di minimizzazione definito dal secondo membro di (9.12) ammette un punto di minimo v.

(2) Tale v risulta essere un autofunzione relativa all'autovalore μ.

In tal caso, essendo λ_1 il più piccolo autovalore, deduciamo che $\lambda_1 \leq \mu$.

Dimostrazione di (1). Presa una successione minimizzante $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$, e posto

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}}$$

si ha che

$$\int_\Omega v_n^2 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + q\, u_n^2)}{\int_\Omega u_n^2} = \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 + q\, v_n^2)$$

In particolare anche (v_n) è una successione minimizzante ed è limitata in $W_0^{1,2}(\Omega)$ perché

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \leq \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 + q v_n^2) + \|q\|_\infty \int_\Omega v_n^2 = \mu + \|q\|_\infty + o(1)\,.$$

Allora, essendo $W_0^{1,2}(\Omega)$ uno spazio di Banach riflessivo (in quanto spazio di Hilbert), tale (v_n) ammette una sottosuccessione, che denotiamo ancora (v_n), che converge debolmente in $W_0^{1,2}$ ad un certo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Per il teorema di Rellich (teorema 9.7) $v_n \to v$ fortemente in L^2 e quindi

$$\int_\Omega q v_n^2 \to \int_\Omega q v^2 \quad \text{e} \quad \int_\Omega v^2 = \lim \int_\Omega v_n^2 = 1\,.$$

Inoltre per la debole semicontinuità inferiore della norma di $W_0^{1,2}$, si ha che

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \liminf \int_\Omega |\nabla v_n|^2$$

Dunque

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + qv^2) \le \liminf \int_\Omega (|\nabla v_n|^2 + qv_n^2) = \mu$$

e v è punto di minimo.

Dimostrazione di (2). Posto

$$F(u) = \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q\,u^2)}{\int_\Omega u^2} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$$

per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha che $v + th \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ per $t \in \mathbb{R}$ con $|t| < \delta$ ($\delta > 0$ opportuno), e quindi $F(v) \le F(v + th)$ per ogni $|t| < \delta$. Se esiste la derivata direzionale

$$\frac{\partial F}{\partial h}(v) = \lim_{t \to 0} \frac{F(v + th) - F(v)}{t}$$

per il teorema di Fermat, $\frac{\partial F}{\partial h}(v) = 0$. Dimostriamo che esiste $\frac{\partial F}{\partial h}(v)$. Si verifica che le funzioni

$$t \mapsto \varphi_1(t) = \int_\Omega \left[|\nabla(v + th)|^2 + q(v + th)^2\right] \quad \text{e} \quad t \mapsto \varphi_2(t) = \int_\Omega (v + th)^2$$

sono derivabili. In particolare risulta

$$\varphi_1'(0) = 2\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla h + qvh) \quad \text{e} \quad \varphi_2'(0) = 2\int_\Omega vh$$

Allora esiste anche

$$\frac{\partial F}{\partial h}(v) = \frac{d}{dt}\,\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\bigg|_{t=0} = \frac{\varphi_1'(0)\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\varphi_2'(0)}{\varphi_2(0)^2}\,.$$

Dovendo essere $\frac{\partial F}{\partial h}(v) = 0$, otteniamo che $\varphi_1'(0)\varphi_2(0) = \varphi_1(0)\varphi_2'(0)$ cioè

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla h + qvh) = F(v)\int_\Omega vh = \mu\int_\Omega vh$$

Valendo ciò per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$, abbiamo provato che v è soluzione debole non nulla di $-\Delta v = \mu v$ in Ω, con $v|_{\partial\Omega} = 0$, cioè (2). □

Corollario 9.14. *(1) Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^N$ e date due funzioni $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, se $q_1 \le q_2$ q.o. in Ω, allora $\lambda_1(-\Delta + q_1, \Omega) \le \lambda_1(-\Delta + q_2, \Omega)$.*

(2) Dati due domini limitati Ω_1 e Ω_2 di $\mathbb{R}^N$ e data una funzione $q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, se $\Omega_1 \subset \Omega_2$, allora $\lambda_1(-\Delta + q, \Omega_1) \geq \lambda_1(-\Delta + q, \Omega_2)$.

Così come il primo autovalore, anche tutti gli altri ammettono una caratterizzazione variazionale. Più precisamente:

Teorema 9.15. *Dato un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^N$ ed una funzione $q \in L^\infty(\Omega)$, si ha che*

$$\lambda_k(-\Delta + q, \Omega) = \inf_{\substack{u \in X_{k-1} \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q\, u^2)}{\int_\Omega u^2}$$

dove $X_0 = W_0^{1,2}(\Omega)$ e $X_k = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid \int_\Omega u\varphi_j = 0 \ \forall j = 1, ..., k\}$ per $k \in \mathbb{N}$, essendo φ_j un autofunzione relativa all'autovalore λ_j.