10 Riarrangiamenti sferici decrescenti

In alcuni contesti può essere utile sostituire una funzione con un'altra che risulti equimisurabile (nel senso precisato più avanti) e che possegga opportune proprietà di simmetria. Qui presentiamo una teoria della simmetrizzazione introdotta da Hardy e Littlewood e poi studiata ancora da Schwarz.

Dato un insieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^n$ denotiamo Ω^* la palla (aperta) centrata nell'origine e con $|\Omega^*| = |\Omega|$ (in generale, $|E|$ indica la misura di Lebesgue di un insieme misurabile E).

Data una funzione misurabile $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ introduciamo l'insieme di sopralivello

$$\{|u| > t\} := \{x \in \Omega \ : \ |u(x)| > t\}$$

e assumiamo che $|\{|u| > t\}| < \infty \ \forall t > 0$. Tale condizione è banalmente soddisfatta se $|\Omega| < \infty$ mentre esprime una proprietà di decadimento a 0 della funzione all'infinito se $|\Omega| = \infty$.

Definizione 10.1. *Si chiama* riarrangiamento sferico decrescente di u *una funzione misurabile* $u^*\colon \Omega^* \to [0, \infty)$ *che verifichi le seguenti proprietà:*

1. $u^*(x_1) = u^*(x_2)$ *se* $|x_1| = |x_2|$*, cioè* u^* *è radiale;*
2. $u^*(x_1) \le u^*(x_2)$ *se* $|x_1| \ge |x_2|$*, cioè* u^* *decresce radialmente;*
3. $|\{u^* > t\}| = |\{|u| > t\}| \ \ \forall t > 0$ *(equimisurabilità).*

Proviamo l'esistenza di un riarrangiamento sferico decrescente, per via costruttiva. Introduciamo la *funzione di distribuzione di* u così definita:

$$\mu(t) = |\{|u| > t\}| \quad \forall t \ge 0\,.$$

Risulta che $\mu\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ è decrescente e continua da destra. Inoltre $\mu(0) = |\mathrm{supp}(u)|$ e $\mathrm{supp}(u) = [0, \|u\|_\infty]$.

Introduciamo ora $u^\#\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ definita come la funzione di distribuzione di μ. Tale funzione $u^\#$ si chiama *riarrangiamento unidimensionale di* u, è decrescente e continua da sinistra. Inoltre $u^\#(0) = \|u\|_\infty$ e $\mathrm{supp}(u^\#) = [0, \mu(0)]$. In particolare $|\mathrm{supp}(u^\#)| = |\mathrm{supp}(u)|$. Un'altra importante proprietà è che:

$$u^\#(s) > t \ \Leftrightarrow \ s < \mu(t) \tag{10.1}$$

Ciò si ottiene perché

$$u^\#(s) = |\{\mu > s\}| = \sup\{t \ge 0 \ : \ \mu(t) > s\} = \min\{t \ge 0 \ : \ \mu(t) \le s\}$$

dove la prima uguaglianza segue dalla definizione, la seconda dal fatto che μ è decrescente e la terza dalla continuità da destra di μ.

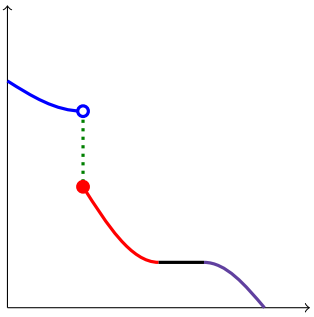

grafico di $\mu(t)$

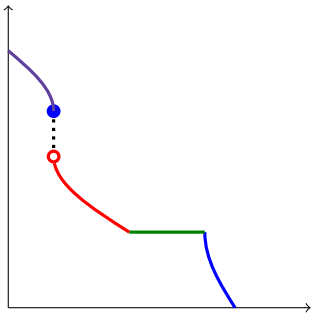

grafico di $u^{\#}(s)$

Infine verifichiamo che la funzione

$$u^*(x) = u^{\#}(\omega_n |x|^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(dove $\omega_n = |B_1|$ è la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$) è un riarrangiamento sferico decrescente di u. Infatti u^* è radiale e decresce radialmente. Proviamo la equimisurabilità. Grazie a (10.1) si ha che

$$u^*(x) > t \;\Leftrightarrow\; u^{\#}(\omega_n|x|^n) > t \;\Leftrightarrow\; \omega_n|x|^n < \mu(t) \;\Leftrightarrow\; |x| < R_t \quad \text{dove} \quad R_t = \left(\frac{\mu(t)}{\omega_n}\right)^{1/n}$$

cioè $\{u^* > t\}$ è la palla aperta di centro 0 e raggio R_t e quindi $|\{u^* > t\}| = \omega_n R_t^n = \mu(t) = |\{|u| > t\}|$. Inoltre $u^*(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega_n|x|^n \geq |\mathrm{supp}(u)|$. Quindi $\mathrm{supp}(u^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq R\} = \Omega^*$ dove $R = \left(\frac{|\mathrm{supp}(u)|}{\omega_n}\right)^{1/n}$. Pertanto $|\Omega^*| = \omega_n R^n = |\mathrm{supp}(u)|$.

Teorema 10.2. *(1) Se $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua e decade all'infinito, allora anche u^* è continua.*

(2) Se $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lipschtziana e decade all'infinito, allora anche u^* è lipschitziana con la stessa costante di Lipschitza di u.

(3) Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, allora u decade all'infinito, $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|u^*\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}$.

(4) Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, allora anche $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\|\nabla u^*\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p}$ (disuguaglianza di Polya-Szegö).

Dimostrazione di (3). Si usa l'identità

$$\chi_{\{|u|>t\}}(x) = \chi_{[0,|u(x)|)}(t)$$

dove in generale χ_E denota la funzione indicatrice di E (cioè $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$ mentre $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$). Allora, detta $\mu(t) = |\{|u| > t\}|$ la funzione di distribuzione di u, si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \chi_{[0,|u(x)|^p)}(t) \, dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|u|^p>t\}}(x) \, dx \right) dt = \int_0^\infty \mu(t^{1/p}) \, dt\end{aligned}$$

avendo usato il teorema di Fubini per scambiare gli integrali nella seconda uguaglianza e l'identità $\{|u|^p > t\} = \{|u| > t^{1/p}\} = \mu(t^{1/p})$ per l'ultima uguaglianza. Siccome $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la funzione $t \mapsto \mu(t^{1/p})$ deve essere finita per ogni $t > 0$ cioè u decade all'infinito. Inoltre, detto u^* il riarrangiamento sferico decrescente di u e μ^* la relativa funzione di distribuzione, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u^*(x)|^p \, dx = \int_0^\infty \mu^*(t^{1/p}) \, dt$$

e siccome $\mu^* = \mu$, segue subito la tesi. □

Per le dimostrazioni di (1) e (2) rimandiamo al libro di C. Bandle: Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman (1980). La dimostrazione di (4) è più complessa e delicata e verrà discussa nel prossimo paragrafo.

11 Disuguaglianza di Polya-Szegő

Discutiamo qui il seguente risultato:

Teorema 11.1 (Polya-Szegő)**.** *Fissato $1 \le p < \infty$, se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \ge 0$ e u^* è un riarrangiamento sferico decrescente di u allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \ge \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p \, .$$

11.1 Richiami preliminari

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1, chiamiamo:

- *punto critico* o *punto singolare* di f un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla u(x) = 0$;

- *valore critico* o *valore singolare* di f un numero $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste un punto critico x con $f(x) = t$.

I valori assunti da f che non sono valori singolari si dicono *valori regolari*.

Teorema 11.2 (Lemma di Morse-Sard)**.** *Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^n, allora l'insieme dei valori singolari ha misura nulla.*

Tale risultato fu ottenuto da A. Morse nel 1939 (Ann. of Math. **40** (1939)). Vale un analogo enunciato per funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. In tal caso è richiesta una regolarità C^k con $k \geq \max\{1, n-m+1\}$. Cicòrrisponde al lemma di Sard, una cui dimostrazione si può trovare nel libro di J. Milnor: Topology from the differentiable viewpoint.

Altre considerazioni utili riguardano le funzioni monotone; le riassumiamo nel seguente enunciato:

Teorema 11.3. *Se $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione debolmente crescente allora f è misurabile, ha un insieme al più numerabile di punti di discontinuità, è derivabile quasi ovunque con $f' \geq 0$ e*

$$\int_a^b f'(t)\,dt \leq f(b^-) - f(a^+)$$

dove $f(b^-) = \lim_{t\to b^-} f(t) = \sup_{t\in(a,b)} f(t)$ *e* $f(a^+) = \lim_{t\to a^+} f(t) = \inf_{t\in(a,b)} f(t)$.

11.2 Dimostrazione della disuguaglianza di Polya-Szegő

Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \geq 0$. Per ogni $t \geq 0$ poniamo

$$\Omega_t = \{u > t\}\,.$$

Se t è un valore regolare di u, allora $\partial\Omega_t$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -|\nabla u| \quad \text{su} \quad \partial\Omega_t$$

dove $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ denota la derivata normale di u in $\partial\Omega$ rispetto alla normale esterna a Ω_t. Presa una funzione continua $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ poniamo

$$G(t) = \int_{\Omega_t} g(x)\,dx\,.$$

Essendo $g \geq 0$ e $\Omega_t \subset \Omega_s$ se $t \geq s$, la funzione G è decrescente e quindi derivabile quasi ovunque.

Lemma 11.4. *Se esiste $G'(t)$ e t è un valore regolare di u allora* $G'(t) = -\displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \frac{g}{|\nabla u|}\, d\sigma$.

Dimostrazione. Si ha che

$$G'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\Omega_{t+\varepsilon}} g(x)\,dx - \int_{\Omega_t} g(x)\,dx\right]$$

Prendendo $\varepsilon > 0$ si ha che $\Omega_{t+\varepsilon} \subset \Omega_t$ e quindi

$$\int_{\Omega_{t+\varepsilon}} g(y)\,dy - \int_{\Omega_t} g(y)\,dy = -\int_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\varepsilon}} g(y)\,dy\,.$$

Conviene parametrizzare l'insieme $\Omega_t\setminus\Omega_{t+\varepsilon}$ in coordinate normali, esprimendo il generico punto $y \in \Omega_t \setminus \Omega_{t+\varepsilon}$ nella forma

$$u = x - s\nu(x) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} s = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega_t) \\ x \in \partial\Omega_t \ \text{ tale che } \ |x-y| = \operatorname{dist}(y,\partial\Omega_t) \end{cases}$$

e $\nu(x)$ è la normale esterna a Ω_t nel punto x. La buona definizione e regolarità C^∞ della corrispondenza $y \mapsto (s,x)$ è garantita se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo (cfr. Lemma 14.16 in: D. Gilbarg, N. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer). Quindi

$$\int_{\Omega_t\setminus\Omega_{t+\varepsilon}} g(y)\,dy = \int_{\partial\Omega_t}\left(\int_0^{h(\varepsilon,x)} g(x-s\nu)\,ds\right) d\sigma(x)$$

dove $h(\varepsilon,x)$ è tale per cui $u(x-h(\varepsilon,x)\nu) = t+\varepsilon$. Per ogni fissato $x \in \partial\Omega_t$, la funzione $\varepsilon \mapsto h(\varepsilon,x)$ è l'inversa di $s \mapsto f(s,x) = u(x-s\nu) - u(x)$ in un intorno di 0. Siccome

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=0} = -\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = |\nabla u(x)| \neq 0$$

con stime uniformi rispetto a $x \in \partial\Omega_t$, la funzione $h(\varepsilon,x)$ è ben definita e di classe C^∞ (rispetto a (ε,x)) e verifica $h(0,x) = 0$ e

$$\left.\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=0}\right]^{-1} = \frac{1}{|\nabla u(x)|}$$

cioè

$$\frac{h(\varepsilon,x)}{\varepsilon} \to \frac{1}{|\nabla u(x)|} \quad \text{per } \varepsilon \to 0\,.$$

Allora

$$G'(t) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_t}\left(\frac{h(\varepsilon,x)}{\varepsilon}\fint_0^{h(\varepsilon,x)} g(x-s\nu)\,ds\right) d\sigma(x) = -\int_{\partial\Omega_t}\frac{g(x)}{|\nabla u(x)|}\,d\sigma(x)\,. \quad \square$$

Corollario 11.5. *Per quasi ogni t esistono le seguenti derivate:*

$$\mu'(t) = -\int_{\partial\Omega_t} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} \quad e \quad \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} |\nabla u|^p = -\int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\sigma\,.$$

Dimostrazione. Si applica il lemma 11.4 prendendo $g \equiv 1$ nel primo caso e $g = |\nabla u|^p$ nel secondo e osservando che l'insieme dei valori di t per cui si può applicare il lemma ha misura piena (per il lemma di Sard, l'insieme dei valori singolari di u ha misura nulla; inoltre le funzioni monotone sono derivabili quasi ovunque). □

Ora fissiamo

$$G(t) = \int_{\Omega_t} |\nabla u(y)|^p\, dy$$

ed osserviamo che $G(t) = 0$ se $t \geq \bar{t} := \|u\|_\infty$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \geq G(0) - G(\bar{t}) \geq -\int_0^{\bar{t}} G'(t)\, dt = -\int_0^\infty G'(t)\, dt = \int_0^\infty \left(\int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\sigma\right) dt\,.$$

Su ogni insieme $\partial\Omega_t$ introduciamo la misura $d\widetilde{\mu} = |\nabla u|^{-1} d\sigma$ e scriviamo

$$\int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^p\, d\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}(\partial\Omega_t) \fint_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^p\, d\widetilde{\mu}\,.$$

Osserviamo che per quasi ogni t

$$\widetilde{\mu}(\partial\Omega_t) = \int_{\partial\Omega_t} \frac{d\sigma}{|\nabla u|} = |\mu'(t)|\,.$$

Inoltre, per la disuguaglianza di Hölder, per quasi ogni t

$$\fint_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^p\, d\widetilde{\mu} \geq \left(\fint_{\partial\Omega_t} |\nabla u|\, d\widetilde{\mu}\right)^p = \left(\frac{1}{\widetilde{\mu}(\partial\Omega_t)}\int_{\partial\Omega_t} d\sigma\right)^p = \left(\frac{|\partial\Omega_t|}{|\mu'(t)|}\right)^p.$$

Dunque, con i conti fatti finora, arriviamo a stimare

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \geq \int_0^\infty \frac{|\partial\Omega_t|^p}{|\mu'(t)|^{p-1}}\, dt\,.$$

A questo punto applichiamo la disuguaglianza isoperimetrica, grazie alla quale per quasi ogni t

$$|\partial\Omega_t| \geq C_n |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{dove} \quad C_n = n\omega_n^{1/n}.$$

Così otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \geq C_n^p \int_0^\infty \frac{\mu(t)^{\frac{(n-1)p}{n}}}{|\mu'(t)|^{p-1}}\, dt$$

Infine vogliamo verificare che

$$C_n^p \int_0^\infty \frac{\mu(t)^{\frac{(n-1)p}{n}}}{|\mu'(t)|^{p-1}}\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p \tag{11.1}$$

cosa che completerebbe la dimostrazione. In generale per il riarrangiamento sferico decrescente u^* possiamo dire che:

(1) u^* è una funzione lipschitziana, in particolare, è derivabile quasi ovunque e l'insieme dei valori singolari ha misura nulla;

(2) gli insiemi $\Omega_t^* = \{u^* > t\}$ sono palle;

(3) se u^* è derivabile in t allora $|\nabla u^*|$ è costante su $\partial\Omega_t$.

Da (2) segue che nel passaggio in cui si usa la disuguaglianza isoperimetrica in realtà si può scrivere l'uguaglianza. Inoltre, grazie a (3), si ha uguaglianza anche nel punto in cui si applica la disuguaglianza di Hölder. In base a tali considerazioni si ottiene (11.1). □

12 Disuguaglianza di Faber-Krahn

Teorema 12.1. *Se Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ e Ω^* è una palla aperta centrata con $|\Omega^*| = |\Omega|$ allora $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo la caratterizzazione variazionale del primo autovalore $\lambda_1(\Omega)$, espressa dalla formula di Rayleigh-Ritz:

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$$

Possiamo limitarci a considerare funzioni non negative, grazie al seguente fatto:

Lemma 12.2. *Se una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ è derivabile in senso debole, allora lo è anche $|u|$ e $\frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \operatorname{sgn}(u)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}$ q.o. in Ω.*

Quindi se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ anche $|u| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ quasi ovunque. Perciò

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \geq 0,\, u \not\equiv 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}\,. \tag{12.1}$$

Ora utilizziamo il seguente risultato:

Lemma 12.3. *L'insieme delle funzioni non negative di $C_c^\infty(\Omega)$ è denso nell'insieme delle funzioni non negative di $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Completiamo la dimostrazione del teorema. Grazie al lemma 12.3, da (12.1) segue che

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in C_c^\infty(\Omega) \\ u \geq 0,\, u \not\equiv 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$$

Se $u \in C_c^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$ e u^* denota il riarriangiamento sferico decrescente di u, si ha che u^* ha supporto contenuto in una palla Ω^* centrata nell'origine e di misura di Lebesgue $|\Omega^*| = |\Omega|$. Inoltre $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$ (disuguaglianza di Polya-Szegő) e $\|u^*\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ (teorema 10.2). Quindi,

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2}{\int_{\Omega^*} (u^*)^2} \geq \lambda_1(\Omega^*)$$

e per l'arbitrarietà di u tra le funzioni non negative in $C_c^\infty(\Omega)$, otteniamo la tesi. □

Per completezza, esponiamo le dimostrazioni dei lemmi 12.2 e 12.3.

Dimostrazione del lemma 12.2. Fissiamo $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ derivabile in senso debole. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $u_\varepsilon = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}$. Si ha che

$$|u| \leq u_\varepsilon \leq |u| + \varepsilon \quad \text{in } \Omega \tag{12.2}$$

Dimostriamo che u_ε è derivabile in senso debole e

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} =: v_\varepsilon \tag{12.3}$$

In primo luogo osserviamo che $u_\varepsilon,\, v_\varepsilon \in L^1_{loc}(\Omega)$ grazie a (12.2). Approssimiamo u con una successione $(u_n) \subset L^1_{loc}(\Omega) \cap C^\infty$ costruita mediante regolarizzazione per convoluzione. Sappiamo

che $u_n \to u$ e $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial u}{\partial x_j}$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. Da ciò, usando anche il teorema di convergenza dominata, troviamo che, fissata $h \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \sqrt{u_n^2+\varepsilon^2}\,\frac{\partial h}{\partial x_j} \to \int_\Omega \sqrt{u^2+\varepsilon^2}\,\frac{\partial h}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \int_\Omega \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+\varepsilon^2}}\,\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\,h \to \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,h$$

Siccome $u_n \in C^\infty$, per ogni n

$$\int_\Omega \sqrt{u_n^2+\varepsilon^2}\,\frac{\partial h}{\partial x_j} = -\int_\Omega \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+\varepsilon^2}}\,\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\,h$$

e quindi

$$\int_\Omega \sqrt{u^2+\varepsilon^2}\,\frac{\partial h}{\partial x_j} = -\int_\Omega \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,h \tag{12.4}$$

cioè u_ε è derivabile in senso debole e vale (12.3). Ora passiamo al limite per $\varepsilon \to 0$. Si verifica che $u_\varepsilon \to |u|$ e $v_\varepsilon \to \operatorname{sgn}(u)\,\partial_j u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ e quindi, da (12.4), segue che

$$\int_\Omega |u|\,\frac{\partial h}{\partial x_j} = -\int_\Omega \operatorname{sgn}(u)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,h \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

cioè la tesi. □

Dimostrazione del lemma 12.3. Fissata $u \in W_0^{1,2}$, con $u \geq 0$, esiste una successione $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $W_0^{1,2}$. Dato che $u_n \to u$ anche in L^2, ogni sottosuccessione di (u_n) ammette un'estratta che converge anche puntualmente q.o. a u. Quindi si ha che $u_n \to u$ anche puntualmente q.o., per la successione iniziale. Ora proviamo che $|u_n| \to u$ in $W_0^{1,2}$. Infatti la successione $(|u_n|)$ è limitata in $W_0^{1,2}$. A meno di sottosuccessioni converge debolmente in $W_0^{1,2}$ e fortemente in L^2 ad una certa $v \in W_0^{1,2}$. Passando ad una sottosuccessione, la convergenza è anche puntuale q.o. e quindi deve essere $v = |u| = u$. Siccome $\| \,|u_n|\,\|_{W_0^{1,2}} = \|u_n\|_{W_0^{1,2}} \to \|u\|_{W_0^{1,2}}$ (per l'uguaglianza si è usato il lemma 12.2), otteniamo che $|u_n| \to u$ in $W_0^{1,2}$. Ora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n tale che $\||u_n| - u\|_{W_0^{1,2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Detto $K_n = \operatorname{supp}(u_n)$ si ha che $K_n \subset\subset \Omega$. Regolarizziamo $|u_n|$ per convoluzione con mollificatori φ_δ. Se $\delta = \delta_n > 0$ è sufficientemente piccolo, $\operatorname{supp}(\varphi_{\delta_n} * |u_n|) \subset \overline{B_{\delta_n}(K_n)} \subset\subset \Omega$ e $\|(\varphi_{\delta_n} * |u_n|) - |u_n|\|_{W_0^{1,2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi

$$\|(\varphi_{\delta_n} * |u_n|) - u\|_{W_0^{1,2}} < \varepsilon$$

e $(\varphi_{\delta_n} * |u_n|) \in C_c^\infty(\Omega)$, con $(\varphi_{\delta_n} * |u_n|) \geq 0$. □

Riferimenti bibliografici

C. Bandle: Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman (1980)