13 Il principio del massimo e applicazioni

13.1 Principi del massimo e lemma di Hopf

Dato un dominio Ω di $\mathbb{R}^N$, un *operatore ellittico del second'ordine* è un operatore differenziale della forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u$$

dove $a_{i,j},\ a_i,\ a_0 \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1,...,N)$, con $a_{i,j} = a_{j,i}$ e vale la *condizione di ellitticità*

$$\exists \alpha > 0 \ : \ \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall x \in \Omega\,. \tag{13.1}$$

Una classe notevole di operatori ellittici è data dagli *operatori di Schrödinger*, che hanno la forma

$$L = -\Delta + q(x) \quad \text{con} \quad q \in L^\infty(\Omega)\,.$$

Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Lu \geq 0$ in Ω si dice *soprasoluzione di L in Ω*.

Discutiamo una serie di risultati per le soprasoluzioni di operatori ellittici del second'ordine. Per semplicità ci limitiamo agli operatori di Schrödinger ma tutti gli enunciati si possono dimostrare per qualsiasi operatore ellittico. Supporremo sempre che Ω sia un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ e $q\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Teorema 13.1 (principio del massimo debole)**.** *Supponiamo che $q(x) \geq 0$ in Ω. Si ha che:*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow\ u \geq 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{13.2}$$

Dimostrazione. Inizialmente proviamo che

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ Lu > 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow\ u \geq 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{13.3}$$

Ragioniamo per contradddizione, supponendo che $u(\overline{x}) < 0$ in qualche $\overline{x} \in \Omega$. La funzione u ammette minimo in $x_0 \in \overline{\Omega}$ e siccome $u \geq 0$ su $\partial\Omega$, deve essere $x_0 \in \Omega$. In particolare $\partial_{x_i x_i} u(x_0) \geq 0$ per ogni $i = 1,...,N$, dunque $Lu(x_0) \leq 0$, in contrasto con l'ipotesi. Ora dimostriamo (13.2). Sia $R > 0$ tale che $x_1 \leq R$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Consideriamo

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon(e^R - e^{x_1})$$

con $\varepsilon > 0$. Allora $u_\varepsilon \geq u \geq 0$ su $\partial\Omega$. Inoltre

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon(-\Delta + q)(e^R - e^{x_1}) \geq \varepsilon e^{x_1} > 0 \text{ in } \Omega\,.$$

Quindi, da (13.3), otteniamo che $u_\varepsilon \geq 0$ in Ω, per ogni $\varepsilon > 0$. Prendendo il limite $\varepsilon \to 0$ otteniamo $u \geq 0$ in Ω. □

Osservazione 13.2. *Il teorema precedente, così come i successivi, ammette una versione gemella ottenuta cambiando u in $-u$. Quindi, assumendo sempre $q \geq 0$ in Ω, si ha:*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ Lu \leq 0 \text{ in } \Omega \\ u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow\ u \leq 0 \text{ in } \Omega\,.$$

Ciò equivale a dire che u raggiunge il suo massimo sul bordo di Ω. L'espressione "principio del massimo" viene da ciò. In questo senso il teorema 13.1 sarebbe più precisamente un "principio del minimo": la funzione u raggiunge il suo minimo sulla frontiera del dominio Ω.

Il prossimo risultato fornisce un'informazione più precisa sul segno della soprasoluzione in Ω.

Teorema 13.3 (principio del massimo forte)**.** *Si ha che*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq 0 \text{ in } \Omega \end{cases} \Rightarrow\ u \equiv 0 \text{ in } \Omega \text{ oppure } u > 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{13.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo $u \not\equiv 0$ e sia $x_1 \in \Omega$ tale che $u(x_1) > 0$. Per continuità

$$\exists r > 0 \ :\ u(x) > 0\ \ \forall x \in \overline{B_r(x_1)}\,. \tag{13.5}$$

Sia $R = \operatorname{dist}(x_1, \partial\Omega)$. Dimostriamo che

$$u(x) > 0\ \ \forall x \in B_R(x_1) \setminus \overline{B_r(x_1)} =: A\,. \tag{13.6}$$

Per provare ciò, introduciamo l'operatore

$$\tilde{L} := -\Delta + \tilde{q}(x) \quad \text{dove} \quad \tilde{q}(x) = q(x) + \|q\|_\infty\,,$$

la funzione

$$v := u - \varepsilon w \text{ dove } w(x) = e^{-\mu|x-x_1|^2} - e^{-\mu R^2}$$

e mostriamo che per un'opportuna scelta di $\varepsilon, \mu > 0$ si ha

(i) $\tilde{L}v \geq 0$ in A,

(ii) $v \geq 0$ su ∂A.

Una volta provato ciò, possiamo applicare il teorema 13.1 e dedurre che $v \geq 0$ in A, cioè $u \geq \varepsilon w > 0$ in A e quindi $u > 0$ in $B_R(x_1)$, in quanto $v > 0$ in A. Da ciò otteniamo che se $x_n \to \overline{x} \in \Omega$ e $u(x_n) > 0 \, \forall n$, allora $u(\overline{x}) > 0$. Ciò significa che l'insieme $\{x \in \Omega \, : \, u(x) > 0\}$ è chiuso. Essendo anche aperto, ed essendo Ω connesso, deduciamo che $u > 0$ in Ω. Restano da verificare le stime (i) e (ii). A tale scopo calcoliamo

$$\begin{aligned}
&\nabla w(x) = -2\mu \, e^{-\mu|x-x_1|^2}(x - x_1) \\
&\Delta w(x) = \operatorname{div}(\nabla w(x)) = 4\mu^2 \, e^{-\mu|x-x_1|^2}|x - x_1|^2 - 2N\mu \, e^{-\mu|x-x_1|^2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\tilde{L}v &= Lu + \|q\|_\infty u + \varepsilon \Delta w - \varepsilon \tilde{q} w \\
&\geq \varepsilon \left[e^{-\mu|x-x_1|^2} \left(4\mu^2 |x - x_1|^2 - 2\mu N \right) - \tilde{q} e^{-\mu|x-x_1|^2} + \tilde{q} e^{-\mu R^2} \right] \\
&\geq \varepsilon e^{-\mu|x-x_1|^2} \left[4\mu^2 r - 2\mu N - 2\|q\|_\infty \right] \quad \forall x \in A \, .
\end{aligned}$$

Quindi esiste $\overline{\mu} > 0$ tale per cui (i) vale per ogni $\varepsilon > 0$. Per quanto riguarda (ii), osserviamo che $\partial A = \partial B_R(x_1) \cup \partial B_r(x_1)$. Su $\partial B_R(x_1)$ abbiamo che $w \equiv 0$ e quindi $v = u \geq 0$ per ipotesi. Su $\partial B_R(x_1)$ abbiamo che $u \geq \delta > 0$ per un certo δ, e quindi

$$v(x) \geq \delta - \varepsilon \left(e^{-\mu r^2} - e^{-\mu R^2} \right) > 0$$

se $\varepsilon > 0$ è preso sufficientemente piccolo. Dunque anche (ii) è vero. □

Il prossimo risultato fornisce un'informazione qualitativa al primo ordine in un punto di annullamento di una soprasoluzione. In particolare si specifica che se una soprasoluzione è positiva in un dato dominio e si annulla sul bordo, vi arriva con pendenza non nulla.

Teorema 13.4 (lemma di Hopf)**.** *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che $Lu \geq 0$ in Ω e $u > 0$ in Ω. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $u(x_0) = 0$ e vale la proprietà della palla interna, cioè esiste una palla aperta $B_R(x_1) \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B_R(x_1)$. Allora*

$$\limsup_{t \to 0^-} \frac{u(x_0 + t\nu)}{t} < 0 \quad \textit{dove} \quad \nu = \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|} \, .$$

In particolare se esiste la derivata normale $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ rispetto alla normale esterna a Ω, allora $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$.

La proprietà della palla interna in un dato punto del bordo di un dominio è una proprietà geometrica del dominio nel punto in questione. Se il dominio è di classe C^2 allora la proprietà della palla interna è soddisfatta in ogni punto del suo bordo. La regolarità C^1 non è sufficiente. Per esempio, il dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > |x|^\alpha\}$ con $\alpha \in (1,2)$ è di classe C^1 ma la proprietà della palla interna non è soddisfatta nell'origine.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$v = u - \varepsilon w \ \text{ dove } \ w(x) = e^{-\mu|x-x_1|^2} - e^{-\mu R^2} \, .$$

Abbiamo visto nella dimostrazione precedente che esistono $\varepsilon, \mu > 0$ tali per cui $v > 0$ in $A = B_R(x_1) \setminus B_r(x_1)$, essendo $R = \operatorname{dist}(x_1, \partial\Omega)$ e $r \in (0,R)$ opportuno. Allora per $t < 0$ con $|t|$ sufficientemente piccolo si ha che $x_0 + t\nu \in A$ e quindi

$$\frac{u(x_0+t\nu)}{t} < \varepsilon \, \frac{w(x_0+t\nu)}{t} = \varepsilon \, \frac{w(x_0+t\nu) - w(x_0)}{t}$$

da cui

$$\limsup_{t \to 0^-} \frac{u(x_0+t\nu)}{t} \le \varepsilon \, \frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{x_0} - 2\varepsilon\mu \, e^{-\mu|x_0-x_1|^2} (x_0 - x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|} < 0 \, . \quad \square$$

Ora diamo una versione debole di soprasoluzione e discutiamo corrispondenti versioni di principio del massimo.

Definizione 13.5. *Data $q \in L^\infty(\Omega)$, una funzione $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ risolve $-\Delta u + q(x)u \ge 0$ in Ω* in senso debole *se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h + q(x)uh) \, dx \ge 0 \ \ \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ con } h \ge 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Tale u si chiama soprasoluzione debole *dell'operatore $L = -\Delta + q$. Inoltre u soddisfa $u \ge 0$ su $\partial\Omega$* in senso debole *se $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dove $u^- = -\min\{u, 0\}$ è la parte negativa di u.*

Osservazione 13.6. *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è una soprasoluzione classica dell'operatore $L = -\Delta + q$ in Ω cioè soddisfa $Lu(x) \ge 0$ per ogni $x \in \Omega$ e se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ allora $Lu \ge 0$ in Ω anche in senso debole. Infatti, per ogni $h \in C_c^\infty(\Omega)$ con $h \ge 0$, si ha*

$$0 \le \int_\Omega (-\Delta u + q(x)u)h \, dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h + q(x)uh) \, dx$$

per il teorema della divergenza. Se $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $h \geq 0$ q.o., allora esiste una successione $(h_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ con $h_n \geq 0$ tale che $h_n \to h$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Quindi

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h + q(x)uh)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h_n + q(x)uh_n)\,dx \geq 0\,.$$

Se $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, allora $u^-(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$ e $u^- \in W^{1,2}(\Omega)$. Quindi $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$, cioè $u \geq 0$ su $\partial\Omega$ anche in senso debole. Nessuna ipotesi di regolarità è richiesta su Ω (cfr. Teorema 9.17 e osservazione 19 in H. Brezis: Functional Analyis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer 2011).

Data una funzione $q \in L^\infty(\Omega)$, denotiamo $\lambda_1(-\Delta + q, \Omega)$ (o anche solo $\lambda_1(-\Delta + q)$) il primo autovalore dell'operatore di Schrödinger $L = -\Delta + q$ in Ω con condizioni di Dirichlet al bordo.

Teorema 13.7 (principio del massimo per soprasoluzioni deboli)**.** *Supponiamo $\lambda_1(-\Delta+q) > 0$. Allora*

$$\begin{cases} Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \text{ in senso debole } \Rightarrow\ u \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega\,. \tag{13.7}$$

Questa versione di principio del massimo si estende al caso di operatori ellittici del secondo ordine in forma di divergenza, cioè della forma

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{i,j}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + a_0(x)u$$

dove $a_{i,j},\ a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ e vale la condizione di ellitticità (13.1).

Osservazione 13.8. *A differenza del principio del massimo per soprasoluzioni classiche (Teorema 13.1), qui non facciamo nessun'ipotesi sul segno di $q(x)$ ma solo sul segno del primo autovalore dell'operatore di Schrödinger $-\Delta + q$ in Ω. Può succedere che sia $\lambda_1(-\Delta + q) > 0$ anche se q è una funzione negativa.*

Dimostrazione. Siano $u^\pm$ le parti positiva e negativa di u. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ allora anche $u^\pm \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Inoltre $u^\pm \geq 0$ in Ω e quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla u^- + q(x)uu^-)\,dx \qquad \text{(definizione di soprasoluzione debole, con } h = u^-) \\ &= -\int_\Omega (|\nabla u^-|^2 + q(x)(u^-)^2)\,dx \quad \text{(perché } u = u^+ - u^-) \\ &\leq -\lambda_1(-\Delta + q)\int_\Omega (u^-)^2\,dx \qquad \text{(caratterizzazione variazionale di } \lambda_1(-\Delta + q)) \end{aligned}$$

Allora $u^- = 0$ q.o. in Ω, cioè $u \geq 0$ q.o. in Ω. □

Teorema 13.9. *Supponiamo $\lambda_1(-\Delta + q) > 0$. Allora*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega) \\ Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \; u \equiv 0 \text{ in } \Omega \;\; \text{oppure} \;\; u > 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{13.8}$$

Dimostrazione. Se u è una soprasoluzione classica e $u \geq 0$ puntualmente su $\partial\Omega$, allora, essendo $u \in W^{1,2}(\Omega)$, u è anche soprasoluzione debole e verifica $u \geq 0$ su $\partial\Omega$ anche in senso debole (cfr. osservazione 13.6). Allora per il teorema 13.7, $u \geq 0$ q.o. in Ω, e per continuità $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Pertanto la conclusione segue dal teorema 13.4. □

Teorema 13.10 (principio del massimo per domini piccoli)**.** *Per ogni $k > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni dominio Ω con $|\Omega| < \delta$ e per ogni $q \in L^\infty(\Omega)$ con $\|q\|_\infty \leq k$ si ha:*

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega) \\ -\Delta u + q(x)u \geq 0 \;\; \text{in } \Omega \\ u \geq 0 \;\; \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \; u \equiv 0 \;\; \text{oppure} \;\; u > 0 \text{ in } \Omega.$$

Dimostrazione. Grazie al teorema 13.9, è sufficiente dimostrare che $\lambda_1(-\Delta + q, \Omega) > 0$ se $\|q\|_\infty \leq k$ e $|\Omega|$ è abbastanza piccolo (in relazione a k). Ricordiamo che

$$\lambda_1(-\Delta + q, \Omega) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q(x)u^2)\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}\,.$$

Allora, usando anche la disuguaglianza di Faber-Krahn,

$$\lambda_1(-\Delta + q, \Omega) \geq \lambda_1(-\Delta, \Omega) - \|q\|_\infty \geq \lambda_1(-\Delta, B_r) - k$$

dove B_r è una palla di raggio r con $|B_r| = |\Omega|$. Quindi $r = C_N|\Omega|^{\frac{1}{N}}$, dove C_N è una costante che dipende solo dalla dimensione N. Inoltre, usando la caratterizzazione variazionale di $\lambda_1(-\Delta, B_r)$ e considerando la trasformazione $T_r \colon W_0^{1,2}(B_1) \to W_0^{1,2}(B_r)$ data da $T_r u(x) = u\big(\frac{x}{r}\big)$, troviamo

$$\lambda_1(-\Delta, B_r) = r^{-2}\lambda_1(-\Delta, B_1)\,.$$

Pertanto

$$\lambda_1(-\Delta + q, \Omega) \geq C|\Omega|^{-\frac{2}{N}} - k\,.$$

In particolare $\lambda_1(-\Delta + q, \Omega) \geq 0$ per $|\Omega|$ sufficientemente piccolo. □

13.2 Regolarità al bordo per problemi di Dirichlet su domini convessi

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$, limitato e convesso. Data $g \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sia u l'estensione armonica di g in Ω trovata mediante il principio di Dirichlet. Tale u è ottenuta come soluzione debole del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{13.9}$$

cioè

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)\,. \end{cases}$$

Per il teorema di Weyl-Caccioppoli, possiamo supporre $u \in C^\infty(\Omega)$. Siamo ora interessati a studiare la regolarità di u fin sul bordo di Ω. Consideriamo un caso di trattazione più facile, supponendo Ω strettamente convesso.

Teorema 13.11. *Siano Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$, limitato e strettamente convesso, $g \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $u \in W^{1,2}(\Omega)$, soluzione debole di* (13.9)*, continua in Ω. Allora per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ si ha che $u(x) \to g(x_0)$ per $x \to x_0$, $x \in \Omega$, cioè u ammette estensione continua su $\overline{\Omega}$ e $u = g$ su $\partial\Omega$.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ cerchiamo una funzione affine h_ε tale che

$$h_\varepsilon \le g \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad h_\varepsilon(x_0) \ge g(x_0) - \varepsilon\,. \tag{13.10}$$

Assumendo per un momento di avere a disposizione tale h_ε, procediamo poi così: consideriamo la funzione $u_\varepsilon = u - h_\varepsilon$ che risulta soluzione debole di $\Delta u_\varepsilon = 0$ in Ω, perché h_ε è armonica. Inoltre

$$\begin{aligned} h_\varepsilon \le g \text{ in } \Omega \;&\Rightarrow\; u_\varepsilon \ge u - g \text{ in } \Omega \;\Rightarrow\; u_\varepsilon^- \le (u-g)^- \text{ in } \Omega \\ &\Rightarrow\; u_\varepsilon^- \in W_0^{1,2}(\Omega) \;\Rightarrow\; u_\varepsilon^- \ge 0 \text{ debolmente in } \Omega\,. \end{aligned}$$

Allora per il principio del massimo (teorema 13.7), $u_\varepsilon \ge 0$ q.o. in Ω. Essendo u continua in Ω, lo è anche u_ε e quindi $u_\varepsilon(x) \ge 0$ per ogni $x \in \Omega$, cioè $u(x) \ge h_\varepsilon(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Da ciò otteniamo che per $x \to x_0$, con $x \in \Omega$, si ha $\liminf u(x) \ge h_\varepsilon(x_0) \ge g(x_0) - \varepsilon$ e infine, per l'arbitrarietà di ε, $\liminf u(x) \ge g(x_0)$. Per costruire la funzione affine h_ε soddisfacente (13.10) sfruttiamo il fatto che Ω è strettamente convesso. Ciò garantisce che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un iperpiano passante per x_0 tale per cui Ω è contenuto tutto in uno dei semispazi separati da tale iperpiano. Più precisamente, esiste un versore ν tale che

$$\langle x - x_0, \nu \rangle < 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}\,. \tag{13.11}$$

Ora definiamo

$$h_\varepsilon(x) = \alpha\langle x - x_0, \nu\rangle + g(x_0) - \varepsilon\,.$$

Si tratta di una funzione affine che verifica $h_\varepsilon(x_0) = g(x_0) - \varepsilon$. Scegliamo α tale da garantire che $h_\varepsilon \le g$ in Ω. Per la continuità di g esiste $\delta > 0$ tale che

$$g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap \overline{\Omega}\,.$$

Prendendo $\alpha > 0$, tenuto conto di (13.11), abbiamo che $h_\varepsilon \le g$ in $B_\delta(x_0) \cap \overline{\Omega}$. Possiamo poi prendere α sufficientemente grande in modo che sia

$$\alpha\,|\langle x - x_0, \nu\rangle| > 2\,\|g\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0)\,.$$

Da ciò segue che $h_\varepsilon \le g$ anche in $\overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0)$. Quindi anche la prima condizione in (13.10) è soddisfatta. Ripetiamo un ragionamento simile per costruire una funzione affine k_ε che verifichi

$$k_\varepsilon \ge g \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad k_\varepsilon(x_0) \le g(x_0) + \varepsilon\,.$$

Tale k_ε può essere presa della forma

$$h_\varepsilon(x) = -\alpha\langle x - x_0, \nu\rangle + g(x_0) + \varepsilon$$

con $\alpha > 0$ sufficientemente grande. Da ciò si ottiene che per $x \to x_0$, con $x \in \Omega$, si ha $\limsup u(x) \le g(x_0)$. Avendo provato nella prima parte che $\liminf u(x) \ge g(x_0)$, otteniamo la tesi. □

Le funzioni h_ε e k_ε costruite nella dimostrazione precedente si chiamano *barriere*. Non è necessario che siano soluzioni dell'equazione in questione. Basta che h_ε sia una sottosoluzione e k_ε una soprasoluzione per l'operatore $-\Delta$ in Ω.

13.3 Proprietà del primo autovalore del laplaciano con condizioni di Dirichlet

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo sufficientemente regolare, tale da garantire che le soluzioni del problema agli autovalori

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{13.12}$$

siano continue in $\overline{\Omega}$. Denotiamo λ_1 il primo autovalore.

Teorema 13.12. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) Ogni autofunzione relativa al primo autovalore ha segno costante.

(ii) Il primo autovalore è semplice.

(iii) Se un'autofunzione ha segno costante allora corrisponde al primo autovalore.

La proprietà (ii) si evidenzia scrivendo la sequenza degli autovalori $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$

Dimostrazione. (i) Se $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è un'autofunzione relativa al primo autovalore allora verifica

$$\frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2}{\int_\Omega \varphi^2} = \lambda_1$$

Si ha che $|\varphi| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $|\varphi|$ verifica la stessa identità. Quindi è punto di minimo per il quoziente di Rayleigh e dunque anche $|\varphi|$ è un'autofunzione. In particolare $|\varphi| \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e risolve $\Delta|\varphi| \leq 0$ in Ω. Per il principio del massimo forte, $|\varphi| > 0$ in Ω, cioè φ non si annulla in Ω, cioè ha segno costante.

(ii) Siano φ_1, φ_2 due autofuzioni relative al primo autovalore. Per il punto (i), non si annullano mai e, fissato un punto $x_0 \in \Omega$ e posto $\alpha = \frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)}$, anche la funzione $\varphi = \varphi_1 - \alpha\varphi_2$ risolve il problema (13.12) con $\lambda = \lambda_1$. Siccome $\varphi(x_0) = 0$, per la parte (i) deve essere $\varphi \equiv 0$, cioè $\varphi_1 = \alpha\varphi_2$. Dunque il primo autospazio ha dimensione 1, cioè λ_1 è un autovalore semplice.

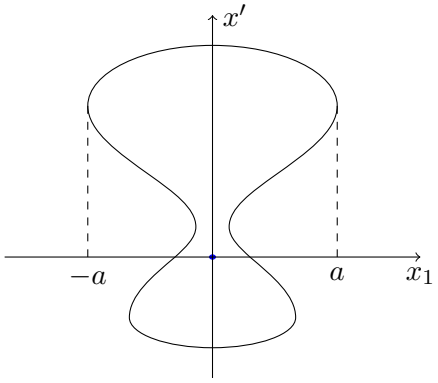
(iii) Siano φ_1 e φ due autofunzioni relative rispettivamente al primo autovalore e ad un autovalore λ imprecisato. Per il punto (i) φ_1 ha segno costante. Se anche φ ha segno costante allora $\int_\Omega \varphi_1\varphi \neq 0$. Ne segue che $\lambda = \lambda_1$, altrimenti sarebbe $\int_\Omega \varphi_1\varphi = 0$. □

13.4 Proprietà di simmetria delle soluzioni positive di problemi ellittici

Teorema 13.13 (Gidas, Ni, Nirenberg, 1979)**.** *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$, convesso nella direzione x_1 e simmetrico rispetto al piano $x_1 = 0$. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ risolve*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

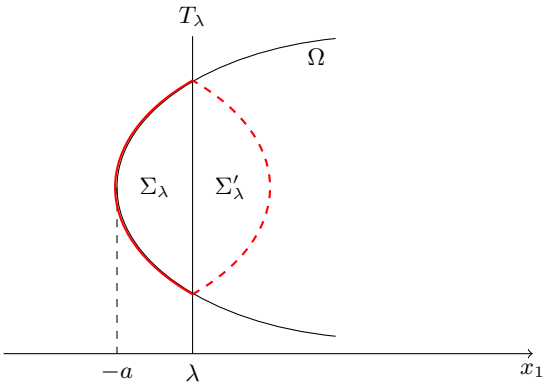
allora u è simmetrica rispetto a x_1 e $u_{x_1} < 0$ per ogni $x = (x_1, x') \in \Omega$ con $x_1 > 0$.



esempio di dominio convesso nella direzione x_1 e simmetrico rispetto al piano $x_1 = 0$

Dimostrazione. (Berestycki, Nirenberg, 1991). Usiamo il metodo dei piani mobili introdotto da Aleksandrov nel 1962[1]. Questa tecnica fu usata precedentemente da Serrin nel 1971. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ poniamo

$$T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_1 = \lambda\}, \;\; \Sigma_\lambda = \{x \in \Omega \mid x_1 < \lambda\}, \;\; x^\lambda = (2\lambda - x_1, x'),$$
$$\Sigma'_\lambda = \{x^\lambda \mid x \in \Sigma_\lambda\}, \;\; w_\lambda(x) = u(x^\lambda) - u(x) \; \forall x \in \overline{\Sigma}_\lambda$$



Per le ipotesi fatte su Ω segue che $\Sigma'_\lambda \subset \Omega$ per ogni $\lambda \in (-a, 0]$ dove $-a = \inf\{x_1 \mid x \in \Omega\}$. Inoltre w_λ è ben definito in $\overline{\Sigma}_\lambda$. Vogliamo mostrare che per ogni $\lambda \in (-a, 0)$

$$w_\lambda > 0 \;\text{ in } \Sigma_\lambda . \tag{13.13}$$

[1] per mostrare che una superficie immersa compatta in $\mathbb{R}^3$ con curvatura media costante è una sfera.

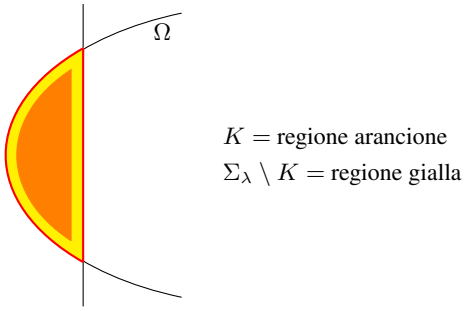
A questo scopo applichiamo il principio del massimo. In primo luogo osserviamo che

$$\Delta w_\lambda = c_\lambda(x) w_\lambda \text{ in } \Sigma_\lambda \text{ where } c_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{f(u(x^\lambda)) - f(u(x))}{u(x) - u(x^\lambda)} & \text{if } u(x) \neq u(x^\lambda) \\ 0 & \text{if } u(x) = u(x^\lambda) \end{cases}$$

e $\|c_\lambda\|_\infty \leq k =$ costante di Lipschitz di f in $[0, \|u\|_\infty]$. Inoltre $\partial\Sigma_\lambda = (T_\lambda \cap \Omega) \cup (\partial\Omega \cap \{x_1 < \lambda\})$ e $w_\lambda = 0$ su $T_\lambda \cap \Omega$, mentre per $x \in \partial\Sigma_\lambda \cap \partial\Omega$ si ha $w_\lambda(x) = u(x^\lambda) \geq 0$, ma $\not\equiv 0$. Se $\lambda = -a + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ piccolo, allora $|\Sigma_\lambda|$ è piccolo e possiamo applicare il principio del massimo per domini piccoli (per l'operatore $-\Delta + c_\lambda$) e concludere che vale (13.13). Ora poniamo

$$\Lambda = \{\lambda \in (-a, 0) \mid w_{\lambda'} > 0 \text{ in } \Sigma_{\lambda'} \; \forall \lambda' \in (-a, \lambda)\} \text{ e } \lambda_0 = \sup \Lambda.$$

La definizione di λ_0 è significativa perché abbiamo dimostrato che $\Lambda \supset (-a, -a+\varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$. Vogliamo provare che $\lambda_0 = 0$. Per contraddizione, supponiamo che $\lambda_0 < 0$. Siccome (13.13) vale per ogni $\lambda \in (-a, \lambda_0)$, per continuità $w_{\lambda_0} \geq 0$ in Σ_{λ_0}. Sappiamo anche che $w_{\lambda_0} \geq 0$ ma $w_{\lambda_0} \not\equiv 0$ su $\partial\Sigma_{\lambda_0}$. Ancora per il principio del massimo deduciamo che $w_{\lambda_0} > 0$ in Σ_{λ_0}, cioè $\lambda_0 \in \Lambda$. Ora mostriamo che (13.13) vale anche per $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$. Sia δ dato in base al principio del massimo per domini piccoli (si applica il teorema 13.10 con $k =$ costante di Lipschitz di f su $[0, \|u\|_\infty]$). Prendiamo un compatto $K \subset \Sigma_{\lambda_0}$ tale che $|\Sigma_{\lambda_0} \setminus K| < \delta$.



Dato che $\min_K w_{\lambda_0} > 0$, per continuità $\min_K w_\lambda > 0$ e $|\Sigma_\lambda \setminus K| < \delta$ anche per $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$. Inoltre $\Delta w_\lambda = c_\lambda(x) w_\lambda$ in $\Sigma_\lambda \setminus K$ e $w_\lambda \geq 0$, ma $\not\equiv 0$, su $\partial(\Sigma_\lambda \setminus K)$, sempre per $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$. Perciò, siccome $w_\lambda > 0$ in K, otteniamo (13.13) per $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$. Ciò contraddice la definizione di λ_0. Dunque $\lambda_0 = 0$. Ciò significa che $u(-x_1, x') \geq u(x_1, x')$ per ogni $(x_1, x') \in \Omega_- = \{(x_1, x') \in \Omega \mid x_1, \leq 0\}$. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento con $\tilde{u}(x_1, x') = u(-x_1, x')$ che risolve lo stesso problema di Dirichlet e otteniamo che $u(-x_1, x') = u(x_1, x')$ per ogni $(x_1, x') \in \Omega$.

Dimostriamo la seconda parte del teorema. Fissiamo $x = (x_1, x') \in \Omega$ con $x_1 < 0$ e prendiamo $\lambda = x_1$. Siccome $w_\lambda > 0$ in Σ_λ, $x \in \partial\Sigma_\lambda$ e $w_\lambda(x) = 0$, per il lemma di Hopf, $\frac{\partial w_\lambda}{\partial \nu}(x) < 0$. Dato che $\nu = e_1$ e $\frac{\partial w_\lambda}{\partial \nu}(x) = -2u_{x_1}(x)$, deduciamo che $u_{x_1}(x) > 0$. Essendo u simmetrica rispetto a x_1, concludiamo che $u_{x_1} < 0$ per ogni $x = (x_1, x') \in \Omega$ con $x_1 > 0$. □

Teorema 13.14. *Sia B una palla in $\mathbb{R}^N$, centrata nell'origine, e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana. Se $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ risolve*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } B \\ u > 0 & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B \end{cases} \tag{13.14}$$

allora u è radialmente simmetrica, con derivata radiale $u_r < 0$ in $B \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Il problema è invariante per rotazioni cioè data una soluzione $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ di (13.14), per ogni rotazione R anche $v(x) = u(Rx)$ risolve (13.14), perché $\Delta v(x) = \Delta u(Rx)$ e $R(B) = B$. Prendiamo $x, y \in B$ con $|x| = |y|$ e $x \neq y$. Poniamo $\nu = \frac{x-y}{|x-y|}$. A meno di rotazioni possiamo assumere $\nu = e_1$. Quindi se $x = (x_1, x')$ allora $y = (-x_1, x')$. Per il teorema 13.13 $u(x) = u(y)$. Perciò u è radialmente simmetrica. Dimostriamo la seconda parte del teorema. Preso un punto $x \in B$, $x \neq 0$, esiste una rotazione R cariche $Rx = |x|e_1$. Allora, per la simmetria radiale, $\partial_r u(x) = \partial_{x_1} u(Rx) < 0$ per il teorema 13.13. □

Osservazione 13.15. *L'ipotesi di positività di u è essenziale. Per esempio, in dimensione 1, $u(x) = \sin x$ risolve $u'' + u = 0$ in $(-\pi, \pi)$ e $u(\pm\pi) = 0$ ma u non è simmetrica. Infatti la stretta positività è essenziale: la funzione $u(x) = 1 - \cos x$ risolve $u'' + u = 1$ in $(-2\pi, 2\pi)$ e $u(\pm 2\pi) = 0$ ma non è radialmente decrescente.*