Metodi variazionali - Lezione 4

Titolo nota 19/03/2016

Calcolo differenziale in spazi di Banach

X spazio di Banach, $U \subset X$ aperto, $u \in U$

Def Una funzione $F: U \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile secondo Fréchet in u se $\exists\, A \in X'$ (= duale di X) tale che $F(u+h) = F(u) + Ah + o(\|h\|)$ per $h \to 0$.
In tal caso il funzionale A è unico, si denota $F'(u)$ e si chiama differenziale secondo Fréchet di F in u. Se F è differenziabile secondo Fréchet in ogni punto $u \in X$ e l'applicazione $u \mapsto F'(u)$ è continua in U (rispetto alle topologie forti di X e X'), diciamo che F è di classe C^1 in U e scriviamo $F \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Osservazione (caso degli spazi di Hilbert) Se X è uno spazio di Hilbert e $F: U \subset X \to \mathbb{R}$ è differenziabile (secondo Fréchet) in $u \in U$, per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un unico $v \in X$ t.c. $F'(u)h = \langle v, h \rangle$ $\forall h \in X$. Tale vettore v si chiama gradiente di F in u e si denota $\nabla F(u)$.

Esempio 1: funzionali quadratici
Un funzionale quadratico è un funzionale $Q: X \to \mathbb{R}$ definito come $Q(u) = a(u,u)$, dove $a: X \times X \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare continua. Si ha che $Q \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $Q'(u) = a(u, \cdot) + a(\cdot, u)$. In particolare se a è simmetrica, allora $Q'(u) = 2a(u, \cdot)$.
Il calcolo di $Q'(u)$ si effettua direttamente:

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = a(u+h, u+h) - a(u,u)$$
$$= \underbrace{a(u,h) + a(h,u)}_{Ah} + a(h,h) \quad \text{e} \quad \frac{a(h,h)}{\|h\|} \longrightarrow 0 \text{ per } h \to 0.$$

Siccome A è un funzionale lineare e continuo (in quanto a è una forma bilineare e continua) si deduce che $\varphi'(u) = a(u, \cdot) + a(\cdot, u)$ è il differenziale secondo Fréchet di φ in u – inoltre, se $u_k \to u$ in X allora $|\varphi'(u_k)h - \varphi'(u)h| \le C\|u_k - u\|\|h\| + C\|h\|\|u_k - u\|$ $\forall h \in X$, cioè $\|\varphi'(u_k) - \varphi'(u)\|_{X'} \le 2C\|u_k - u\|$ e ciò implica che $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Vediamo dei casi particolari importanti.

1.a) X spazio di Hilbert (reale) v. Il funzionale $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ è un funzionale quadratico corrispondente alla forma bilineare continua $a(u,v) = \frac{1}{2}\langle u, v\rangle$. In tal caso $\varphi'(u)h = \langle u, h\rangle$ $\forall h \in X$, cioè $\nabla\varphi(u) = u$.

1.b) $X = H^1(\Omega)$, Ω dominio di $\mathbb{R}^n$.

Date delle funzioni $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1, \dots, n)$ e $q \in L^\infty(\Omega)$ consideriamo il funzionale

$$J(u) = \int_\Omega \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + q(x) u(x)^2 \right] dx \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

dove sottintendiamo la sommatoria sugli indici ripetuti (convenzione di Einstein). Tale funzionale è ben definito in $H^1(\Omega)$ (perché i coefficienti a_{ij} e q sono in L^∞). È un funzionale quadratico, corrispondente alla forma bilineare continua

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + q(x) u(x) v(x) \right] dx$$

Si ha che $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $J'(u) = a(u, \cdot) + a(\cdot, u)$.
Supponiamo in particolare che $a_{ij} = a_{ji}$. Allora

$$J'(u)h = 2\int_\Omega \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial h}{\partial x_j} + q(x) u(x) h(x) \right] dx \quad \forall u, h \in H^1(\Omega).$$

Rientrano in questa classe di funzionali i seguenti:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \implies J'(u)h = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla h(x)\, dx$$

$$J(u) = \int_\Omega q(x) u(x)^2 dx \implies J'(u)h = 2\int_\Omega q(x) u(x) h(x)\, dx$$

Esempio 2 $X = H^1(\Omega)$ con Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ Lipschitz oppure $X = H^1_0(\Omega)$ con Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$. Per gli scopi successivi è utile ricordare che $X \hookrightarrow L^p(\Omega)$ $\forall p \geq 1$ se $n = 1, 2$ oppure $\forall p \in [1, 2^*]$ dove $2^* = \frac{2n}{n-2}$, se $n \geq 3$. (immersioni di Sobolev).

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

(C) $\begin{cases} f(x, \cdot) \text{ continua per q.o. } x \in \Omega \\ f(\cdot, s) \text{ misurabile } \forall s \in \mathbb{R} \end{cases}$

(*) $\exists\, p \in (1, \infty)$ con $p \leq 2^*$ se $n \geq 3$, $\exists\, A, B \geq 0$ t.c. $|f(x, s)| \leq A + B|s|^{p-1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in \Omega$.

Poniamo $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\, ds$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e q.o. $x \in \Omega$.
Allora $\exists\, A', B' \geq 0$ t.c. $|F(x, t)| \leq A' + B'|t|^p$ $\forall t \in \mathbb{R}$
Quindi definiamo $J : X \to \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in \Omega$

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx \quad \forall u \in X.$$

Teorema Sotto le precedenti ipotesi, si ha che $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ con $J'(u)h = \int_\Omega f(x, u(x)) h(x)\, dx$ $\forall u, h \in X$.

Prima di discutere la dimostrazione, presentiamo una motivazione sul ruolo dei funzionali sopra considerati.

Soluzioni deboli e punti critici

Dati un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ e una funzione $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfacente le condizioni (C) e (*) consideriamo il problema di Dirichlet

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una soluzione (classica) di (D)
Moltiplichiamo l'equazione per una generica funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integriamo su Ω. Per il teorema della divergenza, si ha che $\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx$

e quindi otteniamo che u risolve

$$(W) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definizione Una funzione $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ che verifica (W) si chiama soluzione debole di $-\Delta u = f(x,u)$ in Ω.
Una soluzione debole di (W) appartenente a $H^1_0(\Omega)$ si chiama soluzione debole del problema di Dirichlet (D).

Dunque per definizione ogni soluzione classica di (D) è anche una soluzione debole.

Consideriamo ora il funzionale $J: H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito così: $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \quad \forall u \in H^1_0(\Omega)$.

In base a quanto visto negli esempi 1 e 2, tale funzionale è di classe C^1 in $H_0^1(\Omega)$. Inoltre

$$J'(u)h = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx - \int_\Omega f(x,u)h \, dx \quad \forall u, h \in H_0^1(\Omega).$$

Dunque i punti critici di J, cioè le funzioni $u \in H_0^1(\Omega)$ tali che $J'(u) = 0$, sono esattamente le soluzioni deboli del problema (D) e viceversa, perché $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $H_0^1(\Omega)$. In altre parole, cercare soluzioni deboli di (D) equivale a cercare punti critici di J.

Dimostrazione del teorema

Consideriamo il caso $X = H_0^1(\Omega)$ con Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, in dimensione $n \geq 3$, con $\partial\Omega$ Lipschitz. Gli altri casi si studiano in modo analogo.

Step 1 Il funzionale J è ben definito in $H_0^1(\Omega)$.

Abbiamo visto che $\exists\, A', B' \geq 0$ t.c. $|F(x,t)| \leq A' + B'|t|^p$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e per q.o. $x \in \Omega$, essendo $p \in [1, 2^*]$. Quindi $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ si ha che $|F(x,u(x))| \leq A' + B'|u(x)|^p \in L^1(\Omega)$ perché Ω è limitato e quindi ha misura finita e $u \in L^p(\Omega)$, dato che $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ per $p \in [1, 2^*]$ (immersioni di Sobolev). Le condizioni (C) su f garantiscono inoltre che

$$\begin{cases} F(x,\cdot) \in C(\mathbb{R}) & \text{per q.o. } x \in \Omega \\ F(\cdot,t) \text{ misurabile}, & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quindi la funzione $x \longrightarrow F(x, u(x))$ è in $L^1(\Omega)$ per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ cioè J è ben definito in $H_0^1(\Omega)$.

Step 2 $\forall u, h \in H_0^1(\Omega)$ si ha che $f(\cdot, u)h \in L^1(\Omega)$

Infatti

$$\int_\Omega |f(x,u(x))h(x)| \, dx \leq \int_\Omega \left(A + B|u(x)|^{p-1}\right)|h(x)| \, dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\tilde{A} + \tilde{B}|u(x)|^{2^*-1}\right)|h(x)| \, dx \qquad (\text{perché } p \leq 2^*)$$

$$\leq \widetilde{A} \int_\Omega |h(x)|\,dx + \widetilde{B}\left(\int_\Omega |u(x)|^{(2^*-1)\frac{2^*}{2^*-1}}\,dx\right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left(\int_\Omega |h(x)|^{2^*}dx\right)^{1/2^*}$$

$$= \widetilde{A}\,\|h\|_{L^1} + \widetilde{B}\,\|u\|_{L^{2^*}}^{2^*-1}\|h\|_{L^{2^*}} < \infty$$ perché $H^1(\Omega)$ è immerso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, 2^*]$.

<u>Step 3</u> $\forall u, h \in H^1(\Omega)$ $\exists \frac{\partial J}{\partial h}(u) = \int_\Omega f(x, u(x))\,h(x)\,dx$

Svilupp

$$\frac{J(u+\varepsilon h) - J(u)}{\varepsilon} - \int_\Omega f(x, u(x))\,h(x)\,dx =$$

$$= \int_\Omega \underbrace{\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[F(x, u+\varepsilon h) - F(x,u)\right] - f(x,u)\,h\right\}}_{g_\varepsilon(x)} dx$$

Osservo che per q.o. $x \in \Omega$ si ha $g_\varepsilon(x) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Inoltre, per il teorema del valor medio, per q.o. $x \in \Omega$ $\exists\, \vartheta \in [0,1]$, in generale dipendente da x, tale che $F(x, u(x)+\varepsilon h(x)) - F(x, u(x)) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, u(x) + \varepsilon\vartheta h(x))\,\varepsilon h(x)$.

Essendo $\frac{\partial F}{\partial t} = f$, otteniamo che

$$|g_\varepsilon(x)| = |f(x, u(x)+\varepsilon\vartheta h(x)) - f(x, u(x))|\,|h(x)|$$
$$\leq \left[|f(x, u(x)+\varepsilon\vartheta h(x))| + |f(x, u(x))|\right]|h(x)|$$
$$\leq \left[A + B|u(x)+\varepsilon\vartheta h(x)|^{p-1} + A + B|u(x)|^{p-1}\right]|h(x)|$$

Usando la disuguaglianza $|(\alpha+\beta)^q| \leq 2^q(\alpha^q + \beta^q)$ con $q = p-1$, deduciamo che

$$|g_\varepsilon(x)| \leq 2A|h(x)| + \left(B_1|u(x)|^{p-1} + B_2|\varepsilon\vartheta|^{p-1}|h(x)|^{p-1}\right)|h(x)|$$
$$\leq \underbrace{2A|h(x)| + B_1|u(x)|^{p-1}|h(x)| + B_2|h(x)|^p}_{g(x)}$$

perché $|\varepsilon\vartheta| \leq 1$ e $p \geq 1$.

Siccome $g \in L^1(\Omega)$ (si usano ancora le immersioni di Sobolev e la disuguaglianza di Hölder come nello Step 2), si può applicare il teorema di convergenza dominata per dedurre che $\int_\Omega g_\varepsilon(x)\,dx \longrightarrow 0$ per $\varepsilon \to 0$.

cioè $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u+\varepsilon h) - J(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega f(x, u(x))\, h(x)\, dx$

Step 4 J è differenziabile secondo Gâteaux in ogni $u \in H^1(\Omega)$ e $J_G'(u)\, h = \int_\Omega f(x, u(x))\, h(x)\, dx$.

Innanzitutto osserviamo che l'applicazione $h \mapsto \int_\Omega f(x,u)\, h\, dx$ è un funzionale lineare in $H^1(\Omega)$. Verifichiamo anche che è continuo. cioè che $\exists\, C > 0$ t.c. $\left| \int_\Omega f(x,u)\, h\, dx \right| \le C \|h\|_{H^1}$.

Riprendiamo e completiamo le stime dello step 2

$$\left| \int_\Omega f(x,u)\, h\, dx \right| \le \tilde{A} \|h\|_{L^1} + \tilde{B} \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} \|h\|_{L^{2^*}}$$

$$\le C_1 \|h\|_{H^1} + C_2 \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} \|h\|_{H^1} \quad \text{per le immersioni di } H^1(\Omega) \text{ in } L^p \text{ con } p = 1, 2^*$$

$$\le C \left(1 + \|u\|_{H^1}^{2^*-1}\right) \|h\|_{H^1}$$

Per completare la dimostrazione useremo il seguente fatto generale:

Proposizione Dato uno spazio di Banach X e un funzionale $J : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenziabile in ogni punto $u \in X$, se l'applicazione $u \mapsto J_G'(u)$ è continua, allora $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $J'(u) = J_G'(u)$.

Step 5 (svolto nella lezione 5) L'applicazione $u \mapsto J_G'(u)$ è continua (da $H^1(\Omega)$ nel suo duale).

Presa una successione $(u_k) \subset H^1(\Omega)$ t.c. $u_k \to u$ bisogna dimostrare che $\|J_G'(u_k) - J_G'(u)\| \longrightarrow 0$

Per un ben noto fatto sulla convergenza in

spazi metrici, basta provare che ogni sottosuccessione di (u_k) ammette un'estratta (u_{k_j}) t.c.
$\| J_G'(u_{k_j}) - J_G'(u) \| \longrightarrow 0$ per $j \to \infty$.

Prendiamo quindi una generica sottosuccessione di (u_k), che denotiamo ancora (u_k). Siccome $u_k \to u$ in $H^1(\Omega)$, si ha che $u_k \to u$ in $L^{2^*}(\Omega)$ (per l'immersione di Sobolev) e, per il teorema di convergenza dominata inversa, $\exists (u_{k_j}) \subset (u_k)$, $\exists v \in L^1(\Omega)$ t.c. $u_{k_j}(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e $|u_{k_j}(x)|^{2^*} \le v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e $\forall j$.

Ora stimiamo

$$| J_G'(u_{k_j}) h - J_G'(u) h | = \left| \int_\Omega \left(f(x, u_{k_j}) - f(x,u) \right) h \, dx \right|$$

$$\le \left(\int_\Omega | f(x, u_{k_j}) - f(x,u) |^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{2^*}} \| h \|_{L^{2^*}}$$

Siccome $\| h \|_{L^{2^*}} \le C \| h \|_{H^1}$ (Sobolev), segue che

$$\| J_G'(u_{k_j}) - J_G'(u) \| \le \left(\int_\Omega | f(x, u_{k_j}(x)) - f(x, u(x)) |^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{2^*}}$$

Dimostriamo che l'integrale a secondo membro va a zero. Si ha che $| f(x, u_{k_j}(x)) - f(x, u(x)) |^{\frac{2^*}{2^*-1}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ per q.o. $x \in \Omega$ (perché $u_{k_j} \to u$ q.o. e $f(x, \cdot)$ è continua per q.o. x). Inoltre $| f(x, u_{k_j}(x)) - f(x, u(x)) |^{\frac{2^*}{2^*-1}} \le$

$$\le C \left[| f(x, u_{k_j}(x)) |^{\frac{2^*}{2^*-1}} + | f(x, u(x)) |^{\frac{2^*}{2^*-1}} \right] \le$$

$$\le C \left[A + B |u_{k_j}(x)|^{2^*-1} \right]^{\frac{2^*}{2^*-1}} + C \left[A + B |u(x)|^{2^*-1} \right]^{\frac{2^*}{2^*-1}}$$

$$\le C_1 + C_2 |u_{k_j}(x)|^{2^*} + C_3 |u(x)|^{2^*} \le C_1 + C_2 |v(x)| + |u(x)|^{2^*}$$

$\in L^1(\Omega)$. Il risultato segue dal thm. di conv. dominata. $\square$