Metodi variazionali - Lezione 5

Titolo nota 19/03/2016

Applicazione ad un problema di Dirichlet non lineare, coercivo e convesso

Dati: Ω dominio limitato in $\mathbb{R}^n$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $q \geq 0$, $h \in L^2(\Omega)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, decrescente, tale che $\exists\, p \geq 1$, $\exists\, A, B \geq 0$: $|f(t)| \leq A + B|t|^{p-1}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ con $p \leq 2^*$ se $n \geq 3$

studio l'esistenza di soluzioni deboli del pb. di Dirichlet

$$(D) \begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) + h(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Non è restrittivo supporre $f(0) = 0$. Altrimenti si considera $f(t) - f(0)$ al posto di f e $h(x) + f(0)$ al posto di h.

Il problema (D) include il caso dell'equazione di Poisson $-\Delta u = h(x)$ in Ω - Esso è significativo in particolare se $h \neq 0$ - Se $h \equiv 0$ la funzione identicamente nulla è soluzione.

Teorema Sotto le ipotesi precedenti, il pb. (D) ammette un'unica soluzione debole -

Ricordiamo che per soluzione debole di (D) si intende una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + q(x) u \varphi)\, dx = \int [f(u) + h(x)]\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Introduciamo il funzionale $J: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definito

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q(x)u^2)\, dx - \int_\Omega (F(u) + h(x)u)\, dx$$

dove $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$. Osserviamo che J è ben definito e di classe C^1 in $H_0^1(\Omega)$. In particolare:

$J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q(x)u^2)\, dx$ è un funzionale quadratico

con $J_0'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + q(x) u \varphi)\, dx \quad \forall u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(u)\, dx$ è un funzionale non lineare

di classe C^1 in $H^1_0(\Omega)$ con $\mathcal{F}'(u)\varphi = \int_\Omega f(u)\varphi\,dx$.

$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega h(x)u(x)\,dx$ è un funzionale lineare e continuo (perché $h \in L^2(\Omega)$ e quindi $|\mathcal{L}(u)| \le \|h\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$) e, in quanto tale, di classe C^1 in $H^1_0(\Omega)$, con $\mathcal{L}'(u)\varphi = \mathcal{L}(\varphi)$.

Dunque $J \in C^1(H^1_0(\Omega), \mathbb{R})$ con

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + q(x)u\varphi)\,dx - \int_\Omega (f(u) + h(x))\varphi\,dx \qquad \forall u, \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Pertanto le soluzioni deboli di (D) sono tutti e soli i punti critici di J, cioè le funzioni $u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. $J'(u) = 0$ ($\iff J'(u)\varphi = 0 \ \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, dato che $C^\infty_c(\Omega)$ è denso in $H^1_0(\Omega)$).

Lemma J è inferiormente limitato e coercivo in $H^1_0(\Omega)$.

Dim: Siccome f è decrescente e $f(0) = 0$, si ha che $F(t) \le 0$ per $t \ge 0$ e $F(t) \ge 0$ per $t \le 0$. Quindi $F(t) \le 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Tenendo conto anche che $q \ge 0$ q.o. in Ω e $h \in L^2(\Omega)$, otteniamo

$$J(u) \ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \|h\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \ge \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} - c\,\|\nabla u\|_{L^2}$$

grazie alle disuguaglianze di Schwarz e di Poincaré –

Quindi $J(u) \ge \inf_{t \ge 0}\left(\frac{1}{2}t^2 - ct\right) > -\infty \ \forall u \in H^1_0(\Omega)$

cioè J è inferiormente limitato in $H^1_0(\Omega)$.

Inoltre, dato che – per la disuguaglianza di Poincaré – $\|\nabla u\|_{L^2}$ è una norma in $H^1_0(\Omega)$ equivalente alla norma standard di H^1, segue che se $\|u_k\|_{H^1} \to \infty$ allora $J(u_k) \to \infty$ cioè J è coercivo in H^1_0. □

Lemma 2 J è strettamente convesso.

Dim I^a parte: dimostro che

$$(J'(u_1) - J'(u_2))(u_1 - u_2) \geq \|u_1 - u_2\|^2_{H^1_0}$$

Infatti:

$$[J'(u_1) - J'(u_2)](u_1 - u_2) = \int_\Omega [\nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2) + q(x) u_1 (u_1 - u_2)]\, dx$$

$$- \int_\Omega f(u_1)(u_1 - u_2)\, dx - \int_\Omega [\nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) + q(x) u_2 (u_1 - u_2)]\, dx + \int_\Omega f(u_2)(u_1 - u_2)\, dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2\, dx + \int_\Omega q(x)(u_1 - u_2)^2\, dx - \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2)\, dx$$

$$\geq \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2\, dx$$ perché $q(x) \geq 0$ per q.o. $x \in \Omega$ e f è decrescente ($s \leq t \iff f(s) \geq f(t)$).

Come già osservato, $\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2} = \|u_1 - u_2\|_{H^1_0}$.

II parte: dimostro che J è strettamente convessa.

Fissate due funzioni $u, v \in H^1_0(\Omega)$ con $u \neq v$ considero la funzione $\varphi(\lambda) = J(\lambda u + (1-\lambda)v)$

Si ha che φ è derivabile e

$\varphi'(\lambda) = J'(\lambda u + (1-\lambda)v)(u - v)$ (per la regola di derivazione delle funzioni composte).

Quindi $\forall\, t, s \in [0,1]$ si ha

$$(\varphi'(t) - \varphi'(s))(t - s) = J'(tu + (1-t)v)[(t-s)(u-v)] +$$
$$- J'(su + (1-s)v)[(t-s)(u-v)] =$$
$$= [J'(tu + (1-t)v) - J'(su + (1-s)v)][(tu + (1-t)v) - (su + (1-s)v)]$$
$$\geq (t-s)^2 \|u - v\|^2_{H^1_0} > 0 \text{ se } s \neq t, \text{ perché } u \neq v \quad (*)$$

Da ciò segue che φ' è strettamente crescente in $[0,1]$ e dunque φ è strettamente convessa. In particolare $\forall\, \lambda \in (0,1)$ si ha che $\varphi(\lambda) < \lambda\varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0)$ cioè $J(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda J(u) + (1-\lambda) J(v)$ cioè J è strettamente convesso.

Per le proprietà viste finora (in particolare J continuo, coercivo e convesso in $H^1_0(\Omega)$) possiamo già

(*) si è usata la prima parte con $u_1 = tu + (1-t)v$, $u_2 = su + (1-s)v$.

concludere che $\exists\, u \in H^1_0(\Omega)$ t.c. $J(u) = \min_{H^1_0} J$.
Inoltre, essendo J differenziabile, per il teorema di Fermat si ha che $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ $\frac{d}{dt} J(u+tv)\Big|_{t=0} = 0$ cioè $J'(u)v = 0$ cioè u è un punto critico di J e quindi una soluzione debole di (D).

L'unicità della soluzione debole, ovvero dei punti critici di J si ottiene sulla base di quest'ultimo risultato.

Lemma X spazio di Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ strettamente convesso e differenziabile in X. Allora J ammette al più un punto critico.

dim Per assurdo J ammette due punti critici distinti $u_1, u_2 \in X$. Consideriamo la funzione $\varphi(t) = J(tu_1 + (1-t)u_2)$. Allora φ è derivabile e $\varphi'(t) = J'(tu_1+(1-t)u_2)[u_1 - u_2]$. In particolare $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Per convessità $\varphi(t) \geq \varphi(0) + t\varphi'(0)$ e $\varphi(t) \geq \varphi(1) + (t-1)\varphi'(1)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ cioè $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ e $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
D'altra parte, per la stretta convessità di J, $\forall t \in (0,1)$
$\varphi(t) = J(tu_1 + (1-t)u_2) < tJ(u_1) + (1-t)J(u_2)$
$= t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0) \leq t\varphi(t) + (1-t)\varphi(t) = \varphi(t)$ ↯.

Osservazione Il risultato di esistenza e unicità sopra discusso si può estendere a problemi in cui al posto del Laplaciano si ha un operatore ellittico in forma di divergenza.