Titolo nota 03/03/2020

Corso di Metodi variazionali A.A. 2019/20

corso di 6 CFU = 48h (38+10)

Prerequisiti: istituzioni di Analisi matematica
spazi di Sobolev in più variabili (Analisi superiore, modulo B, Prof. Tenacini)
spazio di Sobolev $H^1([0,1])$
(Analisi superiore, modulo C, prof. Capietto)

Esame: orale

Testi consigliati:

Badiale, Serra - Semilinear elliptic eq's for beginners
Brezis - Analisi funzionale
Dacorogna - Introduction to the Calculus of Variations
Struwe - Variational Methods
dispense (prof. Caldiroli)

3-7 marzo 4 lezioni (prof. Caldiroli) modalità a distanza

Calcolo delle Variazioni - alcuni problemi classici.

Note storiche.

primi contributi nell'ellenismo e tanto impero su problemi isoperimetrici (Zenodoro, Archimede, Pappo, etc.).

Problema della brachistocrona:

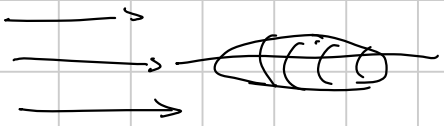


Galileo 1638
risolto nel 1697 (Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli)

problema test per verificare la teoria del calcolo infinitesimale.

Principio di Fermat di ottica geometrica (1662) sulla traiettoria della luce in un mezzo con indice di rifrazione variabile.

Problema di Newton sulla forma di un oggetto con asse di simmetria che offre la minima resistenza in un fluido



Primo test di Calcolo delle Variazioni: Eulero 1744

Maupertuis (principio di minima azione), Lagrange, Hamilton, Jacobi.

XX secolo: contributi di Tonelli, Hilbert, Lebesgue

strumenti: teoria della misura, analisi funzionale.

I problemi di C.d.V. si formulano così:

Dati: • una classe X di oggetti ammissibili

• un'applicazione $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ inferiormente limitata

si vuole studiare l'esistenza del minimo di F in X.

Def. Un elemento $u \in X$ è punto di minimo per F in X se $F(u) \leq F(v)$ $\forall v \in X$.

Def. Una successione minimizzante è una successione $(u_n) \subset X$ t.c. $F(u_n) \longrightarrow \inf_X F$.

Spesso X è uno spazio funzionale e il funzionale F è della forma

$$F(u) = \int_\Omega \varphi(x, u(x), Du(x))\, dx$$

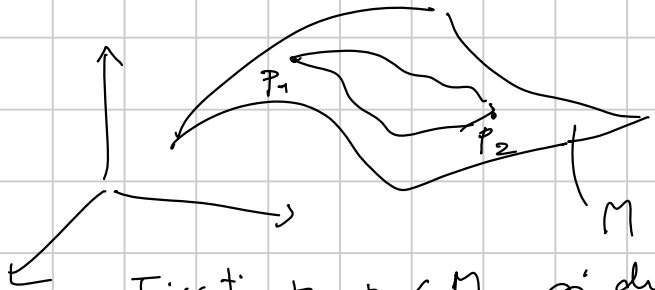
X è uno spazio di funzioni $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

Ω dominio $=$ Ω aperto non vuoto connesso.

Studiare un problema di minimo $\inf_X F$ significa

- stabilire se esiste il punto di minimo
- " " " il punto di min è unico
- determinare esplicitamente il punto di minimo
- " proprietà qualitative del pto di min.

Esempio 1 Problema delle geodetiche.



M varietà riemanniana connessa.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ metrica riemanniana

Fissati $p_1, p_2 \in M$ si definisce

$$X = \{\gamma \in C^1([0,1], M) : \gamma(0) = p_1,\ \gamma(1) = p_2\}$$

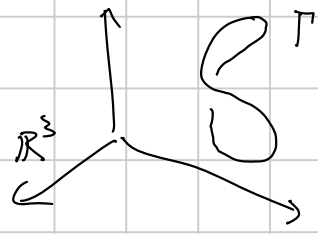
$$F(\gamma) = \text{lunghezza di } \gamma = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt$$

In generale, $\forall p \in M$, $\forall v \in T_pM$

$$\|v\|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}$$

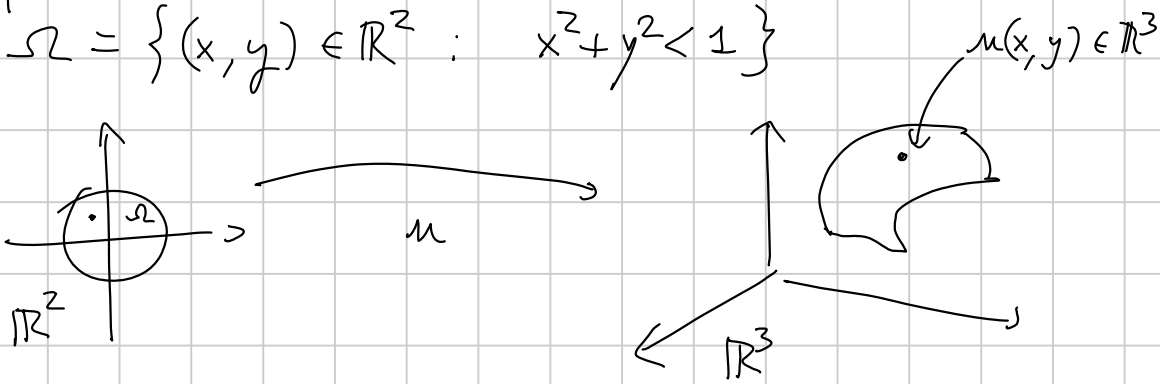
Esempio 2 (problema di Plateau).

Γ (sostegno di una) curva chiusa semplice in $\mathbb{R}^3$



ricerca della superficie di area minima tra tutte quelle delimitate da Γ

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$$



$F(u)$ = area della superficie parametrizzata da u

$$= \int_\Omega |u_x \wedge u_y| \, dx\, dy$$

$$X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) : u|_{\partial\Omega} \text{ parametrizzazione di } \Gamma\}.$$

Gli spazi C^1 non sono adeguati per lo studio dei problemi di minimo (sulle geodetiche, sul pb. di Plateau) - Serve lavorare con gli spazi di Sobolev.

Problemi di ottimizzazione di forma (i funzionali dipendono dalla forma del dominio).

Esempio 3 Disuguaglianza isoperimetrica.

Fissato $\alpha>0$, trovare il dominio 3-dim (o N-dim) di massimo volume tra quelli con frontiera la cui area è α. In dim N

$$\inf \left\{ \frac{|\partial\Omega|^{\frac{1}{N-1}}}{|\Omega|^{\frac{1}{N}}} : \Omega \subset \mathbb{R}^N, \text{ domini regolari limitati} \right\}$$

$|\Omega|$ = misura di Lebesgue N-dim. di $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato regolare

$|\partial\Omega|$ = area $(N-1)$-dim di $\partial\Omega$.

$$\frac{|\partial\Omega|^{\frac{1}{N-1}}}{|\Omega|^{\frac{1}{N}}} \geq \frac{|\partial B|^{\frac{1}{N-1}}}{|B|^{\frac{1}{N}}} \qquad \forall\, \Omega \text{ dominio regolare limitato.}$$

B = palla unitaria di $\mathbb{R}^N$.

Posto $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$ si ha che $|\Omega_\lambda| = \lambda^N |\Omega|$

$|\partial\Omega_\lambda| = \lambda^{N-1} |\partial\Omega|$

($\Longrightarrow$ possiamo supporre $\alpha = |\partial B|$).

Esempio 4

Vale che:

Teorema. $\forall\, \Omega$ dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ (regolare)

$\exists\,! \lambda = \lambda(\Omega) > 0$ t.c. il problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \Omega, \quad u > 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzioni non nulle. Inoltre la soluzione è unica a meno di costanti moltiplicative

$\lambda(\Omega)$ = primo autovalore dell'operatore di Laplace - Dirichlet

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$ operatore di Laplace

$u|_{\partial\Omega} = 0$ condizione di Dirichlet.

Pb: minimizzare $\lambda(\Omega)$ tra tutti domini a volume fissato.

Si ha che $\lambda(\Omega) \geq \lambda(B_R)$ $\forall\, \Omega$ dominio limitato con $|\Omega| = \alpha$

essendo $R > 0$ t.c. $|B_R| = \alpha$.

(cfr. Antoine Henrot, Michel Pierre
Shape Variation and Optimization).

Un'altro motivo a supporto dello studio di problemi di Calcolo delle Variazioni è che risolvere problemi di minimo può essere un modo per studiare problemi della forma

$$\begin{cases} \text{equazione differenziale} \\ \text{condizione al contorno.} \end{cases}$$

Fissiamo un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e regolare.
e $f: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue.
Studiamo il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \Omega \quad \text{eq. di Poisson} \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \quad \text{condizione di Dirichlet (non omogenea)} \end{cases}$$

L'incognita è $u: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad u(x) \quad x \in \overline{\Omega}$

Teorema (principio di Dirichlet)
Una funzione $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ risolve (P) se e solo se u è punto di minimo di

$$F(v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - fv \right) dx$$

$$v \in X \underset{\text{def}}{=} \{ v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) : v|_{\partial\Omega} = g \}.$$

Dunque risolvere $(P) \Longleftrightarrow$ studiare $\inf_X F$

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_N} \right)$$

$$|\nabla v|^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_N} \right)^2$$

Attenzione! Sulla funzione u si chiede regolarità C^2 in Ω per ipotesi.

Dim 1ª parte: Supponiamo u soluzione di (7)
Voglio provare che u è punto di min. di F cioè
$F(u) \le F(v) \quad \forall v \in X$.

Osservo che $u \in X$. Prendo una qualunque $v \in X$. Chiamo $h = v - u$. Osservo che $h \in C^1(\overline{\Omega})$ e $h|_{\partial\Omega} = 0$ perché $v = g$ su $\partial\Omega$ e $u = g$ su $\partial\Omega$ $\left(\iff \begin{array}{l} u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \\ v(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \end{array}\right)$.

$$F(v) - F(u) = F(u+h) - F(u) =$$

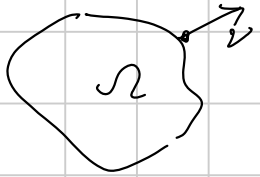
$$= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla(u+h)|^2 - (u+h)f\right]dx - \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right)dx$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 \cancel{- \int_\Omega uf} - \int_\Omega hf +$$

$$\cancel{- \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2} + \cancel{\int_\Omega uf}$$

Applico il teorema della divergenza a $G = h\nabla u$

$$\int_\Omega \operatorname{div} G \, dx = \int_{\partial\Omega} G \cdot \nu \, d\sigma$$



$$\operatorname{div} G = \operatorname{div}(h\nabla u) = \nabla h \cdot \nabla u + h\Delta u$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = \int_\Omega \operatorname{div}(h\nabla u)\,dx - \int_\Omega h\Delta u \, dx$$

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} h\nabla u \cdot \nu \, d\sigma}_{\text{"0 perché } h|_{\partial\Omega} = 0} - \int_\Omega h\Delta u \, dx$$

$$F(v) - F(u) = -\int_\Omega h\,\Delta u - \int_\Omega h f + \frac{1}{2}\int |\nabla h|^2$$

$$= -\int_\Omega (\Delta u + f)\, h\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx$$

Siccome $\Delta u + f = 0$ in Ω resta

$$F(v) - F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx \geq 0.$$

$$\Longrightarrow F(v) \geq F(u) \quad \forall v \in X$$

<u>2ª parte</u> Supponiamo u punto di minimo (e per ipotesi $u \in C^2(\Omega)$) e provo che u risolve (P).

Siccome $u \in X$, in particolare $u|_{\partial\Omega} = g$.

Fisso $h \in C_c^\infty(\Omega)$ e definisco $v = u + \varepsilon h$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon \neq 0$). Osservo che $v \in C^1(\overline{\Omega})$ $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = g$. Dunque $v \in X$.

So che $F(u) \leq F(v)$.

$$0 \leq F(v) - F(u) = F(u + \varepsilon h) - F(u)$$

$$= -\varepsilon \int_\Omega (\Delta u + f) h\, dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx$$

ciò vale $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$

Prendo $\varepsilon > 0$ e divido per ε e trovo:

$$0 \leq -\int_\Omega (\Delta u + f) h\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx$$

Per $\varepsilon \to 0^+$ trovo $0 \le -\int_\Omega (\Delta u + f)\, h\, dx$

Ora prendo $\varepsilon < 0$ e divido per ε, trovo

$$0 \ge -\int_\Omega (\Delta u + f)\, h\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla h|^2\, dx$$

Passo al limite $\varepsilon \to 0^-$ trovo $0 \ge -\int_\Omega (\Delta u + f) h$

Resta che $\int_\Omega (\Delta u + f)\, h\, dx = 0$

Ciò vale $\forall\, h \in C_c^\infty(\Omega)$,

Lemma di annullamento: Se $\int_\Omega \varphi\, h\, dx = 0$ $\forall\, h \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$ allora $\varphi = 0$ q.o. in Ω

$\Longrightarrow \Delta u + f = 0$ q.o. in Ω. Ma la funzione $\Delta u + f$ è continua in Ω perché $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C(\Omega)$ — Deve essere $\Delta u + f = 0$ in ogni punto $x \in \Omega$, Dunque u risolve (P). □

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h - f h)\, dx$$

↑ derivata direzionale di F in u lungo la direzione h.

$$\frac{\partial F}{\partial h}(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon}.$$

u risolve (P) $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\frac{\partial F}{\partial h}(u) = 0 \quad \forall\, h \in C_c^\infty(\Omega)}$

u è punto critico di F

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h - f h)\, dx = 0 \quad \forall\, h \in C_c^\infty(\Omega)$$

versione "debole" dell'eq. diff. $\Delta u + f = 0$ in Ω

l'eq. diff. è l'eq. di Eulero - Lagrange associata al funzionale F.