Metodi Variazionali – Lezione 2.

Titolo nota 04/03/2020

Il problema dell'estensione armonica (via principio di Dirichlet)

Dato un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e data $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, si cercano soluzioni di

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

L'incognita è una funzione $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$
$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

Δ = laplaciano = $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

Def. Le funzioni $v \in C^2(\Omega)$ t.c. $\Delta v(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$ sono dette funzioni armoniche in Ω.
Una funzione $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica in Ω e $u|_{\partial\Omega} = g$ si chiama estensione armonica di g in Ω.

Motivazioni:
In fisica u = potenziale elettrostatico presente in Ω quando su $\partial\Omega$ vi è una distribuzione di carica data da g.

Metodi diversi per lo studio del pb. (P):
teoria del potenziale, metodo di Perron, metodo diretto del calcolo delle variazioni.

Per la teoria del potenziale (P) $\Longleftrightarrow$ "$Au = f$"

$\Longleftrightarrow \quad u = A^{-1} f$.

Ci basiamo invece sul principio di Dirichlet

Passo del problema (P) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$ $\left(g : \partial\Omega \to \mathbb{R} \text{ data}\right)$

al problema di minimizzazione

$\inf_X F$ dove $F(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ ← integrale di Dirichlet e

$$X = \{ v \in C^1(\overline{\Omega}) \; ; \; v|_{\partial\Omega} = g \}$$

Obiettivo: studiare esistenza (ed eventuale unicità) del punto di minimo.

Strategia: prendere una successione minimizz. $(u_n) \subset X$ t.c. $F(u_n) \longrightarrow \inf_X F \geq 0$

Vorrei estrarre una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ t.c. $u_{n_k} \longrightarrow u$ rispetto a qualche topologia in maniera tale che $u \in X$ e $F(u) = \lim_{k\to\infty} F(u_{n_k})$

In tal caso u è punto di minimo.

Abbiamo bisogno per cominciare che (u_n) risulti limitata in X munito di una certa metrica

A questo livello la metrica naturale di X è quella indotta dalla norma di $C^1(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ i=1,\dots,N}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| .$$

Sappiamo solo che $\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow$ cost.

In generale non possiamo dedurre alcuna limitazione su $\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}$.

In $C^1(\overline{\Omega})$ consideriamo una nuova norma

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}$$

Così facendo si costruisce uno spazio normato ma non di Banach.

Prendiamo il completamento di

$$E = \left\{ u \in C^1(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx < \infty \right\}$$

Teorema di Meyers–Serrin (1964)
Il completamento di E rispetto a $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ è lo spazio di Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : \exists\, \partial_i u \in L^2(\Omega)\ i = 1, \dots, N \}$$

$W^{1,2}(\Omega)$ è Banach (anzi Hilbert) con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$
Il prodotto interno è dato da

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2}$$

$$= \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$= \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

C'è da sistemare la questione della condizione al contorno. ($u = g$ su $\partial\Omega$).

Le funzioni in $W^{1,2}(\Omega)$ non è detto siano continue.

Si assume $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $g \in W^{1,2}(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$

Si introduce lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$ = chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$. ("moralmente" $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \iff u \in W^{1,2}(\Omega)$ e "$u = 0$ su $\partial\Omega$")

Si introduce lo spazio $W_g^{1,2} \underset{\text{def.}}{=} g + W_0^{1,2}(\Omega)$.

"$u = g$ su $\partial\Omega$" in senso debole $\iff u \in W_g^{1,2}$.

$W_0^{1,2}$ è sottospazio di Banach di $W^{1,2}(\Omega)$

$W_g^{1,2}$ è un sottospazio affine di $W^{1,2}(\Omega)$ ed è completo.

In particolare $W_g^{1,2}$ è sottinsieme chiuso e convesso dello spazio di Banach $W^{1,2}$

Schema generale per la risoluzione del problema dell'estensione armonica:

Step 1 (esistenza e unicità del punto di minimo)

Fissato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato e data $g \in W^{1,2}(\Omega)$

$\exists!\ u \in W_g^{1,2}$ t.c. $F(u) = \inf_{W_g^{1,2}} F$

Step 2 Il punto di minimo verifica $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0$ $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$

(è la versione debole dell'eq. di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω)

formulazione classica

$\Delta u = 0$ in Ω

$u = g$ su $\partial\Omega$

formulazione debole

$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$

$u \in W_g^{1,2} \iff u - g \in W_0^{1,2}$

Step 3 (regolarità interna)
Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è soluzione debole di $\Delta u = 0$ in Ω allora $u \in C^2(\Omega)$ e soddisfa $\Delta u = 0$ in Ω in senso classico.

Step 4 (regolarità fin sul bordo)
Se Ω è dominio regolare, di classe C^1 (cioè $\partial\Omega$ è una varietà $(N-1)$-dim di classe C^1) e se $g \in W^{1,2}(\Omega)$ è continua su $\partial\Omega$ allora $u \in C(\overline{\Omega})$ e $u = g$ su $\partial\Omega$ in senso classico.

Conclusione Sotto le suddette ipotesi su Ω ogni $g \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ ammette un'unica estensione armonica in Ω.

Discussione del passo 1 ($\exists$ e unicità del minimo).

Uso la versione generale del teorema di Weierstrass:

X spazio di Banach riflessivo
$\mathcal{C} \subset X$ convesso chiuso e non vuoto.
$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.
(a) $\inf_{\mathcal{C}} F > -\infty$
(b) le successioni minimizzanti siano limitate in X
(c) F debolmente sequenzialmente semicont. inferiorm.

cioè se $u_n \xrightarrow{w} u$ allora $F(u) \le \liminf F(u_n)$

$\Longrightarrow \exists\, u \in C$ t.c. $F(u) = \inf_C F$.

Applico tale teorema prendendo
$X = W^{1,2}(\Omega)$ Banach e riflessivo perché Hilbert

$C = W^{1,2}_g$ convesso, chiuso

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2}.$$

(a) $\inf_C F \ge 0$

(b) successioni minimizzanti limitate?
Si usa la disuguaglianza di Poincaré:

se Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ allora
$\exists\, C_\Omega > 0$ t.c. $\int_\Omega u^2 dx \le C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad \forall u \in W^{1,2}_0(\Omega)$
(non in $W^{1,2}(\Omega)$).

Cerco una versione della disug. di Poincaré in $W^{1,2}_g$?

Se $u \in W^{1,2}_g$ $\quad u - g \in W^{1,2}_0(\Omega)$
Conviene porre $v = u - g$

Poincaré $v \in W^{1,2}_0$ ↓

$$\|u\|_{L^2} = \|v + g\|_{L^2} \le \|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \le$$

$$\le C_0 \|\nabla v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}$$
$$= C_0 \|\nabla u - \nabla g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \le$$

$$\leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2} + \underbrace{C \|\nabla g\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}}_{C_1}$$

$\exists C_0, C_1 > 0$ t.c.

$$\|u\|_{L^2} \leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2} + C_1 \quad \forall u \in W^{1,2}_g \quad (*)$$

$(C_0 = C_0(\Omega), \quad C_1 = C_1(\Omega, g))$.

Sia $(u_n) \subset W^{1,2}_g$ t.c. $F(u_n) \longrightarrow \inf_{W^{1,2}_g} F$.

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2} = 2 F(u_n) \leq \text{cost} \quad \forall n.$$

$\hookleftarrow$ succ. convergente.

$$\|u_n\|_{L^2} \leq C_0 \|\nabla u_n\|^2_{L^2} + C_1 \leq C_2 + C_1 \quad \forall n.$$

$\Longrightarrow (u_n)$ è limitata in $W^{1,2}$

(c) F è debolmente semicontinua inferiormente

Supponiamo $u_n \xrightarrow[w]{} u \quad w\text{-}W^{1,2}$

Allora $\nabla u_n \xrightarrow[w]{} \nabla u \quad w\text{-}L^2$ $\Longleftarrow$

In generale $f_n \xrightarrow[w]{} f$ $w\text{-}L^2$ significa che

$$\int_\Omega f_n \varphi \longrightarrow \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

$$0 \leq \|\nabla(u_n - u)\|^2_{L^2} = \langle \nabla(u_n - u), \nabla(u_n - u) \rangle_{L^2}$$

$$= \langle \nabla u_n, \nabla u_n \rangle_{L^2} - 2 \langle \nabla u_n, \nabla u \rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2}$$

$$\langle \nabla u_n, \nabla u \rangle_{L^2} = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u$$

perché $\nabla u_n \xrightarrow[w]{} \nabla u$

$$0 \leq \|\nabla u_n\|^2_{L^2} - 2 \|\nabla u\|^2_{L^2} + o(1) + \|\nabla u\|^2_{L^2}$$

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + o(1)$$

$$F(u) \le F(u_n) + o(1)$$

Sappiamo che $F(u_n) \longrightarrow \inf_{W^{1,2}_g} F$

$$F(u) \le \liminf F(u_n)$$

Per il teorema di Weierstrass, $\exists\, u \in W^{1,2}_g$ t.c. $F(u) = \min_{W^{1,2}_g} F$.

Unicità: Siano u_1 e u_2 punti di minimo.

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_2\|_{L^2}^2 = \left\|\nabla\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right)\right\|_{L^2}^2$$

Chiamo $\mu = \inf_{W^{1,2}_g} F$ — Dunque $F(u_1) = \frac{1}{2}\|\nabla u_1\|_2^2 = \mu$ idem per u_2.

Osservo che $\frac{u_1+u_2}{2} \in W^{1,2}_g$ (convesso e $u_1, u_2 \in W^{1,2}_g$)

In particolare $F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\|\nabla\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right\|_{L^2}^2 \ge \mu$.

$$\left\|\nabla\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right)\right\|_{L^2}^2 = \underbrace{F(u_1)}_{\mu} + \underbrace{F(u_2)}_{\mu} - 2\underbrace{F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)}_{\ge \mu} \le 0$$

Osservo anche che

$\frac{u_1-u_2}{2} \in W^{1,2}_0(\Omega)$ perché $u_1 - g$ e $u_2 - g \in W^{1,2}_0$.

Per Poincaré

$$\left\|\frac{u_1-u_2}{2}\right\|_{L^2} \le C\left\|\nabla\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right)\right\|_{L^2} \le 0.$$

$\Longrightarrow \frac{u_1-u_2}{2} = 0$ q.o. $\Longrightarrow u_1 = u_2$ q.o.

Step 2 Il punto di minimo risolve

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega).$$

Si procede esattamente come nella dim del principio di Dirichlet.

Step 3. (regolarità interna)

Si usa il seguente risultato:

Teorema (Caccioppoli 1934, Weyl 1940)

Supponiamo $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega u \, \Delta h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

Allora $\exists\, v \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $v = u$ q.o. in Ω.

Sappiamo che u punto di min di F in $W^{1,2}_g$ verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega).$$

In generale la derivata debole $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ è una funzione in $L^2(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

In particolare se $h \in C_c^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in C_c^\infty(\Omega)$ e quindi

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \, dx = -\sum_{i=1}^N \int_\Omega u \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \, dx$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = - \int_\Omega u \, \Delta h \, dx$$

u verifica $\int_\Omega u \, \Delta h = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$.

$\Longrightarrow \exists \, \tilde{u} \in C^\infty(\Omega)$ t.c. $\tilde{u} = u$ q.o. in Ω.

A questo punto $\forall \, h \in C_c^\infty(\Omega)$

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = \int_\Omega \nabla \tilde{u} \cdot \nabla h \, dx$$

$$\overset{\uparrow}{=} - \int_\Omega \left[\operatorname{div}(\nabla \tilde{u}) \right] h \, dx = - \int_\Omega (\Delta \tilde{u}) \, h \, dx$$

Thm. della divergenza (applicato al campo $\Phi = (\nabla \tilde{u}) \cdot h$)
notare che $h|_{\partial\Omega} = 0 \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \, d\sigma = 0$)

Per l'arbitrarietà di h e usando il lemma di annullamento si conclude che $\Delta \tilde{u} = 0$ in ogni $x \in \Omega$.

Step 4 regolarità al bordo.

Si usano due risultati

Teorema A Ω dominio regolare (di classe C^1) $g \in W^{1/2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $u \in W^{1,2}_g$ è soluzione debole allora $u \in C(\overline{\Omega})$.

(Lemma 4.10 in Colding-Minicozzi A course in Minimal surfaces).

Teorema B Ω dominio regolare (C^1)

Sia $v \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora

$v(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega \iff v \in W^{1,2}_0(\Omega)$,

annullamento al bordo in senso classico ⟺ annullamento al bordo in senso debole.

(Teorema IX, 17 in Brezis, Analisi funzionale)

Applico Thm A a $\tilde{u}$ sol. debole. $\Rightarrow \tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$.

Applico Thm B a $v = \tilde{u} - g \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow \tilde{u}(x) = g(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$.

$\Rightarrow \tilde{u}$ è un'estensione armonica di g in Ω