Metodi variazionali — Lezione 3

Titolo nota 05/03/2020

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (1)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Def 1. Una soluzione classica di (1) è una funzione $u \in C^2(\Omega)$ t.c. $\Delta u(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$.

Def 2. Una soluzione debole di (1) è una funzione $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ (cioè $u \in W^{1,2}(\omega) \ \forall \omega \subset\subset \Omega$)

t.c. $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

($\hat{=}$ funzioni test.)

Dire che $\omega \subset\subset \Omega$ significa che $\overline{\omega}$ è compatto e $\overline{\omega} \subset \Omega$

Def 3 Una soluzione molto debole di (1) è una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ (cioè $u \in L^1(\omega) \ \forall \omega \subset\subset \Omega$)

t.c. $$\int_\Omega u \, \Delta h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$$

Oss. u sol. classica $\Rightarrow$ ($\uparrow$ thm. divergenza) u sol. debole $\Rightarrow$ ($\uparrow$ def. di derivata debole) u sol. molto debole

Teorema (Caccioppoli, 1934 - Weyl, 1940)
Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ è soluz. molto debole di $\Delta u = 0$ in Ω allora $\exists\, v \in C^2(\Omega)$ soluz (classica) di $\Delta v = 0$ in Ω t.c. $v = u$ q.o. in Ω.

Alcuni richiami (strumenti utili per la dimostrazione)

1) caratterizzazione delle funzioni armoniche via proprietà della media

Teorema

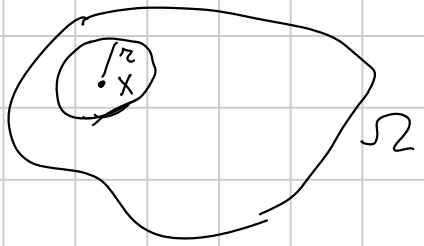
Sia $v : \Omega \to \mathbb{R}$ - Allora

v è armonica in Ω $\iff$ v continua in Ω

(cioè $v \in C^2(\Omega)$, sol. classica di $\Delta v = 0$ in Ω) e $v(x) = \fint_{B_r(x)} v$

$\forall\, B_r(x) \subset\subset \Omega$

La condizione $B_r(x) \subset\subset \Omega$ significa $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$



In generale

$$\fint_E v = \frac{1}{|E|} \int_E v$$

($|E|$: misura di Lebesgue di E)

N.B. La proprietà della media richiede solo la continuità ma implica regolarità C^∞.

N.B. In generale se $v : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x)} v = v(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

(Per la dim cfr. L. Evans, Partial Differential Eq's, Teoremi 2, 3 e 6 della sezione 2.2).

2) Teoria della regolarizzazione via mollificatori

Una famiglia di mollificatori è una famiglia di funzioni $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$ parametro) t.c.

$\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)} = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x| \le \varepsilon \}$

$\varphi_\varepsilon \ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

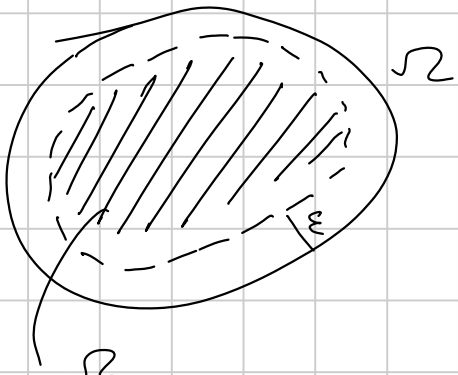
Fissata $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, chiamo ε-regolarizzata di f la funzione $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$ cioè

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{B_\varepsilon(0)} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \quad z = x-y$$

$$= \int_{B_\varepsilon(x)} f(z)\,\varphi_\varepsilon(x-z)\,dz \qquad \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \overline{B_\varepsilon(0)}$$

ben definito se $B_\varepsilon(x) \subset\subset \Omega$ cioè solo se

$$x \in \Omega_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon \}$$



f_ε è ben definita in Ω_ε

Vale che

a) $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$ e anche per le derivate di ordine superiore.

In particolare $\Delta f_\varepsilon = f * \Delta \varphi_\varepsilon$

b) $f_\varepsilon \longrightarrow f$ per $\varepsilon \to 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$

cioè $\forall \omega \subset\subset \Omega \quad f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ in $L^1(\omega)$.

<u>Dimostrazione del teorema</u>

Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ soluz. molto debole di $\Delta u = 0$ in Ω

cioè $\int_\Omega u\,\Delta h\,dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$.

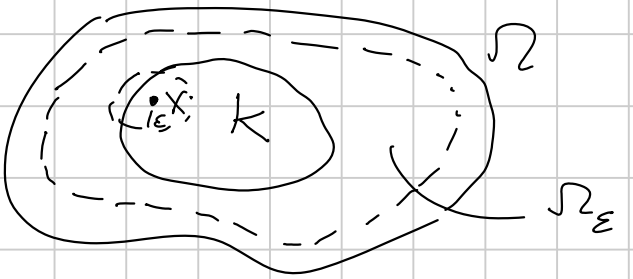
Sia $u_\varepsilon = \varepsilon$-regolarizzata di u, definita in Ω_ε

$u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ — Sappiamo che $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

<u>Step 1</u> : u_ε è armonica in Ω_ε.

Devo verificare che $\Delta u_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon$.

Fisso $h \in C_c^\infty(\Omega)$ e chiamo $K = \operatorname{supp} h$



$K \subset\subset \Omega_\varepsilon$ per $\varepsilon \ll 1$.

$$\int_\Omega \Delta u_\varepsilon(x)\, h(x)\, dx = \int_K \Delta u_\varepsilon(x)\, h(x)\, dx =$$

$$= \int_K h(x)\, (u * \Delta\varphi_\varepsilon)(x)\, dx =$$

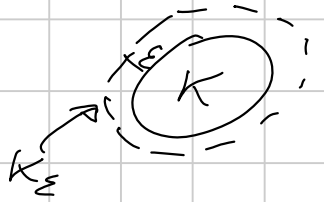
$$= \int_K h(x) \left(\int_{B_\varepsilon(0)} u(x-y)\, \Delta\varphi_\varepsilon(y)\, dy \right) dx$$

$$\overset{x-y=z}{=} \int_K h(x) \left(\int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\, \Delta\varphi_\varepsilon(x-z)\, dz \right) dx =$$

$$= \int_K h(x) \left(\int_{K_\varepsilon} u(z)\, \Delta\varphi_\varepsilon(x-z)\, dz \right) dx$$

$K_\varepsilon = \{ y \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(y, K) < \varepsilon \}$

perché $\Delta\varphi_\varepsilon = 0$ fuori da $B_\varepsilon(x)$



$$= \int_{K_\varepsilon} u(z) \left(\int_K h(x)\, \Delta\varphi_\varepsilon(x-z)\, dx \right) dz$$

$\overset{\text{teorema di Fubini}}{=}$

$$= \int_{K_\varepsilon} u(z)\, (h * \Delta\varphi_\varepsilon)(z)\, dz = \int_{K_\varepsilon} u(z)\, (\Delta h_\varepsilon)(z)\, dz$$

$$= \int_\Omega u\, \Delta h_\varepsilon = 0$$

perché $h_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$

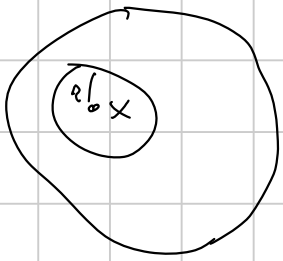
$\operatorname{supp} h_\varepsilon = \overline{K_\varepsilon} \subset\subset \Omega$

perché u è soluz. molto debole.

Ho trovato che $\int_\Omega (\Delta u_\varepsilon)\, h = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega)$

$\Longrightarrow$ (lemma di annullamento) $\Delta u_\varepsilon = 0$ q.o. in Ω_ε $\Longrightarrow$ (Δu_ε è continua in Ω_ε) $\Delta u_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon$

Step 2 Dimostro che $\forall x \in \Omega \ \exists \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) =: v(x)$ e $v(x) = u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.



So che u_ε è armonica in Ω_ε.

Fisso $x \in \Omega$ e $B_r(x) \subset\subset \Omega$

Per $\varepsilon > 0$ suff. piccolo $B_r(x) \subset\subset \Omega_\varepsilon$

u_ε verifica la proprietà della media:

$$u_\varepsilon(x) = \fint_{B_r(x)} u_\varepsilon$$

Inoltre $u_\varepsilon \longrightarrow u$ per $\varepsilon \to 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$

In particolare $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(B_r(x))$.

$$\fint_{B_r(x)} u_\varepsilon = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u = \fint_{B_r(x)} u$$

Chiamo $v(x) = \fint_{B_r(x)} u$

Ho provato che $\exists \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) = v(x) \quad \forall x \in \Omega$

So che $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in $L^1(\omega) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega$

$\exists\, \varepsilon_j \to 0$ t.c. $u_{\varepsilon_j}(x) \xrightarrow[j \to \infty]{} u(x)$ per q.o. $x \in \omega$.

$u(x) = \lim_{j \to \infty} u_{\varepsilon_j}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) = v(x)$ per q.o. $x \in \omega$ ($\uparrow$ per q.o. $x \in \omega$)

$\forall \omega \subset\subset \Omega$

$\Longrightarrow u(x) = v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

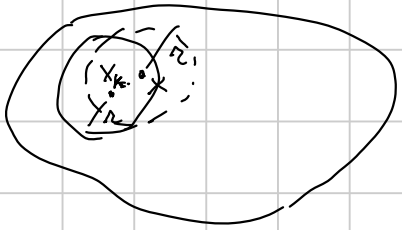
Step 3 v verifica la proprietà della media ed è continua in Ω.

Proprietà della media

$$v(x) = \fint_{B_r(x)} u = \fint_{B_r(x)} v \qquad \forall B_r(x) \subset\subset \Omega$$

($u = v$ q.o.)

Continuità: verifico che $\forall x \in \Omega$ se $x_k \to x$ con $x_k \in \Omega$ allora $v(x_k) \to v(x)$ per $k \to \infty$.



Prendo $r > 0$ t.c. $B_r(x) \subset\subset \Omega$

Per $k \gg 1$ anche $B_r(x_k) \subset\subset \Omega$

$$v(x_k) = \fint_{B_r(x_k)} u = \frac{1}{|B_r(x_k)|} \int_\Omega u \underbrace{\chi_{B_r(x_k)}}_{f_k} =$$

$$= \frac{1}{|B_r(x)|} \int_\Omega f_k \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_\Omega f \; ?$$



$|f_k(y)| \le |u(y)| \chi_K(y) \in L^1(\Omega)$

dove $K \subset\subset \Omega$ è indipendente da k

Inoltre per q.o. $y \in \Omega$.

$$f_k(y) = u(y) \chi_{B_r(x_k)}(y) \xrightarrow[k \to \infty]{} u(y) \chi_{B_r(x)}(y) = f$$

Per convergenza dominata $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega u \chi_{B_r(x)}$

$$v(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u = \fint_{B_r(x)} u = v(x)$$

Step 4 conclusione.

Ho trovato $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$v = u$ q.o. in Ω

v continua in Ω

v verifica la proprietà della media $\Big\} \Longrightarrow v$ armonica in Ω.

□

Il metodo diretto del Calcolo delle variazioni

Studiamo problemi di minimizzazione su funzionali integrali:

$$F(u) = \int_\Omega L\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) dx$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato. $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione assegnata

$L = L(x, u, \xi)$ $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$

Lagrangiana

$$\inf \left\{ F(u) : u \in W^{1,p}_g(\Omega) \right\}$$

dove $W^{1,p}_g = g + W^{1,p}_0(\Omega)$ essendo

$g \in W^{1,p}(\Omega)$ assegnata. $1 \le p < \infty$

Problema modello: problema dell'estensione armonica

$p = 2$, $L(x, u, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2$

$$F(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 dx$$

Obiettivo: trovare condizioni "ragionevoli" (cioè che includono situazioni di interesse) su L affinché il problema di minimo

$\inf \{ F(u) : u \in W^{1,p}_g \}$ ammetta esistenza (e possibilmente unicità) di soluzione $\forall g \in W^{1,p}(\Omega)$

Premessa - Stiamo trattando funzionali integrali della forma $\int_\Omega f(x, v(x))\, dx$

Questione a monte: se v è misurabile lo è anche la funzione $w(x) = f(x, v(x))$?

Se $f = f(v)$ e f è continua allora $w(x) = f(v(x)) = (f \circ v)(x)$ è misurabile perché composizione di v misurabile con f continua.

In generale $f : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

(poi applicheremo questa teoria a $f(x, v(x)) = L\left(x, \underbrace{u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x)}_{v(x)}\right)$)

Si introducono le condizioni di Carathéodory:

$$(C) \begin{cases} f(x, \cdot) \text{ continua per q.o. } x \in \Omega \\ f(\cdot, s) \text{ misurabile in } \Omega \ \forall s \in \mathbb{R}^k. \end{cases}$$

Lemma Data $f : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica (C) si ha che $\forall v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ misurabile anche $w(x) = f(x, v(x))$ è una funzione misurabile.

In altre parole, posto

$\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k) = \{ \text{funzioni misurabili da } \Omega \text{ in } \mathbb{R}^k \}$

$\mathcal{F} : v \longmapsto w(x) = f(x, v(x))$

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}).$$

dimostrazione

1ª parte: supponiamo v funzione semplice cioè v misurabile con range finito.

range $v = \{a_1, \dots, a_m\}$ con $a_i \in \mathbb{R}^k$

e $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$.

Chiamo $A_i = v^{-1}(a_i)$ – Ogni A_i è misurabile

$A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$.

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)$$ (rappresentaz. canonica di v).

Si ha che $\forall x \in \Omega$

$$w(x) = f(x, v(x)) = f\left(x, \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x, a_i) \chi_{A_i}(x)$$

perché ogni $x \in \Omega$ fissato sta in uno e uno solo degli insiemi A_i $\quad f\left(x, \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)\right) = f(x, a_{i_x})$

$$\sum_{i=1}^{m} f(x, a_i) \chi_{A_i}(x) = f(x, a_{i_x}).$$

$\forall i$

$x \longmapsto f(x, a_i)$ è misurabile (da (c))

χ_{A_i} è misurabile perché lo è l'insieme A_i.

$$w(x) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{f(x, a_i)}_{\text{misur.}} \underbrace{\chi_{A_i}(x)}_{\text{mis.}}$$ misurabile.

misurabile

2ª parte caso generale. Prendo v misurabile.

$\exists (v_j)_j$ successione di funzioni semplici t.c.
$v_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

Chiamo $w_j(x) = f(x, v_j(x))$

Per quanto già provato ogni w_j è misurabile.

Per q.o. $x \in \Omega$ $\quad f(x, v_j(x)) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(x, v(x))$
(perché f è continua rispetto alla 2ª variabile
ho usato ancora (C)).

Per q.o. $x \in \Omega$ $\quad w_j(x) \longrightarrow w(x) =: f(x, v(x))$.
$\Longrightarrow$ w è una funzione misurabile perché
limite puntuale q.o. di funzioni misurabili.

□