Metodi variazionali — Lezione 4

Titolo nota 06/03/2020

Funzionali integrali (buona definizione e continuità negli spazi L^p)

$$F(v) = \int_\Omega f(x, v(x))\, dx$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio

$f : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente:

(C) $\begin{cases} f(x, \cdot) \text{ continua su } \mathbb{R}^k \text{ per q.o. } x \in \Omega \\ f(\cdot, s) \text{ misurabile da } \Omega \text{ in } \mathbb{R} \ \forall s \in \mathbb{R}^k \end{cases}$

Lemma 1
Se $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è una funzione misurabile allora $w(x) = f(x, v(x))$ è ancora misurabile.

Se prendiamo $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k) \left(= (L^p(\Omega))^k\right)$ quali condizioni servono su f affinché F sia ben definito in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$? ($\Longleftrightarrow w \in L^1(\Omega)$) sia continuo in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$?

Assumiamo $f : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ verifichi (C) e

$\exists\, p \geq 1,\ a, b \geq 0$ t.c.

$|f(x,s)| \leq a + b|s|^p$ per q.o. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}^k$

Lemma 2 Supponiamo Ω limitato e f soddisfacente (C) e la condizione di crescita. Allora $v \longmapsto F(v) \in \mathbb{R}$ è ben definito $\forall v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ ed è continuo in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

dimostrazione Fisso $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ chiamo $w(x) = f(x, v(x))$ $(x \in \Omega)$. Per il lemma 1 w è misurabile. Inoltre

$$|w(x)| = |f(x, v(x))| \leq \underbrace{a + b|v(x)|^p}_{\in L^1(\Omega)}$$

Infatti $\int_\Omega (a + b|v|^p) = a|\Omega| + b\int_\Omega |v|^p < \infty$

($|\Omega| < \infty$ perché Ω limitato; $\int_\Omega |v|^p < \infty$ perché $v \in L^p$)

$\Rightarrow w \in L^1(\Omega) \Rightarrow F(v) \in \mathbb{R}$.

Continuità di F. Presa una successione $(v_j) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ t.c. $v_j \longrightarrow v$ in L^p voglio provare che $F(v_j) \longrightarrow F(v)$.

Osservo che anche $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ $\left(F(v_j), F(v) \in \mathbb{R}\right)$

$$F(v_j) \to F(v) \iff \int_\Omega \underbrace{f(x, v_j(x))}_{w_j(x)}\, dx \longrightarrow \int_\Omega \underbrace{f(x, v(x))}_{w(x)}\, dx$$

Si vorrebbe aver convergenza puntuale

$w_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} w(x)$ per q.o. x

Ciò non segue direttamente dalla convergenza di v_j a v che è solo in L^p

Prendo una qualunque sottosuccessione (v_{j_i}) di (v_j). Anche $v_{j_i} \longrightarrow v$ per $i \to \infty$ in L^p.

Per il teorema "inverso della convergenza dominata"

$\exists\, (v_{j_{i_\ell}})_\ell \subset (v_{j_i})_i$ $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ t.c.

$v_{j_{i_\ell}}(x) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e $|v_{j_{i_\ell}}(x)|^p \leq g(x)$ $\forall \ell$ per q.o. $x \in \Omega$

$$w_{j_{i_\ell}}(x) = f\left(x, v_{j_{i_\ell}}(x)\right) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \underbrace{f(x, v(x))}_{w(x)} \quad \text{per (C)}$$

Inoltre $|w_{j_{i_\ell}}(x)| = |f\, x, v_{j_{i_\ell}}(x)| \le a + b\,|v_{j_{i_\ell}}(x)|^p$

$$\le \underbrace{a + b\, g(x)}_{\text{maggiorante integrabile indipendente da } \ell} \in L^1(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega w_{j_{i_\ell}}(x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega w(x)\,dx$$

convergenze dominate

cioè $F(v_{j_{i_\ell}}) \longrightarrow F(v)$. Ho così dimostrato che

Ogni sottosuccessione di $F(v_j)$ ammette un'estratta che converge a $F(v)$. (limite indipendente dalla sottosuccessione).
Allora per un fatto generale concludo che
$F(v_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} F(v)$.

Problema generale del calcolo delle Variazioni per funzionali integrali in $W^{1,p}(\Omega)$.

Sono dati un dominio limitato Ω in $\mathbb{R}^N$
una funzione (detta Lagrangiana)
$L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad L = L(x, u, \xi)$
soddisfacente

(C) condizioni di Carathéodory

$L(x, \cdot, \cdot)$ continua in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ per q.o. $x \in \Omega$
$L(\cdot, u, \xi)$ misurabile da Ω in $\mathbb{R}$ $\forall (u, \xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$

(*) Condizione di crescita:

$\exists\, p \in [1, \infty)$, $\exists\, a, b > 0$ t.c.

$$a\left(|\xi|^p - 1\right) \le L(x,u,\xi) \le b\left(1 + |u|^p + |\xi|^p\right)$$

per q.o. $x \in \Omega$, $\forall (u,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

Da (*) segue che $\exists\, c_1, c_2 > 0$ t.c.

(**) $|L(x,u,\xi)| \le c_1 + c_2|u|^p + c_2|\xi|^p$ per q.o. $x \in \Omega$, $\forall (u,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

Infatti nei punti in cui $L \ge 0$ ho che

$|L(x,u,\xi)| = L(x,u,\xi) \le b + b|u|^p + b|\xi|^p$.

Nei punti in cui $L \le 0$ si ha

$|L(x,u,\xi)| = -L(x,u,\xi) \le -a|\xi|^p + a \le a$

Quindi per q.o. $x \in \Omega$ $\forall (x,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$|L(x,u,\xi)| \le \underbrace{\max\{a,b\}}_{c_1} + \underbrace{b}_{c_2}|u|^p + b|\xi|^p$

Valendo (**) il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

risulta ben definito e continuo in $W^{1,p}(\Omega)$.

Ricordo che $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ (derivata debole) $\forall i = 1,\dots,N\}$

$W^{1,p}(\Omega)$ è spazio di Banach con norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\|\nabla u\|_p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}, \quad |\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^2}$$

Ricordiamo alcune proprietà utili:

① $W^{1,p}(\Omega)$ riflessivo $\iff 1 < p < \infty$

(2) Posto $W_0^{1,p}(\Omega)$ = chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ si ha che $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso

(3) Se Ω è limitato vale la disug. di Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega)$ cioè: $\exists\, C_\Omega > 0$ t.c.

$$\|u\|_{L^p} \le C_\Omega \|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(4) Supponiamo Ω limitato

Fissato $g \in W^{1,p}(\Omega)$ lo spazio $W_g^{1,p} = g + W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio affine di $W^{1,p}(\Omega)$

Inoltre in $W_g^{1,p}$ vale la disug. di Poincaré:

$\exists\, C_1, C_2 > 0$ (dipendono anche da g) t.c.

$$\|u\|_{L^p} \le C_1 + C_2 \|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W_g^{1,p}.$$

(dimostrazione identica a quella vista per $p=2$).

Discuto la buona definizione e la continuità di

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), Du(x))\, dx$$

in $W^{1,p}(\Omega)$.

Fisso $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Chiamo

$$v(x) = \left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right)$$

$v : \Omega \to \mathbb{R}^{N+1}$. $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$. perché $u \in W^{1,p}$.

Chiamo $G(x, v) = L(x, v_1, \underbrace{v_2, \dots, v_{N+1}}_{\tilde v})$

So che (da (**))

$$|G(x,v)| \le C_1 + C_2 |v_1|^p + C_2 |\tilde v|^p \le C_1 + \tilde C_2 |v|^p$$

per q.o. $x \in \Omega$ e $\forall v \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Inoltre G verifica (C) perché L verifica (C).

Dal lemma 2 F è ben definita

$x \longmapsto G(x, v(x))$ è integrabile in Ω

$\| \quad L(x, u(x), Du(x))$

$\Rightarrow F(u) \in \mathbb{R}$.

Continuità di F. Prendo una successione $(u_j) \subset W^{1,p}(\Omega)$ t.c. $u_j \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ cioè $u_j \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $Du_j \to Du$ in $(L^p(\Omega))^N$

Chiamo $v_j = \left(u_j, \frac{\partial u_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_j}{\partial x_N}\right)$ e $v = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$

si ha che $v_j \to v$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$.

Posso applicare il lemma 2 e dedurre che

$$\int_\Omega G(x, v_j(x))\,dx \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega G(x, v(x))\,dx$$

cioè $F(u_j) \to F(u)$ per $j \to \infty$.

Il problema da discutere è studiare il problema dell'esistenza ed eventuale unicità del punto di minimo per

$$\inf \{ F(u) : u \in W^{1,p}_g \}$$

con $g \in W^{1,p}(\Omega)$ fissato.

<u>Strumento utile</u> : Teorema di Weierstrass generalizzato

X spazio di Banach <u>riflessivo</u>

$C \subset X$ chiuso convesso e non vuoto

$F : C \to \mathbb{R}$

F continuo in C

F convesso

F coercivo ($\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in C}} F(u) = \infty$)

Allora $\exists\, u_0 \in C$ t.c. $F(u_0) = \min_{u \in C} F(u)$.

Vogliamo applicarlo prendendo
$X = W^{1,p}(\Omega)$
Per avere riflessività devo chiedere $p > 1$.
Fissata $g \in W^{1,p}(\Omega)$ prendo

$C = W^{1,p}_g$ sottospazio affine chiuso
(chiuso e convesso).

(La funzione g definisce la condizione al bordo).

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

So che F è continuo.

Supponiamo che L sia convessa rispetto a (u, ξ):
cioè per q.o. $x \in \Omega$, $\forall (u_1, \xi_1), (u_2, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ $\forall \lambda \in (0,1)$

$$L(x, \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2, \lambda \xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \le$$
$$\lambda L(x, u_1, \xi_1) + (1-\lambda) L(x, u_2, \xi_2)$$

(L è strettamente convessa rispetto a (u, ξ) se vale $<$ quando $(u_1, \xi_1) \neq (u_2, \xi_2)$.)

Se L è convessa in (u, ξ) allora F è convesso:
infatti, presi $u_1, u_2 \in W^{1,p}_g$ e $\lambda \in (0,1)$

$$F(\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2) = \int_\Omega L(x, \lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_2(x), \lambda \nabla u_1(x) + (1-\lambda) \nabla u_2(x))\, dx$$

$$\le \int_\Omega [\lambda L(x, u_1, \nabla u_1) + (1-\lambda) L(x, u_2, \nabla u_2)]\, dx =$$

$= \lambda F(u_1) + (1-\lambda) F(u_2)$.

Verifico ora che F è coercivo in $W_g^{1,p}$.

Se $\|u\|_{W^{1,p}} \to \infty$, con $u \in W_g^{1,p}$ allora $F(u) \to \infty$?

Uso la disuguaglianza di Poincaré in $W_g^{1,p}$. Ho che

$$\|u\|_{L^p} \le C_1 + C_2 \|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W_g^{1,p}$$

Quindi $\|u\|_{W^{1,p}} \le C_1 + (C_2+1)\|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W_g^{1,p}$.

Dunque se $\|u\|_{W^{1,p}} \to \infty$, $u \in W_g^{1,p}$ allora

$\|Du\|_{L^p} \to \infty$.

Ricordo che $L(x,u,\xi) \ge a|\xi|^p - a$ per q.o. $x \in \Omega$
$\forall (u,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), Du(x))\,dx$$

$$\ge \int_\Omega \left(a|Du(x)|^p - a\right) dx = a\|Du\|_{L^p}^p - a|\Omega|$$

$\to \infty$

Dato che $\|Du\|_{L^p} \to \infty$, essendo $\underline{\underline{a > 0}}$ (Ω limitato).

segue che $F(u) \to \infty$ cioè F coercivo.

Riassunto di quanto finora trovato:

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funzione lagrangiana soddisfacente:

- condizioni di caratheodory
- condizioni di crescita
- convessità rispetto a (u, ξ)

Allora se $p>1$, $\forall g \in W^{1,p}(\Omega)$ $\exists u \in W^{1,p}_g$ t.c. $F(u) = \inf_{W^{1,p}_g} F$

dove $F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), Du(x))\,dx$ funzionale d'azione associato a L.

Oss 1. Se $p=2$ e $L(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$

troviamo $\inf_{W^{1,p}_g} F = \inf_{W^{1,2}_g} \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2 dx}$

integrale di Dirichlet

Sono soddisfatte tutte le ipotesi:

$L(x,u,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$

Condizioni di crescita soddisfatte $a = b = \frac{1}{2}$ $(p=2)$

convessità ok.

Oss 2. Il teorema di esistenza del min. vale anche per funzioni vettoriali cioè in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$

$L : \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{nk} \longrightarrow \mathbb{R}$

Ciò è interessante in particolare quando $\Omega = I$ intervallo limitato in $\mathbb{R}$.

$u \in W^{1,p}(I, \mathbb{R}^k)$

$L : I \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$F(u) = \int_I L(t, u(t), u'(t))\,dt$

Unicità del punto di minimo.

In generale supponiamo:

X spazio di Banach

$C \subset X$ convesso chiuso

$F : C \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa

Se F è strettamente convessa e se esiste il minimo di F in C allora esso è unico.

Dim. Siano $u_1, u_2 \in C$ $\overset{u_1 \neq u_2}{\text{t.c.}}$ $F(u_1) = F(u_2) = \inf_C F$

Chiamo $m = \inf_C F$. Definisco $\bar{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}$.

$\bar{u} \in C$ (perché C è convesso)

$$m \leq F(\bar{u}) = F\left(\tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2\right) \underset{\text{stretta convessità di } F}{<} \tfrac{1}{2}F(u_1) + \tfrac{1}{2}F(u_2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}m = m$$

$$\Longrightarrow m < m \quad \lightning$$

Unicità del minimo per funzionali integrali.

Se L è strettamente convessa in (u, ξ) allora anche F lo è in $W^{1,p}$ e quindi il punto di minimo è unico.

Nel caso $L(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$, L è strettamente convessa in (u, ξ) e quindi unicità.