# Metodi Variazionali - Lezione 5

Titolo nota 09/03/2020

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente:

1) condizioni di Carathéodory
   $L(\cdot, u, \xi)$ misurabile $\forall (u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$
   $L(x, \cdot, \cdot)$ continua in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ per q.o. $x \in \Omega$

2) condizioni di crescita: $\exists\, p > 1$, $a, b > 0$ t.c.
   $$a(|\xi|^p - 1) \le L(x,u,\xi) \le b(|u|^p + |\xi|^p + 1)$$
   per q.o. $x \in \Omega$, $\forall (u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$

3) $L(x, \cdot, \cdot)$ convessa rispetto alla coppia $(u,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ per q.o. $x \in \Omega$

Allora, posto $F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ con $u \in W^{1,p}(\Omega)$, si ha che $\forall g \in W^{1,p}(\Omega)$

$\inf_{W^{1,p}_g} F$ ammette minimo, essendo $W^{1,p}_g = g + W^{1,p}_0(\Omega)$.

Osservazioni Le ipotesi fatte sono in generale solo sufficienti per l'esistenza del minimo.

Si possono esibire esempi in cui venendo a mancare anche una sola delle ipotesi fatte non si ha esistenza del minimo.

Esaminiamo alcuni di questi casi.

I seguenti esempi sono dati in dim $N = 1$.

$\Omega = I$ = intervallo aperto e limitato di $\mathbb{R}$

È utile fare qualche richiamo sugli spazi $W^{1,p}(I)$

$I = (a,b)$. In generale, fissato $1 \le p < \infty$

$u \in W^{1,p}(I) \Longrightarrow u$ assolutamente continua in $[a,b]$

$u : [a,b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continua $\iff$
$u : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
$\exists\, u'(t)$ per q.o. $t \in [a,b]$
$u(t) = u(a) + \int_a^t u'(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b]$
$u' \in L^1(I)$.

N.B. In generale non è detto che se $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile q.o. allora $u(t) = u(a) + \int_a^t u'$.
(Ad es. funzione di Cantor scala del diavolo)



Fissata $g \in W^{1,p}(I)$ $I = (a,b)$, $g$ è continua (si può estendere con continuità) in $[a,b]$
$g(a)$ e $g(b)$ sono ben definite.

In dim 1 $u \in W^{1,p}_g \iff \begin{cases} u \in W^{1,p}(I) \\ u(a) = g(a), \\ u(b) = g(b) \end{cases}$ (*)

La condizione al bordo in senso debole $u|_{\partial I} = g|_{\partial I}$ è equivalente alla condizione puntuale (*).

Es 1 $I = (0,1)$, $L(u,\xi) = \sqrt{u^2+\xi^2}$

$L$ è indipendente da $t$ $\quad t \in I$
$L$ è continua su $\mathbb{R}^2$
$L$ è convessa (è la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$)
$|\xi| \le L(u,\xi) \le 2(|u| + |\xi|) \quad \forall (u,\xi) \in \mathbb{R}^2$
verifica la condizione di crescita con $a=1$, $b=2$ e $p=1$.

$$F(u) = \int_0^1 L(u, u')\,dt = \int_0^1 \sqrt{u^2 + (u')^2}\,dt$$

ben definito e continuo in $W^{1,1}(I)$.

$$C = \{ u \in W^{1,1}(I) : u(0) = 0,\ u(1) = 1 \}$$

$$= W^{1,1}_g \quad \text{con } g \text{ fissata funzione (suff. regolare)}$$

t.c. $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$

Ad es. $g(t) = t$.

$\inf_C F$ non ammette minimo.

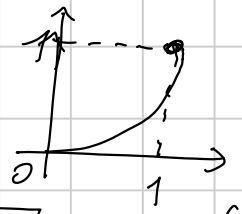
In particolare provo che $\inf_C F = 1$.

$\forall u \in C$ si ha che

$$F(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2 + (u')^2}\,dt \geq \int_0^1 |u'|\,dt \geq \left| \int_0^1 u'\,dt \right|$$

$$= |u(1) - u(0)| = 1. \implies \inf_C F \geq 1.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(t) = t^n$




$$F(u_n) = \int_0^1 \sqrt{t^{2n} + (n t^{n-1})^2}\,dt = \int_0^1 t^{n-1} \sqrt{t^2 + n^2}\,dt$$

$$\leq \sqrt{1+n^2} \int_0^1 t^{n-1}\,dt = \sqrt{1+n^2}\ \frac{t^n}{n}\Big|_0^1 =$$

$\sqrt{t^2+n^2} \leq \sqrt{1+n^2}$

$$= \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

$\inf_C F \leq F(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\implies \inf_C F \leq 1$.

Dunque $\inf_C F = 1$.

Se per assurdo $\exists\, u \in C$ t.c. $F(u) = 1$ allora

$$1 = \int_0^1 \sqrt{u^2+(u')^2}\,dt \geq \int_0^1 |u'| \geq \left| \int_0^1 u' \right| = 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \left[ \sqrt{u^2+(u')^2} - |u'| \right] dt = 1-1 = 0$$

$$\Rightarrow [\dots] = 0 \quad \text{q.o.} \quad \Rightarrow u^2 = 0 \quad \text{q.o.}$$

$\Rightarrow u \equiv 0$ perché $u$ è continua

ma $u(1) \neq u(0)$.

In questo esempio la condizione di crescita vale solo per $p = 1$. (nel teorema si chiede $p > 1$).

Esempio 2 (Weierstrass)

$I = (0,1)$ $\quad L(t,u,\xi) = t^2 \xi^2$

$L$ è continua

$L$ è convessa rispetto a $\xi$ $\forall t$ fissato

$a\xi^2 \leq L(t,u,\xi) \leq b\xi^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

con $a = 0$ e $b = 1$

$p = 2$

$$F(u) = \int_0^1 t^2 u'(t)^2\,dt \qquad u \in W^{1,2}(I)$$

$$C = \{ u \in W^{1,2}(I) : u(0) = 1,\ u(1) = 0 \}$$

$$= W^{1,2}_g \quad \text{dove } g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ fissata t.c. } g(0) = 1 \text{ e } g(1) = 0$$

(ad. es. $g(t) = 1-t$).

Rispetto al teorema generale manca la condizione $a > 0$.

Si ha che $\inf_C F = 0$ e non è assunto.

$F(u) \geq 0 \quad \forall u \in C$ (perché $L \geq 0$).

$\inf_C F \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ considero $u_n(t)$




$$\inf_C F \leq F(u_n) = \int_0^1 t^2 u_n'(t)^2 \, dt$$

$$= \int_0^{1/n} t^2 n^2 \, dt = \frac{n^2}{3n^3} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

$$\Longrightarrow \inf_C F \leq 0 \Longrightarrow \inf_C F = 0 .$$

Se per assurdo $\exists u \in C$ t.c. $F(u) = 0$ allora

$$\int_0^1 t^2 u'(t)^2 dt = 0 \Longrightarrow t^2 u'(t)^2 = 0 \text{ per q.o. } t \in I$$

$$\Longrightarrow u'(t) = 0 \text{ per q.o. } t \in I \Longrightarrow u(t) = u(1) + \int_0^t u' \quad \forall t$$

in particolare $u(0) = u(1) + \int_0^1 0 = u(1)$

Assurdo perché se $u \in C$, $u(0) \neq u(1)$.

Esempio 3 (Bolza) sul ruolo della convessità

$I = (0,1)$ $\quad L(t,u,\xi) = (|\xi| - 1)^2 + u^2$

$L$ continua in $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$L$ è convessa rispetto a $u$ ma non rispetto a $\xi$




$\exists a, b > 0$ t.c. $a(|\xi|^2 - 1) \leq L \leq b(|u|^2 + |\xi|^2 + 1)$

$\forall u, \xi \in \mathbb{R}^2$.

$W^{1,2}(I)$ $\quad (p = 2)$.

Qui, rispetto al teorema generale, manca la

convessità rispetto alla coppia $(u, \xi) \in \mathbb{R}^2$.

$$C = W^{1,2}_0(I) = \{ u \in W^{1,2}(I) \ : \ u(0) = u(1) = 0 \}.$$

Si ha che $\inf_C F = 0$ e non è assunto

$L \geq 0 \Longrightarrow F(u) \geq 0 \ \ \forall u \in C \Rightarrow \inf_C F \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ considero $u_n(t)$




$|u_n'(t)| = 1$ per q.o. $t \in I$

$0 \leq u_n(t) \leq \frac{1}{2n} \quad \forall t \in I$.

$$\inf_C F \leq F(u_n) = \int_0^1 L(t, u_n(t), u_n'(t))\,dt =$$

$$= \int_0^1 \Big[ \underbrace{\big(|u_n'(t)| - 1\big)^2}_{\to 0 \text{ q.o.}} + u_n(t)^2 \Big]\,dt \leq \int_0^1 u_n^2\,dt$$

$$\leq \frac{1}{4n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \inf_C F \leq 0$

Dunque $\inf_C F = 0$.

Se per assurdo $\exists\, u \in C = W^{1,2}_0(I)$ t.c. $F(u) = 0$

$$0 = \int_0^1 \Big[ \big(|u'| - 1\big)^2 + u^2 \Big]\,dt \iff [\ldots] = 0 \text{ q.o.}$$

$$\iff \begin{cases} |u'| - 1 = 0 & \text{q.o.} \\ u = 0 & \text{q.o.} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(t) = 0 & \forall t \in I \\ |u'| = 1 & \text{q.o.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ contraddizione (perché $u \equiv 0 \Rightarrow u' \equiv 0$).

# Le equazioni di Eulero – Lagrange.

Dati un dominio $\Omega$ in $\mathbb{R}^N$ (limitato) e una funzione Lagrangiana $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione di crescita: $\exists\, p > 1,\ a, b \geq 0$

$$|L(x, u, \xi)| \leq a + b(|u|^p + |\xi|^p) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega,\ \forall (u, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

Il funzionale d'azione

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

risulta pertanto ben definito e continuo in $W^{1,p}(\Omega)$.

Fissata $g \in W^{1,p}(\Omega)$ sia $W^{1,p}_g = g + W^{1,p}_0(\Omega)$ e supponiamo che $\exists\, u \in W^{1,p}_g$ t.c. $F(u) = \min_{W^{1,p}_g} F$.

Esempio $L(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ $\quad F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$

$u \in W^{1,2}(\Omega)$. Si è visto che $\forall g \in W^{1,2}(\Omega)$ $\exists$ (unica) $u \in W^{1,2}_g$ t.c. $F(u) = \inf_{W^{1,2}_g} F$.

In particolare $u$ verifica $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h\, dx = 0$ $\forall h \in C^\infty_c(\Omega)$

Inoltre, se si sa che $u$ è abbastanza regolare allora $u$ è soluz. classica di $\Delta u = 0$ in $\Omega$.

In generale per il funzionale d'azione

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

Se $u \in W^{1,p}_g$ è punto di minimo

u verifica una qualche equazione integrale?
Com'è fatta tale equazione?

In particolare quali sono la versione debole e la versione forte?

Servono ipotesi più forti su L rispetto alla condizione di crescita.

**Def.** Fissata $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $h \in C_c^\infty(\Omega)$ (più in generale $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$) $F$ ammette derivata direzionale in $u$ lungo la direzione $h$ se $\exists \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$

In tal caso si denota $\frac{\partial F}{\partial h}(u)$.

**I parte** Ipotesi su L affinché $\exists$ derivate direzionali.

**II parte** Se $u \in W_g^{1,p}$ è punto di minimo e $\exists \frac{\partial F}{\partial h}(u)$ $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$ allora $\frac{\partial F}{\partial h}(u) = 0$ $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$

**III parte** deduzione delle eq. di Eulero-Lagrange in forma debole e in forma forte.

**I parte** Consideriamo dapprima funzionali

$$F(v) = \int_\Omega f(x, v(x))\, dx$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato, $f: \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ di Carathéodory e t.c. $|f(x,s)| \le a + b|s|^p$ per q.o. $x$ $\forall s \in \mathbb{R}^k$

$(a, b \geq 0, \quad p \geq 1)$. Inoltre $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Supponiamo che $F : L^p(\Omega, \mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathbb{R}$ ben definito e continuo.

Vogliamo calcolare, fissato $h \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(v+\varepsilon h) - F(v)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} \left[ f(x, v(x) + \varepsilon h(x)) - f(x, v(x)) \right] dx$$

$$\overset{?}{=} \int_\Omega \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[\dots]}{\varepsilon} dx = \int_\Omega \underbrace{\nabla_v f(x, v(x)) \cdot h(x)}_{\text{se esiste}} dx$$

Le ipotesi "buone" su $f$ sono:

$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1$

$\exists\, a_1, b_1 \geq 0$ t.c. $|\nabla_v f(x, v)| \leq a_1 + b_1 |v|^{p-1}$

$\forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^k$

N.B. Sotto tale condizione $f$ è automaticamente di Carathéodory e verifica la condizione di crescita:

$$|f(x,v)| \leq |f(x,0)| + \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} [f(x, sv)] ds \right|$$

$$\leq \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x,0)| + \int_0^1 |\nabla_v f(x, sv) \cdot v| \, ds$$

$$\leq c_0 + \int_0^1 |\nabla_v f(x, sv)| \, |v| \, ds$$

$$\leq c_0 + \int_0^1 \left( a_1 + b_1 |sv|^{p-1} \right) |v| \, ds$$

passaggio da correggere (vedi alla fine)

$$\leq c_0 + a_1 + b_1 |v|^p \int_0^1 |s|^{p-1} ds$$

$$\leq \bar{a} + \bar{b} |v|^p \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^k$$

**Lemma** Se $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k)$ verifica la condizione

$$|\nabla_v f(x,v)| \le a_1 + b_1 |v|^{p-1} \quad \forall (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^k$$

allora $F(v) = \int_\Omega f(x, v(x))\,dx$ è ben definito e continuo in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e fissati $v, h \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$

$$\exists \frac{\partial F}{\partial h}(v) = \int_\Omega \underbrace{\nabla_v f(x, v(x)) \cdot h(x)}_{\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial v_i}(x, v(x)) h_i(x)}\,dx$$

**Dimostrazione**

Fisso $v, h \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e chiamo $w(x) = \nabla_v f(x, v(x)) \cdot h(x)$.

Verifico che $w \in L^1(\Omega)$. Infatti

$$|w(x)| \le |\nabla_v f(x, v(x))|\,|h(x)| \le a_1 |h(x)| + b_1 |v(x)|^{p-1} |h(x)|.$$

Siccome $|\Omega| < \infty$ ho che $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$

In particolare $a, h \in L^1(\Omega)$.

$$\int_\Omega |v|^{p-1} |h| \le \left( \int_\Omega |h|^p \right)^{1/p} \left( \int_\Omega (|v|^{p-1})^{p'} \right)^{1/p'}$$

$p'$ = esponente coniugato a $p = \frac{p}{p-1}$.

$$\Longrightarrow p'(p-1) = p \Longrightarrow \int_\Omega (|v|^{p-1})^{p'} = \int_\Omega |v|^p < \infty$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega |v|^{p-1} |h| < \infty \Longrightarrow w \in L^1(\Omega)$$

2ª parte: verifico che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(v+\varepsilon h) - F(v)}{\varepsilon} = \int_\Omega W(x)\,dx$$

$$\frac{F(v+\varepsilon h) - F(v)}{\varepsilon} - \int_\Omega W\,dx =$$

$$= \int_\Omega \left\{ \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x, v+\varepsilon h) - F(x,v)\right] - W \right\} dx$$

Basta verificare che $\int_\Omega \{\dots\} \longrightarrow 0$ lungo una qualunque successione $\varepsilon_n \longrightarrow 0$.

Chiamo $\varphi_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}\left[f(x, v(x)+\varepsilon_n h(x)) - f(x, v(x))\right] - W(x)$

Siccome $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k)$ ed essendo $W(x) = \nabla_v f(x, v(x)) \cdot h(x)$, si ha che

$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Osservo che $\forall x \in \Omega$ fissato $\exists\, \theta \in [0,1]$ $(\theta = \theta(n,x))$ t.c.

$$f(x, v(x)+\varepsilon_n h(x)) - f(x, v(x)) = \nabla_v f(x, v(x) + \theta \varepsilon_n h(x)) \cdot \varepsilon_n h(x)$$

$$|\varphi_n(x)| \le |\nabla_v f(x, v(x) + \theta\varepsilon_n h(x))|\,|h(x)| + |W(x)|$$

$$\le \left(a_1 + b_1 |v(x) + \theta \varepsilon_n h(x)|^{p-1}\right)|h(x)| + |W(x)|$$

$$\le a_1 |h(x)| + C_1 |v(x)|^{p-1}|h| + C_2\left(|\theta|\,|\varepsilon_n|\,|h(x)|\right)^{p-1}|h(x)| + |W(x)|$$

$$\le \underbrace{a_1 |h(x)|}_{L^1} + \underbrace{C_1 |v(x)|^{p-1}|h(x)|}_{L^1} + \underbrace{C_2 |h(x)|^p}_{L^1} + \underbrace{|W(x)|}_{L^1}$$

$\Longrightarrow$ convergenza dominata $\int_\Omega \varphi_n(x)\,dx \longrightarrow 0$ $\square$

La disuguaglianza

$$c_0 + \int_0^1 (a_1 + b_1 |sv|^{p-1})|v|\,ds \le c_0 + a_1 + b_1 |v|^p \int_0^1 s^{p-1}\,ds$$

va corretta in

$$c_0 + \int_0^1 (a_1 + b_1 |sv|^{p-1})|v|\,ds \le c_0 + a_1|v| + b_1 |v|^p \int_0^1 s^{p-1}\,ds$$

$$\le c_0 + a_1 |v| + b_1 |v|^p \frac{1}{p} \le c_0 + a_1 |v| + b_1 |v|^p$$

perché $p \ge 1$.

Quindi si usa il fatto che essendo $p \ge 1$

$$a_1 t + b_1 t^p \le (a_1 + b_1)(1 + t^p) \quad \forall t \ge 0 \qquad (*)$$

e così si perviene a

$$c_0 + \int_0^1 (a_1 + b_1 |sv|^{p-1})|v|\,ds \le \underbrace{(c_0 + a_1 + b_1)}_{\bar a} + \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\bar b} |v|^p$$

come si voleva.

La $(*)$ si verifica così: per $t \in [0,1]$ si ha che

$$a_1 t + b_1 t^p \le a_1 + b_1 \le (a_1 + b_1)(1 + t^p)$$

Per $t > 1$ $\quad a_1 t + b_1 t^p \le a_1 t^p + b_1 t^p \le (a_1 + b_1)(1 + t^p)$.

Quindi $(*)$ vale $\forall t \ge 0$.