Metodi variazionali — Lezione 6

Titolo nota 11/03/2020

Dato un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e data una funzione $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e t.c. $\exists\, p \geq 1, \exists\, a, b \geq 0$

$$|\nabla_v f(x, v)| \leq a + b|v|^{p-1} \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^k \ \left(\in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k\right)$$

Definiamo un funzionale

$$F(v) = \int_\Omega f(x, v(x))\, dx$$

dove $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con opportune proprietà di integrabilità. Lo spazio adeguato è $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

<u>Lemma</u> F è ben definito e continuo in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Inoltre $\forall v, \varphi \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$

- la funzione $x \longmapsto \nabla_v f(x, v(x)) \cdot \varphi(x)$ è in $L^1(\Omega)$
- $\exists \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}(v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla_v f(x, v(x)) \cdot \varphi(x)\, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial v_i}(x, v(x)) \varphi_i(x)\, dx$

Ora consideriamo un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e una funzione lagrangiana $L : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\left(L = L(x, u, \xi)\right)$ di classe C^1 in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e t.c. $\exists\, p \geq 1, \exists\, a, b \geq 0$: $\forall (x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$$\left|\frac{\partial L}{\partial u}(x, u, \xi)\right| + \left|\nabla_\xi L(x, u, \xi)\right| \leq a + b\left(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right)$$

Definiamo il funzionale d'azione associato a L:

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

una
u in V classe di funzioni da $\Omega \to \mathbb{R}$ opportunamente integrabili, insieme alle loro derivate deboli.
Lo spazio adeguato è $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 1 F è ben definito e continuo in $W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre $\forall u, h \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\exists \frac{\partial F}{\partial h}(u) = \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x)) h(x) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \right] dx$$

dim. Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha che

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad i = 1, \dots, N.$$

Definisco $v(x) = \left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right)$.

$v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$.

Chiamo $f(x, v) = L(x, v_1, \tilde{v})$ $\quad v = (v_1, \tilde{v}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

dove $\tilde{v} = (v_2, \dots, v_{N+1})$.

Dall'ipotesi su L si ha che

$$|\nabla_v f(x, v)| \le a + b |v|^{p-1} \quad \forall (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N+1}.$$

$$F(u) = \int_\Omega L(x, u, \nabla u)\, dx = \int_\Omega f(x, v(x))\, dx$$

Si ha che F è ben definito e continuo in $W^{1,p}(\Omega)$.
Fissiamo $u, h \in W^{1,p}(\Omega)$ e chiamiamo

$$\left.\begin{aligned} v(x) &= \left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right) \\ \varphi(x) &= \left(h(x), \frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_N}(x) \right). \end{aligned}\right\} \text{in } L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$$

Per il Lemma, la funzione

$x \longmapsto \nabla_v f(x, v(x)) \cdot h(x)$ è in $L^1(\Omega)$

Inoltre $\exists \frac{\partial F}{\partial h}(u) = \int_\Omega \nabla_v f(x, v(x)) \cdot \varphi(x)\, dx$

Ma $\nabla_v f(x, v(x)) \cdot \varphi(x) = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\partial f}{\partial v_i}(x, v(x)) \varphi_i(x) =$

$= \frac{\partial L}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x))\, h(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x).$

□

Torniamo ad esaminare un problema di minimo.
Supponiamo dati $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato, una funzione lagrangiana $L : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$
con le ipotesi fatte sopra (di classe C^1 e t.c.
$\left|\frac{\partial L}{\partial u}\right| + |\nabla_\xi L| \le a + b(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$
con $p \ge 1$ e $a, b \ge 0$.

Sia $F(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \qquad u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Fissiamo $g \in W^{1,p}(\Omega)$ e definiamo
$W^{1,p}_g = g + W^{1,p}_0(\Omega)$

Supponiamo che $\exists\, \bar u \in W^{1,p}_g$ t.c. $F(\bar u) = \inf_{W^{1,p}_g} F$.

Proposizione 2 Si ha che $\frac{\partial F}{\partial h}(\bar u) = 0 \quad \forall h \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

dim. Fissata $h \in W^{1,p}_0(\Omega)$ definiamo
$\phi(\varepsilon) = F(\bar u + \varepsilon h) \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$.

ϕ ben definita e $\bar u + \varepsilon h \in W^{1,p}_g$ perché
$\bar u \in W^{1,p}_g$ cioè $\bar u = g + \bar v$ con $\bar v \in W^{1,p}_0(\Omega)$

$\bar u + \varepsilon h = g + \underbrace{\bar v + \varepsilon h}_{\in W^{1,p}_0(\Omega)}$ (spazio vettoriale)

$\phi(0) = F(\bar u) \le F(\bar u + \varepsilon h) = \phi(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

$\varepsilon = 0$ è punto di minimo di ϕ.

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\varepsilon = 0$. Infatti

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(\varepsilon) - \phi(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\bar u + \varepsilon h) - F(\bar u)}{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial h}(\bar u)$$

(perché si può applicare la proposizione precedente).

Dunque $\phi'(0) = \dfrac{\partial F}{\partial h}(\bar u)$. Essendo inoltre $\varepsilon = 0$ punto di minimo interno al dominio di ϕ, per il teorema di Fermat, $\phi'(0) = 0$ cioè $\dfrac{\partial F}{\partial h}(\bar u) = 0$. □

<u>Corollario</u> Sotto le ipotesi precedenti se $\bar u$ è punto di minimo di F in $W^{1,p}_g$ allora

$$\frac{\partial F}{\partial h}(\bar u) = 0 \quad \forall h \in W^{1,p}_0(\Omega) \quad \text{cioè} \quad \forall h \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar u, \nabla \bar u)\, h + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x, \bar u, \nabla \bar u) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right] dx = 0$$

(equazione di Eulero–Lagrange, forma debole).

Supponiamo <u>in più</u> che $L \in C^2$ e $\bar u \in C^2(\bar\Omega)$.

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \xi_i}(x, \bar u, \nabla \bar u) \frac{\partial h}{\partial x_i} \, dx =$$

$$= \int_\Omega \nabla_\xi L(x, \bar u, \nabla \bar u) \cdot \nabla h \, dx =$$

Considero il campo vettoriale

$$G(x) = \nabla_\xi L(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x))\, h(x)$$

Per le ipotesi fatte su L e su $\bar u$, se $h \in C^\infty_c(\Omega)$ si ha che $G \in C^1(\bar\Omega)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} G(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} G(x)\cdot \nu(x)\,d\sigma(x) \qquad (1)$$

Prendendo $h \in C_c^\infty(\Omega)$, in particolare $h|_{\partial\Omega} = 0$ e dunque $G(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega$.

$$\operatorname{div} G = \operatorname{div}_x \left[\nabla_\xi L\left(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x)\right)\right] h(x) + \nabla_\xi L\left(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x)\right)\cdot \nabla h(x).$$

Da (1) si ha che

$$\int_\Omega \nabla_\xi L(x, \bar u, \nabla \bar u)\cdot \nabla h\,dx = -\int_\Omega \operatorname{div}_x\left[\nabla_\xi L(x, \bar u, \nabla \bar u)\right] h\,dx$$

Sostituendo nell'eq. di Eulero-Lagrange, forma debole, troviamo che $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{\frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar u, \nabla \bar u) - \operatorname{div}_x\left[\nabla_\xi L(x, \bar u, \nabla \bar u)\right]\right\} h\,dx = 0$$

Dal lemma di annullamento deve essere

$\{\dots\} = 0$ q.o.

Ma la funzione in $\{\dots\}$ è continua poiché $L \in C^2$ e $\bar u \in C^2$ (sui rispettivi domini).

Dunque

$$\operatorname{div}_x\left[\nabla_\xi L\left(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x)\right)\right] = \frac{\partial L}{\partial u}\left(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x)\right) \quad \forall x \in \Omega$$

equazione di Eulero-Lagrange in senso forte.

<u>Esempio 1</u> $\quad L(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + g(u)$

con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e con

$|g'(u)| \le a + b|u|$

Allora

$$\left|\frac{\partial L}{\partial u}\right| + \left|\nabla_\xi L\right| = \left|g'(u)\right| + |\xi| \le a + (\max\{b,1\})(|u|+|\xi|)$$

Supponendo $g \in C^2$, l'equaz. di Eulero-Lagrange in forma forte è

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x\left(\nabla_\xi L(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x)\right) = \operatorname{div}_x\left(\nabla \bar u(x)\right) = \Delta \bar u(x) \\ \dfrac{\partial L}{\partial u}(x, \bar u(x), \nabla \bar u(x)) = g'(\bar u(x)) \end{cases}$$

$$\Delta \bar u(x) = g'(\bar u(x)) \qquad x \in \Omega.$$

L'eq. di Eulero-Lagrange in forma debole risulta essere

$$\int_\Omega \left[\nabla \bar u \cdot \nabla h + g'(\bar u)\, h\right] dx = 0 \qquad \forall h \in C_c^\infty(\Omega).$$

N.B. Le eq. di Eulero-Lagrange si possono formulare anche in versione vettoriale per lagrangiane

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{Nk} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\Omega \subset \mathbb{R}^N).$$

Si ha in tal caso un sistema di k equazioni:

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u_j}(x, \bar u, D\bar u)\, h + \frac{\partial L}{\partial \xi_j}(x, \bar u, D\bar u) \cdot \nabla h\right] dx = 0$$
$$\forall h \in W_0^{1,p}(\Omega)$$
$$\forall j = 1, \dots, k.$$

Esempio 2 $\quad N = 1. \quad L = L(t, u, \dot u)$, $u \in \mathbb{R}^k$, $\dot u \in \mathbb{R}^k$

Eulero-Lagrange debole:

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar u, \dot{\bar u}) \cdot h + \frac{\partial L}{\partial \dot u}(t, \bar u, \dot{\bar u}) \cdot \dot h\right] dt = 0$$

$\Omega \leftrightarrow$ intervallo

$$\forall h \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k).$$

$$h(t), \dot h(t) \in \mathbb{R}^k$$

Prendendo $h(t) = \varphi(t)\, e_i \qquad e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$

$\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ si ottiene il sistema i

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial u_i}(t, \bar u, \dot{\bar u})\, \varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot u_i}(t, \bar u, \dot{\bar u})\, \dot\varphi \right] dt = 0$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

$\forall i = 1, \dots, k.$

Equazioni di Eulero-Lagrange forte:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot u}(t, \bar u, \dot{\bar u})\right] = \frac{\partial L}{\partial u}(t, \bar u, \dot{\bar u})$$

(uguaglianza tra vettori in $\mathbb{R}^k$)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot u_i}(t, \bar u, \dot{\bar u})\right] = \frac{\partial L}{\partial u_i}(t, \bar u, \dot{\bar u}) \qquad i = 1, \dots, k.$$

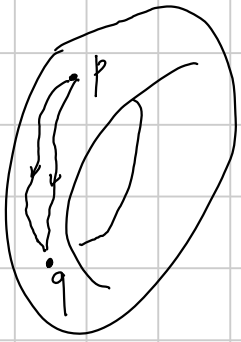
Riferimento bibliografico:

B. Dacorogna: Introduction to the Calculus of Variations.

Il problema delle geodetiche.

(Riferimento bibliografico:

Battazzo - Giaquinta - Hildebrandt: One-dimensional variational problems).



M varietà differenziabile N-dim (in $\mathbb{R}^k$) differenziabile ∞ volte.

M munita di una metrica riemanniana cioè è data una funzione $g : TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- $\forall p \in M \quad g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ prodotto interno definito in T_pM
- $p \longmapsto g(p)$ è differenziabile C^∞ cioè $\forall\, X_p, Y_p : M \longrightarrow TM \quad p \longmapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ è C^∞.

Una varietà riemanniana è una coppia (M, g) dove M è una varietà differenziabile e g è una metrica riemanniana.

In coordinate locali: fissata una carta (U, φ) U aperto di M e $\varphi : U \longrightarrow V =$ aperto di $\mathbb{R}^N$ omeomorfismo.

$\forall p \in U \ \exists$ una base in T_pM indotta da φ denotata $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_N|_p\}$.

Ogni $u \in T_pM$ si scrive come

$u = \sum_{i=1}^{N} x^i \partial_i|_p$ dove x^i è l'i-esima coordinata di u rispetto alla base $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_N|_p\}$.

Convenzione di Einstein: $x^i \partial_i = \sum_{i=1}^{N} x^i \partial_i$

Presi $u, v \in T_pM$ si ha che

$\langle u, v \rangle_p = g_{ij} x^i y^j$ dove $u = x^i \partial_i$, $v = y^i \partial_i$

e $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p$. $\quad i, j = 1, \dots, N$

$g_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(p) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

$g(p)$ prodotto interno $\iff$ $(g_{ij}(p))_{i,j=1,\dots,N}$ matrice simmetrica e definita positiva

$p \longmapsto g(p)$ differenziabile C^∞ $\iff$ $x \longmapsto g_{ij}(\varphi^{-1}(x))$ funzioni C^∞ da $V \subset \mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$ $(\forall i, j = 1, \dots, N)$.

