Metodi variazionali — Lezione 7

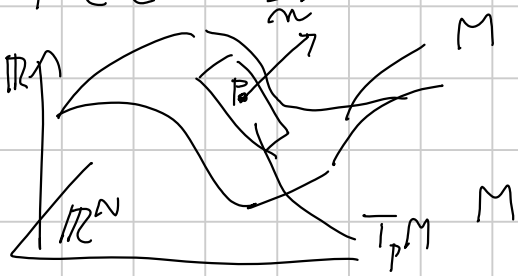
Titolo nota 12/03/2020

Il problema delle geodetiche

Esempio di varietà riemanniana

M = grafico di una funzione $f: \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (Ω = dominio)

$f \in C^\infty$



$M \subset \mathbb{R}^{N+1}$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : \ x \in \Omega, \ y = f(x)\}$$

Fissato $p \in M$, $p = (x, f(x))$, il versore normale a M in p è dato da

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f(x)|^2 + 1}} \left(-\nabla f(x), 1\right)$$

$$T_pM = \{ q \in \mathbb{R}^{N+1} : \ q \cdot \vec{n} = 0 \}$$

$$= \{ (u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : \ u \cdot \nabla f(x) = v \}$$

M è una varietà differenziabile C^∞ N-dim in $\mathbb{R}^{N+1}$.

Definiamo su M una metrica riemanniana g come quella metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^{N+1}$.

Nell'esempio la varietà M si può coprire con una sola carta $\varphi : M \longrightarrow \Omega$

$\varphi(p) = x$ se $p = (x, f(x))$.

Definisco g attraverso le coordinate locali

Dati $q, \bar{q} \in T_p M$ $\quad q = x^i \partial_i \quad \bar{q} = \bar{x}^i \partial_i$

dove $\{\partial_1, \dots, \partial_N\}$ è le base in $T_p M$

definita da $\partial_i = e_i + \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x e_{N+1}$

(e_i: versore i-esimo di $\mathbb{R}^{N+1}$; e_{N+1}: versore $(N+1)$-esimo)

$\langle q, \bar{q} \rangle_p = g_{ij} x^i \bar{x}^j$ si somma sugli indici ripetuti (convenzione di Einstein)

$g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \qquad i, j = 1, \dots, N$

($\cdot$: prodotto scalare in $\mathbb{R}^{N+1}$)

$g_{ij} = g_{ij}(x)$. con dipendenza C^∞ da x

$\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ è un prodotto interno $\iff (g_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ è una matrice simmetrica definita positiva.

perché g_{ij} = prodotto interno euclideo tra ∂_i e ∂_j.

g è una metrica riemanniana su M.

(M, g) è una varietà riemanniana.

In generale se (M, g) è una varietà riemanniana possiamo calcolare le distanze tra punti di M usando la metrica g

def. Una curva regolare in M è una funzione $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ di classe C^1 e con $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Dati $p, q \in M$ una curva o cammino in M che congiunge p a q è una curva regolare in M

t.c. $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Data una curva regolare γ in M chiamiamo lunghezza di γ il numero

$$L(\gamma) = \int_0^1 \| \gamma'(t) \|_{\gamma(t)} \, dt$$

dove in generale $\forall p \in M$, $\forall q \in T_pM$ si pone $\| q \|_p = \sqrt{\langle q, q \rangle_p}$ (norma indotta dalla metrica riemanniana).

Def. Data una varietà riemanniana connessa (M, g) e presi p, q chiamiamo distanza riemanniana tra p e q il numero ≥ 0

$$d(p, q) = \inf \{ L(\gamma) : \gamma \in \Gamma_{p,q} \}$$

dove $\Gamma_{pq} = \{ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid \gamma$ curva regolare in M, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q \}$.

Lemma $d(p, q)$ è una distanza in M che induce su M la topologia della varietà.

Si vuole discutere questo risultato:

Teorema Data una varietà riemanniana (M, g) che supponiamo connessa e completa (rispetto alla distanza riemanniana indotta da g) si ha che $\forall p, q \in M$ $\exists \gamma \in \Gamma_{p,q}$ t.c. $L(\gamma) = d(p, q)$.

È lo studio del problema di minimizzazione

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} L(\gamma)$$

Discuto la dimostrazione in un caso semplificato sotto due ipotesi aggiuntive:

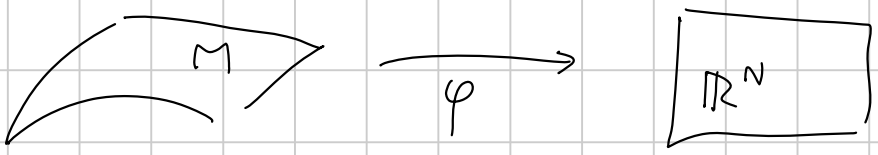
(1) supponiamo, per semplicità, che M si possa coprire con una sola carta (M, φ) dove $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ omeomorfismo.

(2) la metrica riemanniana sia "ben controllata" rispetto a quella euclidea; cioè supponiamo
$\exists\, c_1, c_2 > 0$ t.c. $c_1|\xi|^2 \le g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \le c_2|\xi|^2$
$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \forall \xi \in T_x\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$.

Le ipotesi aggiuntive servono per non appesantire la presentazione da un punto di vista tecnico e comunque permettono di mettere in evidenza tutte le idee essenziali nello studio del problema variazionale.

<u>Step 1</u> Riformulazione analitica del problema ambientandolo in $\mathbb{R}^N$ rispetto ad una carta metrica

$\forall \gamma \in \Gamma_{p,q}$ definisco $u = \varphi \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$



Chiamo $a = \varphi(p)$ e $b = \varphi(q)$.

In tal caso $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione C^1 t.c. $u(0) = a$, $u(1) = b$.

Osservo che

$$\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} = \sqrt{g_{ij}(u(t))\,\dot{u}^i(t)\,\dot{u}^j(t)}$$

dove $g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_p \qquad p = \varphi^{-1}(x)$

e $\partial_i = \partial_i|_p$.

Allora $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt =$

$$= \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(u)\, u^i u^j}\, dt := F(u)$$

$u \in \mathcal{C} = \{ u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N) : \; u(0) = a, \; u(1) = b$

$g_{ij}(u(t))\, u^i(t)\, u^j(t) > 0 \quad \forall t \in [0,1] \}$.

condizione di velocità mai nulla

Il problema $\inf\{L(\gamma) : \gamma \in \Gamma_{p,q}\}$ è stato ricondotto al problema $\inf\{F(u) : u \in \mathcal{C}\}$.

Lemma 1 Se $\bar{u} \in \mathcal{C}$ t.c. $F(\bar{u}) = \inf_{\mathcal{C}} F$ allora $\bar{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \bar{u}$ verifica $L(\bar{\gamma}) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{p,q}} L(\gamma) = d(p,q)$

dim. Presa una generica $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ chiamo $u = \varphi \circ \gamma$. Allora $u \in \mathcal{C}$ e quindi

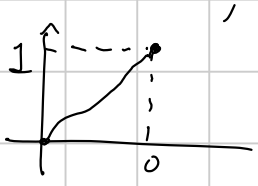
$$L(\gamma) = F(u) \geq F(\bar{u}) = L(\bar{\gamma}).$$

$u = \varphi \circ \gamma$; $\bar{u}$ pto di min. ; $\bar{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \bar{u}$

□

Date $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ $u, v \in \mathcal{C}$, u e v sono equivalenti ($u \sim v$) se $\exists\, \psi : [0,1] \to [0,1]$ di classe C^1, invertibile, $\psi' > 0$ e t.c.

$v = u \circ \psi$



Se $u, v \in \mathcal{C}$ e $u \sim v$ allora hanno lo stesso

supposto e $F(u) = F(v)$

Similmente a problemi di minimizzazione già trattati conviene ambientare il problema $\inf_C F$ in spazi di Sobolev.

In questo caso $F(u) = \int_0^1 f(u, \dot{u})\, dt$

$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(u,\dot{u}) = \sqrt{g_{ij}(u)\, \dot{u}^i \dot{u}^j}$

f è continua.
La crescita di f è definita dall'ipotesi (2)

$$\sqrt{c_1}\,|\dot{u}| \le f(u,\dot{u}) \le \sqrt{c_2}\,|\dot{u}| \quad \forall u, \dot{u} \in \mathbb{R}^N$$

f ha una crescita lineare.
Lo spazio di Sobolev adeguato per lo studio del pb di $\inf_C F$ è $W^{1,p}([0,1])$ con $p=1$.

Ma $W^{1,1}$ non è uno spazio riflessivo.
Non si può usare nessun teorema di Weierstrass perché lo spazio non è riflessivo.

Si sfrutta l'invarianza rispetto a cambi di parametrizzazione per passare dal problema $\inf_C F$ ad un problema $\inf_C E$ in cui il nuovo funzionale corrisponde ad una lagrangiana con crescita più che lineare
In particolare si considera

$$E(u) = \int_0^1 \underbrace{g_{ij}(u)\, \dot{u}^i \dot{u}^j}_{Q(u,\dot{u})}\, dt$$

$$c_1 |\dot u|^2 \le Q(u,\dot u) \le c_2 |\dot u|^2 \quad \forall u, \dot u \in \mathbb{R}^N.$$

Così facendo lavoreremo in $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)$ (che è uno spazio riflessivo).

Step 2 Confronto tra i problemi $\inf_{\mathcal{C}} F$ e $\inf_{\mathcal{C}} E$.

Oss. $F(u) = L(\gamma)$ lunghezza

$E(u) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2_{\gamma(t)}\, dt$ energia cinetica.

Osserviamo preliminarmente che

$$\forall u \in \mathcal{C} = \{ u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N) : u(0)=a,\ u(1)=b,\ Q(u(t), \dot u(t)) > 0\ \forall t \}$$

$\exists\, v \sim u$ t.c. $Q(v(t), \dot v(t)) = \text{cost.}$

Costruisco v introducendo la funzione lunghezza d'arco normalizzata: $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \frac{1}{F(u)} \int_0^t \sqrt{g_{ij}(u(s))\, \dot u^i(s)\, \dot u^j(s)}\, ds$$

$\varphi' > 0$ perché $Q(u(t), \dot u(t)) > 0\ \forall t$

Tale φ è un diffeo crescente di $[0,1]$ in sé.

Definiamo $v(t) = (u \circ \varphi^{-1})(t)$.

Dunque $v \sim u$ — inoltre

$Q(v(t), \dot v(t)) = \text{costante}$

(verifica diretta. Si ricordi che $(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))}$)

Più precisamente $Q(v(t), \dot v(t)) = F(u)^2$.

Lemma 2 Se $\bar{u} \in \mathcal{C}$ è punto di minimo di E in $\mathcal{C}$ allora lo è anche per F in $\mathcal{C}$.

dim. Sia $\bar{u} \in \mathcal{C}$ t.c. $E(\bar{u}) = \min_{\mathcal{C}} E$.

$\forall\, u \in \mathcal{C}$ $\exists\, v \sim u$ t.c. $\varphi(v(t), \dot{v}(t)) = \text{cost}$

$$F(v) = F(u) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(u, \dot{u})}\, dt$$

$$\overset{\text{Hölder } p=2}{\leq} \left(\int_0^1 \left(\sqrt{\varphi(u, \dot{u})} \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1^2\, dt \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 \varphi(u, \dot{u})\, dt \right)^{1/2} = \sqrt{E(u)}.$$

Inoltre se $v \in \mathcal{C}$ è t.c. $\varphi(v(t), \dot{v}(t)) = \text{cost}$ allora $F(v) = \sqrt{E(v)}$.

Dunque $\forall\, u \in \mathcal{C}$

$$F(u) \overset{\uparrow}{=} F(v) \overset{\uparrow}{=} \sqrt{E(v)} \geq \sqrt{E(\bar{u})} \geq F(\bar{u})$$

$u \sim v$ $\quad \varphi(v, \dot{v}) = \text{cost}$

cioè $F(\bar{u}) = \min_{\mathcal{C}} F$. $\square$

Step 3 Studio del problema $\inf_{\mathcal{C}} E$.

Si considera lo spazio $W^{1,2}_{a,b} = \{ u \in W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N) : u(0) = a,\ u(1) = b \}$.

Ricordo che $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^N)$.

Le condizioni $u(0) = a$ e $u(1) = b$ sono ben poste anche in $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)$.

(3A) studio il problema $\inf_{W^{1,2}_{a,b}} E$ e dimostro che $\exists\, \bar{u} \in W^{1,2}_{a,b}$ t.c. $E(\bar{u}) = \inf_{W^{1,2}_{a,b}} E$

(3B) Tale $\bar{u}$ appartiene a C cioè

$$\bar{u} \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N) \text{ e } \varphi(\bar{u}(t), \dot{\bar{u}}(t)) > 0 \quad \forall t$$

In tal caso $E(\bar{u}) = \min_C E$.

Per dimostrare (3A) non posso usare direttamente il teorema generale per funzionali integrali associati a lagrangiane convesse:

$$E(u) = \int_0^1 \varphi(u, \dot{u})\, dt$$

dove $\varphi(u, \dot{u}) = g_{ij}(u)\, \dot{u}^i \dot{u}^j$

φ è convessa rispetto a $\dot{u} \in \mathbb{R}$ $\forall u \in \mathbb{R}^N$ fissato

ma non è convessa globalmente rispetto a $(u, \dot{u})$

Usiamo il teorema di Weierstrass generalizzato:

X spazio di Banach riflessivo $\quad X = W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)$

$C \subset X$ convesso e chiuso $\quad C = W^{1,2}_{a,b}$.

$E : C \longrightarrow \mathbb{R}$, coercivo e sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente

coercivo in C: se $\|u\| \to \infty$, $u \in C$ allora $E(u) \to \infty$

seq. deb. s.c.i.: se $u_n \rightharpoonup u$ allora $E(u) \le \liminf E(u_n)$.

Allora $\exists\, \bar{u} \in C$ t.c. $E(\bar{u}) = \inf_C E$ -

$W^{1,2}_{a,b}$ convesso e chiuso perché sottospazio affine

$W^{1,2}_{a,b} = g + W^{1,2}_0([0,1], \mathbb{R}^N)$ dove

$g(t) = tb + (1-t)a \quad t \in [0,1]$.

E coercivo:

$$\|u\|^2 = \|u\|^2_{W^{1,2}} = \int_0^1 |u|^2 + \int_0^1 |\dot{u}|^2$$

Se $u \in W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)$ è assolutamente continuo e in particolare

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \dot{u}$$

Se $u \in W^{1,2}_{a,b}$ allora

$$|u(t)| = \left| u(0) + \int_0^t \dot{u} \right| \leq |u(0)| + \int_0^1 |u'|$$

$$\leq |a| + \sqrt{\int_0^1 |\dot{u}|^2} \sqrt{\int_0^1 1^2}$$

$$\int_0^1 |u|^2 \leq \left(|a| + \|\dot{u}\|_{L^2} \right)^2$$

$$\|u\|_{L^2} \leq |a| + \|\dot{u}\|_{L^2} \quad \forall u \in W^{1,2}_{a,b}. \qquad (1)$$

$$E(u) = \int_0^1 Q(u, \dot{u})\, dt \geq c_1 \int_0^1 |\dot{u}|^2 dt \qquad (2)$$

Se $u \in W^{1,2}_{a,b}$ e $\|u\| \longrightarrow \infty$ allora da (1)

$\|\dot{u}\|_{L^2} \longrightarrow \infty$ e quindi da (2), $E(u) \longrightarrow \infty$.