Metodi variazionali – Lezione 8

Titolo nota 14/03/2020

Il problema delle geodetiche.

Data una varietà riemanniana (M, g) supponiamo connessa e completa.

$\forall p, q \in M \quad \exists \bar\gamma \in \Gamma_{pq}$ t.c. $L(\bar\gamma) = d_M(p,q) = \inf_{\Gamma_{pq}} L$ (*)

1) Riformulazione del pb. per curve in $\mathbb{R}^N$

Ipotesi extra (M ammette un atlante composto da una sola carta $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$ omeomorfismo)

Si chiamano $a = \varphi(p)$, $b = \varphi(q)$

$$C = \{ u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N) : u(0) = a, \ u(1) = b, \ Q(u(t), \dot u(t)) > 0 \ \forall t \}$$

$Q(u, \dot u) = g_{ij}(u)\, \dot u^i \dot u^j$

Si suppone $\exists c_1, c_2 > 0$ t.c.

$$c_1 |\dot u|^2 \le Q(u, \dot u) \le c_2 |\dot u|^2 \quad \forall u, \dot u \in \mathbb{R}^N$$

$$F(u) = \int_0^1 \sqrt{Q(u(t), \dot u(t))}\, dt \qquad u \in C$$

Lemma 1 Se $\bar u \in C$ t.c. $F(\bar u) = \inf_C F$ allora $\bar\gamma = \varphi^{-1} \circ \bar u$ verifica $\bar\gamma \in \Gamma_{pq}$ e $L(\bar\gamma) = \inf_{\Gamma_{pq}} L$

2) Passaggio ad un problema equivalente

Si introduce $E(u) = \int_0^1 Q(u(t), \dot u(t))\, dt$

e si studia $\inf_C E$.

Lemma 2 Se $\bar u \in C$ t.c. $E(\bar u) = \inf_C E$ allora anche $F(\bar u) = \inf_C F$.

Studiare il pb $\inf_C E$ è più conveniente perché lo si può ambientare in $W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^N)$ spazio di Banach riflessivo.

3) Studio del problema di minimo nella forma debole.

$$W^{1,2}_{a,b} = \{ u \in W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^N) : u(0)=a,\ u(1)=b \}$$

Si applica una versione generalizzata del teorema di Weierstrass per provare l'esistenza di un punto di min per E in $W^{1,2}_{a,b}$.

Lemma 3 $\exists\ \bar{u} \in W^{1,2}_{a,b}$ t.c. $E(\bar{u}) = \inf_{W^{1,2}_{a,b}} E$

4) Regolarità del punto di minimo e ritorno al problema in C

(4.a) $\bar{u} \in C^1([0,1],\mathbb{R}^N)$ e

(4.b) $Q(\bar{u}(t), \dot{\bar{u}}(t)) = \text{cost} > 0$ se $a \neq b \iff p \neq q$

$\Longrightarrow \bar{u} \in C$

5) Conclusione

$$E(\bar{u}) \geq \inf_C E \geq \inf_{W^{1,2}_{a,b}} E = E(\bar{u})$$

$\bar{u} \in C$; $W^{1,2}_{a,b} \subset C$; $\bar{u}$ pto di min in $W^{1,2}_{a,b}$

$\Longrightarrow E(\bar{u}) = \min_C E \overset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow} F(\bar{u}) = \min_C F$

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \bar{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \bar{u}$ verifica $L(\bar{\gamma}) = \inf_{p,q} L$

Completo la dim del lemma 3.

$W^{1,2}$ riflessivo, $W^{1,2}_{a,b}$ insieme chiuso e convesso

E coercivo in $W^{1,2}_{a,b}$

Resta da provare che E è debolm. seq. semicontinua inferiormente cioè se $(u_n) \subset W^{1,2}$ t.c. $u_n \longrightarrow u$ debolmente in $W^{1,2}$ allora $E(u) \leq \liminf E(u_n)$.

$$E(u) = \int_0^1 Q(u, \dot{u})\, dt$$

$Q(x, \xi) = g_{ij}(x)\, \xi^i \xi^j$ convessa solo in ξ

Se Q fosse convessa in (x, ξ) allora lo sarebbe anche E. Tale E è continuo rispetto alla topologia forte di $W^{1,2}$

Quindi se Q fosse convessa in (x, ξ), E sarebbe debolm. semicontinua inferiormente.

Ora però la convessità di Q in (x, ξ) non è garantita. Verifichiamo a meno che E risulta debolm. semicont. inferiormente.

Strumento utile: teorema di Rellich

$W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N) \subset C([0,1], \mathbb{R}^N)$ con immersione compatta.

Immersione significa che $\exists\, c > 0$ t.c.

$$\|u\|_{C([0,1])} \leq c\, \|u\|_{W^{1,2}} \qquad \forall u \in W^{1,2}$$

Ciò equivale a dire che

$Id : W^{1,2} \longrightarrow C([0,1])$

è un operatore lineare continuo

Immersione compatta significa che lo stesso operatore è compatto.

Ciò implica che si migliora la convergenza:

se $u_n \xrightarrow[w\text{-}W^{1,2}]{} u$ allora $u_n \xrightarrow[s\text{-}C]{} u$

cioè $u_n \longrightarrow u$ uniformemente in $[0,1]$.

Devo verificare che se $u_n \longrightarrow u$, $u_n \in W^{1,2}_{a,b}$ allora $E(u) \le \liminf E(u_n)$.

$$E(u_n) = \int_0^1 g_{ij}(u_n)\, \dot{u}_n^i \dot{u}_n^j \, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \left[g_{ij}(u_n) - g_{ij}(u) \right] \dot{u}_n^i \dot{u}_n^j \, dt}_{E_1(u_n)} + \underbrace{\int_0^1 g_{ij}(u)\, \dot{u}_n^i \dot{u}_n^j \, dt}_{E_2(u_n)}$$

$E_1(u_n) \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.

(u_n) è una succ. limitata in $W^{1,2}$

In particolare $\int_0^1 |\dot{u}_n|^2 dt \le \text{cost.}$

Inoltre (u_n) è limitata anche in $C([0,1], \mathbb{R}^N)$

$\exists R > 0$ t.c. $|u_n(t)| \le R \quad \forall t \in [0,1], \forall n$. (#)

$g_{ij} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ sono C^∞

In generale se $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è C^1 allora φ è loc. lipschitziana cioè $\forall R > 0$

$\exists K = K_R$ t.c. $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le K |x - y|$ $\forall x, y$ con $|x|, |y| \le R$.

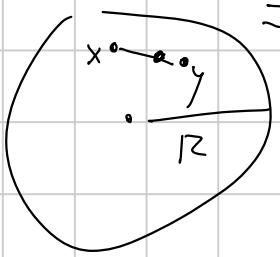
(si ottiene usando il teorema del valor medio

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le |\nabla\varphi(\theta x+(1-\theta)y)|\,|x-y|$$

$\exists\,\theta\in[0,1]$

$$\le \max_{|\xi|\le R} |\nabla\varphi(\xi)|\,|x-y|$$

K



Dunque fissa R come in (#) $\exists\, K_{ij}\ge 0$ t.c.

$$|g_{ij}(x)-g_{ij}(y)| \le K_{ij}|x-y| \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^N \text{ con } |x|,|y|\le R$$

Chiamo $K = \max_{1\le i,j\le N} K_{ij}$

So che $|u_n(t)| \le R \quad \forall\, t\in[0,1]$, $\forall n$.

Rellich $\Longrightarrow$ $u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(t)$

$\Longrightarrow |u(t)| \le R \quad \forall\, t\in[0,1]$

$$\Longrightarrow |g_{ij}(u_n(t)) - g_{ij}(u(t))| \le K|u_n(t)-u(t)|$$

$$(**) \quad \le K\,\|u_n-u\|_{C([0,1])} \quad \forall t\in[0,1],\ \forall n,\ \forall i,j.$$

$$|E_1(u_n)| \le \int_0^1 |g_{ij}(u_n)-g_{ij}(u)|\,|\dot u_n^i\,\dot u_n^j|\,dt$$

$$\overset{(**)}{\le} K\,\underbrace{\|u_n-u\|_{C([0,1])}}_{\to 0 \text{ (per Rellich)}}\ \underbrace{\int_0^1 |\dot u_n|^2\,dt}_{\text{limitata}}$$

((u_n) limitata in $W^{1,2}$)

$$\Longrightarrow E_1(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\Longrightarrow E(u_n) = o(1) + E_2(u_n)$$

$$E_2(u_n) = \int_0^1 g_{ij}(u(t))\,\dot u_n^i(t)\,\dot u_n^j(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 G(t, u_n)\, dt$$

$$G(t,\xi) = g_{ij}(u(t))\,\xi^i\xi^j$$ lagrangiana indipendente da u, e convessa in ξ.

E_2 è convesso, inoltre è continuo fortemente ($c_1|\xi|^2 \le G(t,\xi) \le c_2|\xi|^2$ per giudizio).

$\Longrightarrow$ E_2 è debolmente semicontinuo inf.

$$\Longrightarrow E_2(u) \le \liminf E_2(u_n).$$

$$E_2(u) = \int_0^1 g_{ij}(u(t))\,\dot{u}^i(t)\,\dot{u}^j(t)\,dt = E(u)$$

$$E(u) = E_2(u) \le \liminf E_2(u_n)$$
$$= \liminf \left[E(u_n) - \underbrace{E_1(u_n)}_{o(1)} \right]$$
$$= \liminf E(u_n).$$

Dimostro ora (4.a) $\bar{u} \in C^1([0,1])$.

Richiami sullo spazio $W^{1,1}([0,1])$ e sulle funzioni assolutamente continue.

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è assolut. cont. $\iff$
$\exists\, g \in L^1(0,1)$ t.c. $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$ $\forall\, t \in [0,1]$.

$\iff$ $\exists\, f'(t)$ per q.o. $t \in [0,1]$ e $f' \in L^1(0,1)$
(f': derivata classica)
e $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds$. $\forall t \in [0,1]$.

Denoto $AC([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ assol. continua in } [0,1]\}$.

2) se $f, g \in AC([0,1])$ anche $fg \in AC([0,1])$
$(fg)' = f'g + fg'$ q.o.

3) se $f \in AC([0,1], \mathbb{R}^N)$ (cioè $f_i \in AC([0,1])$ $\forall i = 1, \dots, N$) e $\varphi : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ con $D \supseteq \text{range } f$ e φ lipschitz in D allora $\varphi \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ è AC -

4) In dim 1 $W^{1,1}([0,1], \mathbb{R}^N) = AC([0,1], \mathbb{R}^N)$.
e la derivata debole = derivata classica q.o.

Sia $u \in W^{1,2}_{a,b}$ il punto di minimo di E in $W^{1,2}_{a,b}$.

$$E(u) = \int_0^1 \varphi(u, \dot{u})\, dt$$

$$\varphi(x, \xi) = g_{ij}(x)\, \xi^i \xi^j \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

Risulta che $\forall h \in C^\infty_c([0,1], \mathbb{R}^N)$

$$\exists \frac{\partial E}{\partial h}(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(u+\varepsilon h) - E(u)}{\varepsilon} =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, \dot{u}) \cdot h + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}) \cdot \dot{h} \right] dt$$

ciò vale perché $[\dots] \in L^1$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, \dot{u}) \cdot h = \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u, \dot{u})\, h^k = \underbrace{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}}_{\text{continua su } [0,1]}(u)\, \dot{u}^i \dot{u}^j h^k$$

($\dot{u}^i, \dot{u}^j \in L^2$, h^k continua, prodotto $\in L^1$)

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, \dot{u}) \cdot h \in L^1.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \dot u}(u,\dot u)\cdot \dot h = \frac{\partial Q}{\partial \xi^k}(u,\dot u)\,\dot h^k = g_{ij}(u)\left[\delta_{ik}\dot u^j + \dot u^i \delta_{kj}\right]\dot h^k$$

$$= g_{kj}(u)\,\dot u^j \dot h^k + g_{ik}(u)\,\dot u^i \dot h^k$$

$$= 2\,\underbrace{g_{ij}(u)}_{\substack{\text{continua}\\ \text{su } [0,1]}}\,\underset{\in L^2}{\dot u^i}\,\underset{\in \text{continua}}{\dot h^j} \in L^2 \subset L^1$$

$g_{ij} = g_{ji}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial \dot u}(u,\dot u)\cdot \dot h \in L^1$$

Essendo $u \in W^{1,2}_{a,b}$ punto di minimo di E in $W^{1,2}_{ab}$ si ha che $\frac{\partial E}{\partial h}(u) = 0 \quad \forall h \in C^\infty_c([0,1],\mathbb{R}^N)$.

cioè $$\int_0^1 \Big[\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial \dot u}(u,\dot u)}_{f}\cdot \dot h + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial u}(u,\dot u)}_{\tilde f}\cdot h\Big] = 0 \quad \forall h$$

Abbiamo $f, \tilde f \in L^1(0,1)$ che verificano

$$\int_0^1 \left(f\cdot \dot h + \tilde f \cdot h\right) dt = 0 \quad \forall h \in C^\infty_c([0,1],\mathbb{R}^N)$$

Dalla def. di derivata debole, si ha che f è derivabile in senso debole in $[0,1]$ e $\dot f = \tilde f$

$\Longrightarrow f \in W^{1,1} \subset C([0,1],\mathbb{R}^N)$.

$\Longrightarrow f^k =$ k-esima componente di f

$$\Longrightarrow f^k = 2\,g_{ik}(u)\,\dot u^i$$

Ricordo che $(g_{ij}(x))$ è una matrice simmetrica e definita positiva $\Longrightarrow$ invertibile.

Chiamo $[g^{ik}(x)] = [g_{ik}(x)]^{-1}$ matrice inversa

$$\Longrightarrow g^{jk}(u)\,f^k = 2\,g^{jk}(u)\,g_{ik}(u)\,\dot u^i = 2\delta_{ij}\,\dot u^i$$

$\Longrightarrow \quad \ddot{u}^j = \frac{1}{2} \underbrace{g^{jk}(u)}_{AC} \underbrace{f^k}_{AC}$ perché $f \in W^{1,1} = AC$

perché $u \in W^{1,1}$ e quindi AC
e g^{jk} è lipscitz (su range u).

$\Longrightarrow \quad \ddot{u} \in AC([0,1], \mathbb{R}^N)$

In particolare $\ddot{u} \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$. Dunque $u \in C^1$.

Dimostro ora (4.b). $\varphi(u(t), \dot{u}(t)) = \text{cost.}$

$\varphi(u, \dot{u}) = g_{ij}(u)\, \dot{u}^i \dot{u}^j$

So che $u \in C^1$ - Quindi $g_{ij}(u) \in C^1 \subset W^{1,1}$

$\dot{u} \in AC = W^{1,1}$

$\varphi(u, \dot{u})$ è prodotto di funzioni AC

$\Longrightarrow \varphi(u, \dot{u}) \in AC([0,1])$. $\underbrace{\quad}_{f_k}$

$\frac{d}{dt}\varphi(u, \dot{u}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(u, \dot{u})\, \dot{u}^k + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}(u, \dot{u})\, \ddot{u}^k =$

$= \dot{f} \cdot \dot{u} + f \cdot \ddot{u}$ $\quad \tilde{f}_k = \dot{f}_k$

$= \frac{d}{dt}(f \cdot \dot{u})$ vero perché $f, \dot{u} \in AC$.

posso perché so che $\dot{u} \in AC = W^{1,1}$

$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(u, \dot{u}) \cdot \dot{u}\right] = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{2 g_{ij}(u)\, \dot{u}^i \dot{u}^j}_{2\varphi(u, \dot{u})}\right]$

φ è quadratica in ξ

Complessivamente $\frac{d}{dt}[\varphi(u, \dot{u})] = \frac{d}{dt}[2\varphi(u, \dot{u})]$

$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\varphi(u, \dot{u}) = 0$ q.o.

Essendo $\varphi(u, \dot{u}) \in W^{1,1} = AC$

$$\varphi(u(t), \dot{u}(t)) = \varphi(u(0), \dot{u}(0)) + \int_0^t \frac{d}{dt}[\varphi(u, \dot{u})]$$
$$= \text{cost.} \quad \forall t$$

Se $p = q$ (caso banale) $\overline{\gamma} \equiv p$
$\iff a = b$ e $\overline{u}(t) \equiv a$).

Se $p \neq q$ allora

$\varphi(\overline{u}, \dot{\overline{u}}) = \text{cost}$

$$0 < d_R(p, q) \leq L(\overline{\gamma}) = F(\overline{u}) = \sqrt{E(\overline{u})} =$$
$$= \sqrt{\int_0^1 \varphi(\overline{u}, \dot{\overline{u}})\, dt} = \sqrt{\text{cost.}} \implies \overline{u} \in C.$$