Metodi variazionali - Lezione 9

Titolo nota 16/03/2020

Osservazioni conclusive sul problema delle geodetiche.

Considerazioni utili sugli spazi funzionali per funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I = [a,b]$.

$$f \in AC(I) \iff \begin{cases} \exists\, f'(t) \text{ per q.o. } t \in I \\ f' \in L^1(I) \\ f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds \\ \forall\, t \in I \end{cases}$$

$$C(I) \supset AC(I) \supset C^1(I).$$

$$AC(I) = W^{1,1}(I) = \{ f \in L^1(I) : \exists\, f' \in L^1 \}$$

(f': derivata debole)

Attenzione il concetto di derivata debole è formulato in forma integrale f derivabile in senso debole con derivata debole $f' = \tilde{f} \iff \int_I (f h' + \tilde{f} h)\,dt = 0$ $\forall\, h \in C_c^\infty((a,b))$.

Inoltre vale che

$$W^{1,p}(I) \subset W^{1,q}(I) \quad \text{se } p > q.$$

In particolare

$$W^{1,\infty}(I) = \{ f \in L^\infty(I) : \exists\, f' \in L^\infty \}$$

(f': derivata debole)

$$= \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ lipschitziana in } I \}$$

$$C(I) \supset AC(I) = W^{1,1}(I) \supset W^{1,p}(I) \supset W^{1,\infty}(I) = Lip(I) \supset C^1(I)$$

$\forall\, p > 1$

Per il pb delle geodetiche si è dimostrato che $\exists\, u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N)$ con le seguenti proprietà:

a) $E(u) = \inf_{\mathcal{C}} E \qquad E(u) = \int_0^1 g_{ij}(u(t))\, \dot{u}^i(t)\, \dot{u}^j(t)\, dt$

$$\mathcal{C} = \{ u \in C^1([0,1], \mathbb{R}^N) : u(0) = a,\ u(1) = b,$$
$$g_{ij}(u(t))\, \dot{u}^i(t)\, \dot{u}^j(t) > 0 \quad \forall t \in [0,1] \}$$

b) $Q(u(t), \dot{u}(t)) = c_0 > 0 \qquad (a \neq b)$

dove $Q(x, \xi) = g_{ij}(x)\, \xi^i\, \xi^j \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad \xi \in \mathbb{R}^N$

Obiettivo provare che $u \in C^2$ e scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange (forma forte).

Osservo che Q è una forma quadratica in ξ

$Q(x, \xi) = G(x)\xi \cdot \xi \qquad G(x) = [g_{ij}(x)]$

Essendo Q quadratica

$Q(x, s\xi) = s^2 Q(x, \xi) \qquad s \in \mathbb{R}$

$\frac{d}{ds}[Q(x, s\xi)] = 2s\, Q(x, \xi)$

Ma anche $\frac{d}{ds} Q(x, s\xi) = \nabla_\xi Q(x, s\xi) \cdot \xi$.

Prendendo $s = 1$ si trova $\nabla_\xi Q(x, \xi) \cdot \xi = 2 Q(x, \xi)$

Avevo trovato che la funzione

$t \longmapsto Q(u(t), \dot{u}(t))$ è costante.

Avevamo chiamato

$f^i = \frac{\partial Q}{\partial \xi^i}(u, \dot{u}) = 2 g_{ij}(u)\, \dot{u}^j \qquad (*)$

$f \in W^{1,1}$ e $\dot{f}^i = \frac{\partial Q}{\partial x^i}(u, \dot{u}) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(u)\, \dot{u}^j\, \dot{u}^k \qquad (\#)$

Avevo anche provato che, invertendo $(*)$:

$\dot{u}^j = \frac{1}{2} g^{ij}(u) f^i \qquad (**)$

essendo $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$

Da $(**)$ segue che $\dot{u}^j \in W^{1,1}$. Quindi da $(\#)$ ne ottiene che $\dot{f}^i \in W^{1,1}$ perché prodotto di

funzioni assolutamente continue.

$\dot{f}^i \in W^{1,1} = AC \Longrightarrow f^i \in C \Longrightarrow f^i \in C^1 \Longrightarrow \dot{u}^j \in C^1$ (**)
$\Longrightarrow u^j \in C^2 \quad (\forall j = 1, \dots, N)$.

Segue allora da fatti generali che u verifica

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial Q}{\partial \xi^i}(u(t), \dot{u}(t)) = \frac{\partial Q}{\partial x^i}(u(t), \dot{u}(t)) \qquad \forall t \in [0,1]$$

equazioni di Eulero-Lagrange in forma forte. $\qquad \forall i = 1, \dots, N$

$\Updownarrow$

$$\ddot{u}^i + \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, N \qquad (1)$$

$$\Gamma^i_{jk} = g^{il}(u) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ke}}{\partial x^j}(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{je}}{\partial x^k}(u) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^e}(u) \right]$$

simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita

Si ottiene anche che $u \in C^\infty(I)$

$u \in C^2 \Longrightarrow \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \in C^1 \Longrightarrow \ddot{u} \in C^1 \Longrightarrow u \in C^3$

si itera il discorso e si ottiene $u \in C^k \ \forall k$.

(1) è la formulazione in coordinate locali di

$$\nabla_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$$

connessione di Levi-Civita.

γ verifica (1) $\Longleftrightarrow \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}$ costante.

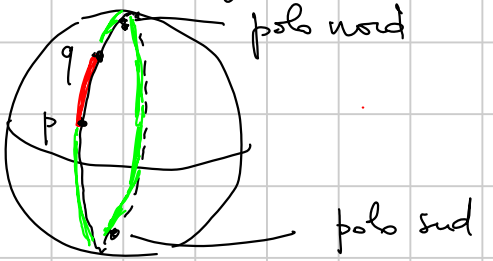
def. Una geodetica che congiunge $p \in M$ a $q \in M$ $(p \neq q)$ è una curva regolare $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ che risolve

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) = 0 \quad \forall t \\ \gamma(0) = p, \ \gamma(1) = q. \end{cases}$$

def. γ è una geodetica minimale che congiunge p a q se è una geodetica e $L(\gamma) = \inf_{\Gamma_{p,q}} L$

Possono esistere anche geodetiche non minimali

Es. M = sfera = $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

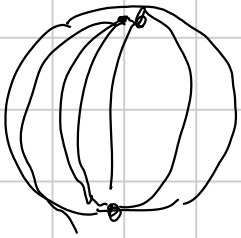


geodetica minimale

geodetica (non minimale)

Inoltre in generale la geodetica minimale esiste ma può essere non unica:

$M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ p = polo nord q = polo sud



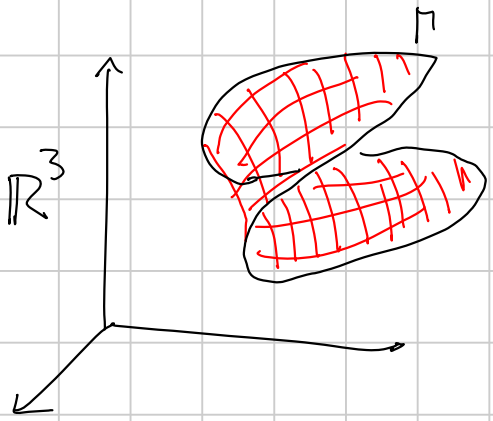
infinite geodetiche minimali.

Nel pb. analitico ciò deriva dalla assenza di convessità globale in (x, ξ).

Il problema di Plateau.

Si studiano superfici 2-dim in $\mathbb{R}^3$.

Fissata una curva chiusa semplice Γ in $\mathbb{R}^3$ si cerca tra tutte le superfici che hanno Γ come bordo quella di area minima.



pb. formulato da Lagrange 1760

Joseph Plateau 1873 esperimenti di capillarità.

Pb. stimolante per l'analisi matematica nei primi del '900 (ad es. teoria dell'integrazione secondo Lebesgue).

Pb risolto negli anni 30 da Douglas e Radò
(Douglas vinse la 1° Fields medal per questo).

Pb importante per il Calcolo delle Variazioni.
Ad es. le superficie di area minima risulta avere curvatura media nulla.
Stimolo per altri problemi di ricerca
(Analisi geometrica, geom. diff. delle superfici)
Ad es. studio di problemi di superfici
- con curvatura media costante
- vincoli sul bordo.

Dal punto di vista tecnico
- pb. di Plateau confrontabile col pb. geodetiche
- pb più difficile (le superfici si parametrizzano con funzioni di 2 variabili $\longrightarrow$ PDE
per il pb. delle geodetiche $\longrightarrow$ ODE).
- strumenti più delicati - Ad esempio si identifica $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e si sfruttano argomenti di analisi complessa.

1° passo Formulazione analitica del problema.

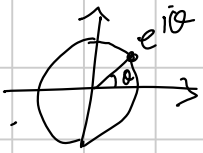
def. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

Una curva di Jordan Γ in $\mathbb{R}^3$ è l'immagine di una funzione $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua e iniettiva. Tale γ si chiama parametrizzazione di Γ. La curva Γ è orientata secondo γ.

Oss. Data una parametriz. $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$

la funzione $g(\theta) = \gamma(e^{i\theta}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

è una funzione continua e 2π-periodica.



Se prendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, non decrescente e t.c. $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) + 2\pi \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$ e

diciamo $\tilde{\gamma}(e^{i\theta}) = \gamma(e^{i\varphi(\theta)})$ si ha che

range $\tilde{\gamma}$ = range $\gamma = \Gamma$

$\tilde{\gamma}$ è continua

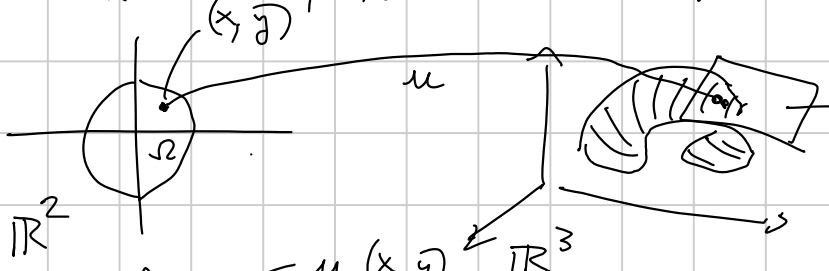
non è detto che sia iniettiva



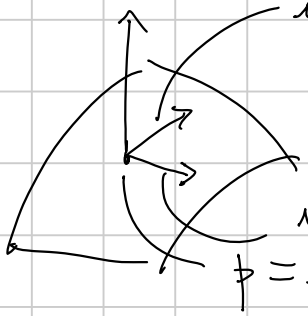
$\tilde{\gamma}$ non torna mai indietro.

$\tilde{\gamma}$ si dice parametriz. doppia di Γ.

Def. Una superficie parametrica del tipo del disco Σ è l'immagine di una funzione $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ e $u_x(x,y) \wedge u_y(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$.



$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$



$\vec{n} = \frac{u_x \wedge u_y}{|u_x \wedge u_y|}$ versore normale.

$T_p\Sigma = \{ q \in \mathbb{R}^3 : q \cdot \vec{n} = 0 \}$.

$$\text{area}(\Sigma) = \int_\Omega \sqrt{\det[(Du)^T (Du)]}\, dx\, dy$$

$$Du = [u_x \; u_y] = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{1y} \\ u_{2x} & u_{2y} \\ u_{3x} & u_{3y} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\det\left[(Du)^T(Du)\right]} = |u_x \wedge u_y|$$
↑ prodotto vettore

Definiamo $A(u) = \int_\Omega |u_x \wedge u_y| \, dx\, dy$ funzionale dell'area.

Osservo che $\forall\, p, q \in \mathbb{R}^3$

$$|p \wedge q| = |p|\,|q|\,|\sin\alpha| \le |p|\,|q| \le \frac{1}{2}|p|^2 + \frac{1}{2}|q|^2$$
↑ angolo compreso tra p e q

$$\Longrightarrow \quad |u_x \wedge u_y| \le \frac{1}{2}|u_x|^2 + \frac{1}{2}|u_y|^2 \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

(attenzione! u prende valori in $\mathbb{R}^3$!).

Non è necessario prendere $u \in C^1$ — $A(u)$ ben definito per $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ con $|u_x|, |u_y| \in L^2(\Omega)$.
Cioè $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Definiamo la classe di funzioni ammissibili.

Fissata una curva di Jordan Γ in $\mathbb{R}$ poniamo

$$C_\Gamma = \{ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \,:$$
$$\text{t.c. } u|_{\partial\Omega} \text{ parametrizzazione debole di } \Gamma \}$$

Si studia il pb. $\inf\{A(u) \,;\, u \in C_\Gamma\}$.
(formulazione analitica del pb. di Plateau).

Devo assicurarmi che $C_\Gamma \neq \emptyset$.
Questione non ovvia perché $\exists\, g : \mathbb{S}^1 = \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continue che ammettono estensione armonica h con $\int_\Omega |\nabla h|^2 \, dx\, dy = \infty$ — in tal caso $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy = \infty$ $\forall u$ estensione di g su Ω.
Se Γ ammette solo parametrizzazioni del genere risulta che $C_\Gamma = \emptyset$ (si esce da $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$).

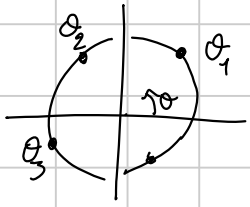
Su Γ serve un po' più regolarità.

def. Γ è una curva C^1 a tratti se ammette una parametrizzazione $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $g(\theta) = \gamma(e^{i\theta}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è C^1 a tratti: cioè $g \in C(\mathbb{R})$, $\exists\ 0 \le \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < 2\pi$ t.c. $g|_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} \in C^1$

Es.  Γ è una curva di Jordan C^1 a tratti ma non C^1.

Lemma Se Γ è C^1 a tratti allora $C_\Gamma \neq \emptyset$.

dim. $\exists\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ continua, C^1 a tratti 2π-periodica t.c. $\Gamma = \{ g(\theta) : \theta \in [0, 2\pi] \}$.



$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$g|_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} \in C^1$.

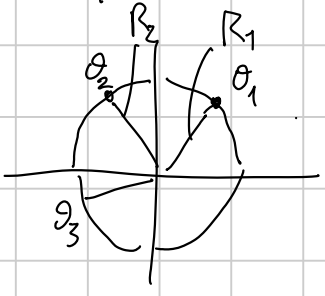
Poniamo $u(x,y) = \varphi(r)\, g(\theta) = v(r,\theta)$

(r,θ) coordinate polari $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

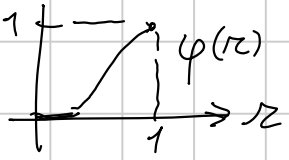
φ va scelta in modo appropriato

$\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ $\quad C^1 \quad \varphi(1) = 1$

$\varphi(r) = 0$ per $r \in [0, \delta]$



$R_j = \{ re^{i\theta_j} : r \in [0,1] \}$



$u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1\left(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} R_i\ ,\ \mathbb{R}^3\right)$

$$u_x = \varphi' g \frac{x}{r} - \varphi g' \frac{y}{r^2} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$u_y = \varphi' g \frac{y}{r} + \varphi g' \frac{x}{r^2}$$

$$|u_x|^2 + |u_y|^2 = (\varphi')^2 |g|^2 + \frac{\varphi^2}{r^2} |g'|^2 \in L^1(\Omega)$$

($\varphi = 0$ in un intorno di 0)

$u|_{\partial\Omega} = g$ (perché $\varphi(1) = 1$).

$\Longrightarrow u \in C_\Gamma$ cioè $C_\Gamma \neq \emptyset$.

Teorema (Douglas, Radò, 1930)

Se Γ è una curva di Jordan C^1 a tratti allora $\exists\, u \in C_\Gamma$ t.c. $A(u) = \inf_{C_\Gamma} A$.