Metodi Variazionali - Lezione 10

Titolo nota 17/03/2020

Data una curva di Jordan Γ in $\mathbb{R}^3$ orientata (orientazione fissata da una sua parametrizzazione)

$$\mathcal{C}_\Gamma = \{ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \mid u|_{\partial\Omega} \text{ parametriz. debole di } \Gamma \}$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\} \qquad \partial\Omega = S^1$$

$$A(u) = \int_\Omega |u_x \wedge u_y| \, dx\, dy$$

Si vuole studiare il problema $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma} A$

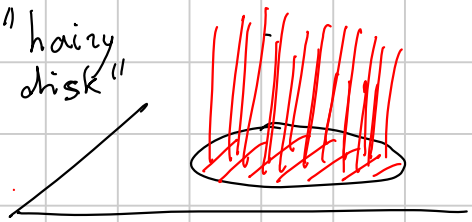
Supponiamo Γ t.c. $\mathcal{C}_\Gamma \neq \emptyset$
(ad esempio basta Γ sia C^1 a tratti).

Osservazioni (difficoltà sul problema $\inf_{\mathcal{C}_\Gamma} A$).

1) Il funzionale A non è coercivo.
Cioè esistono successioni $(u_n) \subset \mathcal{C}_\Gamma$ t.c.
$\|u_n\|_{W^{1,2}} \to \infty$ ma $0 \le A(u_n) \le \text{cost.}$

Giustificazione geometrica:





la configurazione limite è ancora un punto di minimo analiticamente. $A(u_n) \le \text{cost.}$
Ma $\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \to \infty$ - Dunque $\|u_n\|_{W^{1,2}} \to \infty$.

2) C_Γ non è w-chiusa

Ciò deriva dal fatto che se $u \in C_\Gamma$ e $g : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ diffeo allora $A(u \circ g) = A(u)$.

Step 2 Passaggio dal problema $\inf_{C_\Gamma} A$ al problema $\inf_{C_\Gamma} E$ dove $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_x|^2 + |u_y|^2)$

E si chiama energia, ben definito in C_Γ.

Lemma Se $u \in C_\Gamma$ è t.c. $E(u) = \inf_{C_\Gamma} E$ allora $A(u) = \inf_{C_\Gamma} A$.

dim. 1) Siccome $|p \wedge q| \le \frac{1}{2}(|p|^2 + |q|^2) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3$

si ha che $A(u) = \int_\Omega |u_x \wedge u_y| \le \int_\Omega \frac{1}{2}(|u_x|^2 + |u_y|^2) \le E(u)$.

$\forall u \in C_\Gamma$. Da ciò segue che $\inf_{C_\Gamma} A \le \inf_{C_\Gamma} E$.

Per l'altra disuguaglianza si usa:

Teorema (Morrey) [Lemma di ε-conformalità]

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall u \in C_\Gamma \ \exists \tilde{u} \in C_\Gamma$ t.c. $E(\tilde{u}) \le A(u) + \varepsilon$.

Da ciò si ottiene che $\forall \varepsilon > 0 \ \forall u \in C_\Gamma$ si ha

$\inf_{C_\Gamma} E \le E(\tilde{u}) \le A(u) + \varepsilon \implies \inf_{C_\Gamma} E \le \inf_{C_\Gamma} A + \varepsilon$

($\inf_{C_\Gamma} E$: costante > 0)

$\implies \inf_{C_\Gamma} E \le \inf_{C_\Gamma} A$.

($\varepsilon > 0$ arbitrario)

Conclusione: Sia $u \in C_\Gamma$ punto di min di E.

$A(u) \le E(u) = \min_{C_\Gamma} E \le \inf_{C_\Gamma} A$.

$\implies u$ punto di minimo anche per A. ☐

Oss. Il teorema di Morrey è difficile – Dimostrazione si avvale di strumenti di geom. diff. e analisi complessa.
Cfr. Sauvigny, Partial Differential Equations, vol. 2.
Struwe, Plateau's problem and the Calc. of. Var.
(dim. di natura variazionale).

In generale $A(u) \le E(u)$. $\forall u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Si ha che

$$A(u) = E(u) \underset{(*)}{\iff} \begin{cases} |u_x| = |u_y| \\ u_x \cdot u_y = 0 \end{cases} \quad \text{q.o.}$$

Una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ che verifica (*) si dice quasi conforme. Si dice conforme se $u_x(x,y) \wedge u_y(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$ e valgono $|u_x| - |u_y| = 0 = u_x \cdot u_y$ (condizioni di conformità) in Ω.



Verifica di (*).

$$E(u) - A(u) = \int_\Omega \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(|u_x|^2 + |u_y|^2\right) - |u_x \wedge u_y| \right]}_{f} dx\,dy$$

$f \ge 0$ q.o. in Ω.

$$E(u) = A(u) \iff f = 0 \text{ q.o.} \iff \frac{1}{2}\left(|u_x|^2 + |u_y|^2\right) = |u_x \wedge u_y|$$

Ricordo che $|p \wedge q|^2 = |p|^2 |q|^2 - (p \cdot q)^2$

$$E(u) = A(u) \iff \frac{1}{4}\left(|u_x|^2 + |u_y|^2\right)^2 = |u_x|^2 |u_y|^2 - (u_x \cdot u_y)^2$$

$$\iff \frac{1}{4}\left[\left(|u_x| - |u_y|\right)^2 + 2|u_x||u_y| \right]^2 = |u_x|^2 |u_y|^2 - (u_x \cdot u_y)^2$$

$$\iff \frac{1}{4}\left(|u_x|-|u_y|\right)^4 + |u_x||u_y|\left(|u_x|-|u_y|\right)^2 + \cancel{|u_x|^2|u_y|^2} = \cancel{|u_x|^2|u_y|^2} - (u_x\cdot u_y)^2$$

$$\iff \underbrace{\frac{1}{4}\left(|u_x|-|u_y|\right)^4}_{\geq 0} + \underbrace{|u_x||u_y|\left(|u_x|-|u_y|\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(u_x\cdot u_y)^2}_{\geq 0} = 0$$

$$\iff \begin{cases} u_x\cdot u_y = 0 \\ |u_x|-|u_y| = 0 \end{cases} \qquad \text{q.e.}$$

Step 3 Studio il problema $\inf_{C_p} E$.

$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy$ è continuo in $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ e convesso.

Tuttavia C_p non è w-chiuso in $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^3)$.

Ragione: invarianza di E rispetto alle trasformazioni conformi del disco in sé.

Definizione e caratterizzazione delle trasformazioni conformi.

def. Dati due aperti A e B in $\mathbb{R}^N$ una trasf. conforme tra A e B è un diffeo $F: A \to B$ che "preserva gli angoli" cioè

$$\frac{\langle DF(x)p, DF(x)q\rangle}{\|DF(x)p\|\,\|DF(x)q\|} = \frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\,\|q\|} \qquad \forall p,q\in\mathbb{R}^N,\ p,q\neq 0,\ \forall x\in A.$$

$\Updownarrow$

$\forall x\in A\ \exists\,\lambda(x)>0$ t.c.

$\langle DF(x)p, DF(x)q\rangle = \lambda(x)\langle p,q\rangle$

Basta sia vero sui vettori della base canonica

$p = e_i \quad q = e_j$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \lambda(x)\,\delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1,\dots,N.$$

Consideriamo $N=2$ e scriviamo $(x_1, x_2) = (x, y)$.

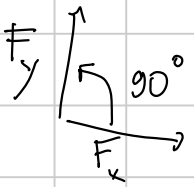
In dim 2 una trasformazione conforme $F : A \to B$ (A, B aperti di $\mathbb{R}^2$) è un diffeo t.c.

$$\begin{cases} F_x \cdot F_y = 0 \\ |F_x|^2 \left(= \lambda(x,y)\right) = |F_y|^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x \cdot F_y = 0 \\ |F_x| = |F_y| \end{cases} \text{ in } A$$

Essendo F diffeo deve essere $DF \neq 0$ sempre

Quindi deve essere $F_x \neq 0$ e $F_y \neq 0$.

(a)



$F_y = i F_x$

(b)



$F_x = i F_y$

In notazione complessa, se $z \in \mathbb{C}$, $iz = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ è il ruotato di z di 90° in senso antiorario

Sono le due sole alternative.

In notazione complessa $F = \varphi + i\psi$

(a) $F_y = i F_x \iff \begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases}$ equazioni di Cauchy–Riemann

$\iff$ F funzione olomorfa.

(b) $F_x = i F_y \iff F$ antiolomorfa

(a) si preserva anche l'orientazione

(b) si scambia l'orientazione.

Una funzione $F : A \to B$ (A, B aperti di $\mathbb{R}^2$) è una trasformazione conforme che preserva l'orientazione se e solo se F è olomorfa (vista come funzione di variabile complessa) con $F'(z) \neq 0 \quad \forall z \in A$ (F' = derivata complessa)

perché $|J_F| = |F'|^2$

Lemma $\forall u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ $\forall F : \Omega \to \Omega$ trasformazione conforme, $E(u) = E(u \circ F)$.

Verifica: esercizio $\int_\Omega |\nabla (u \circ F)|^2 dx\, dy = \dots$

cambio di variabili $(s,t) = F(x,y)$ $= \int_{F(\Omega)=\Omega} |\nabla u(s,t)|^2 ds\, dt$ (Cauchy–Riemann)

Osservazione Le funzioni della forma

$F(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (trasformazioni di Möbius o lineari fratte)

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc \neq 0$

sono olomorfe e con $F'(z) \neq 0$ (perché $ad \neq bc$)

da $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ in $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

Sono trasformazioni conformi.

Conviene estendere F su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

definendo $F(\infty) = \frac{a}{c}$ e $F(-\frac{d}{c}) = \infty$.

$F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ trasf. conforme.

Tra le trasf. di Möbius vi sono

traslazioni	$z \mapsto z + b$	
omotetie	$z \mapsto \lambda z$	$\lambda > 0$
rotazioni	$z \mapsto e^{i\phi} z$	$\phi \in \mathbb{R}$
inversione	$z \mapsto \frac{1}{z}$	

$\forall \{z_1, z_2, z_3\}, \{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{C}^*$ con $z_i \neq z_j$ e $w_i \neq w_j$

$\exists!\, F$ t.c. $F(z_i) = w_i$ $(i = 1,2,3)$.

Ad es. $w_1 = 0$ $w_2 = 1$ $w_3 = \infty$

$$F(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

F^{-1} si ottiene a partire dall'inverso di $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Se $F = F_A$ allora $F^{-1} = F_{A^{-1}}$.

Ora considero $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.

Sia $G = \{$ trasformazioni conformi di Ω in sé $\}$

Teorema $G = \left\{ z \longmapsto e^{i\phi} \frac{z-a}{\bar{a}z - 1} \; ; \; \phi \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{C}, \; |a| < 1 \right\}$

Se $g \in G$ allora $g(\Omega) = \Omega$ e $g(\partial\Omega) = \partial\Omega$.

(teorema 12.6 in W. Rudin, Real and Complex Analysis).

Corollario C_Γ non è w-chiuso in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Inoltre $\forall u \in C_\Gamma \; \exists (u_n) \subset C_\Gamma$ t.c. $u_n = u \circ g_n$

con $g_n \in G$ t.c. $E(u_n) = E(u)$ e

$u_n \longrightarrow$ cost $\in \mathbb{R}^3$ w-$W^{1,2}$ e puntualmente in Ω.

In particolare il limite debole di (u_n) non appartiene a C_Γ.

dim. Fisso $u \in C_\Gamma$. Prendo una successione $(a_n) \subset \Omega$ con $a_n \longrightarrow a \in \partial\Omega$ e definisco

$$g_n(z) = \frac{z - a_n}{\bar{a}_n z - 1} \qquad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

$g_n \in G$ Inoltre $E(u) = E(u \circ g_n)$ e $\|u\|_\infty = \|u \circ g_n\|_\infty$.

Essendo $E(u) = \frac{1}{2} \|Du\|_{L^2}$ si ottiene che (u_n) è limitata in $W^{1,2}$ dato che

$$\begin{cases} \|u_n\|^2_{W^{1,2}} = \underbrace{\|Du_n\|^2_{L^2}}_{2E(u_n)} + \|u_n\|^2_{L^2} \\ u_n = u \circ g_n \end{cases}$$

limitata perché lo è $\|u_n\|_\infty$.

A meno di estratte $u_n \longrightarrow u$ w-$W^{1,2}$.

$W^{1,2} \hookrightarrow L^2$ con immersione compatta.

$u_n \longrightarrow u \quad s\text{-}L^2$

A meno di estratte, $u_n \longrightarrow u$ puntualmente q.o.

$u_n(z) = u(g_n(z)) = u\left(\frac{z-a_n}{\bar{a}_n z - 1}\right)$

$g_n(z) = \frac{z-a_n}{\bar{a}_n z - 1} \longrightarrow \frac{z-a}{\bar{a}z-1} = \quad \forall z \in \Omega$

$= \frac{az - a^2}{a\bar{a}z - a} \overset{|a|=1}{=} \frac{a(z-a)}{z-a} = a.$

$u_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{u(a)}_{p} \quad \forall z \in \Omega$ perché $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$\Longrightarrow u(z) \equiv p$ q.o. In particolare $u|_{\partial\Omega} = \text{cost.}$

$\Longrightarrow \Gamma = \{p\}$ assurdo.

Dunque $u \notin C_\Gamma$.