Metodi variazionali — Lezione 14

Titolo nota 20/03/2020

Basta studiare il pb. $\inf_{C_\Gamma} E$ dove

$$C_\Gamma = \{ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) : u|_{\partial\Omega} \text{ parametriz. debole di } \Gamma \}$$

Ω = disco unitario aperto

Γ curva di Jordan, C^1 a tratti

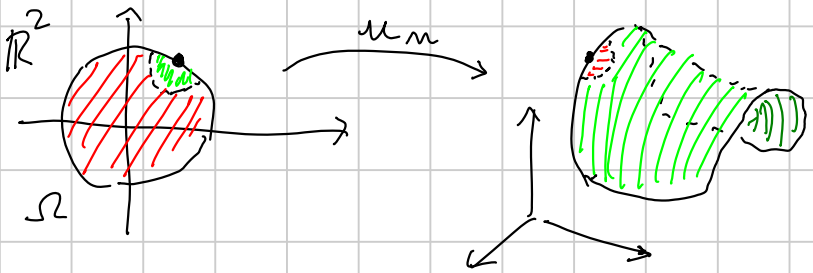
$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\, dy \qquad (x,y) \in \Omega \quad u(x,y) \in \mathbb{R}^3$$

$$|\nabla u|^2 = |u_x|^2 + |u_y|^2$$

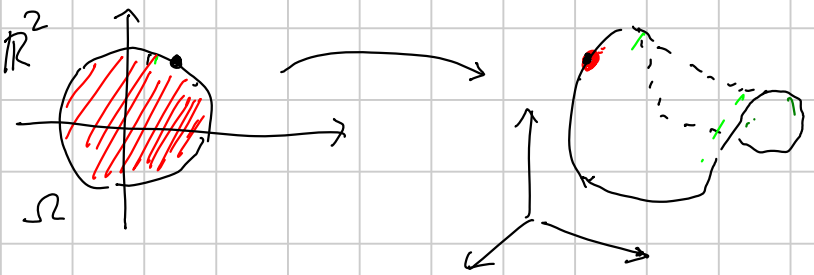
La classe C_Γ non è w-chiusa in $W^{1,2}$

In particolare $\exists\, (g_n)$ successione di trasf. conformi di Ω in sé t.c. $g_n(\Omega) = \Omega$ $g(\partial\Omega) = \partial\Omega$ t.c. $\forall u \in C_\Gamma$ anche $u_n = u \circ g_n \in C_\Gamma$

$u_n \to$ cost. w-$W^{1,2}$ puntualmente in Ω.



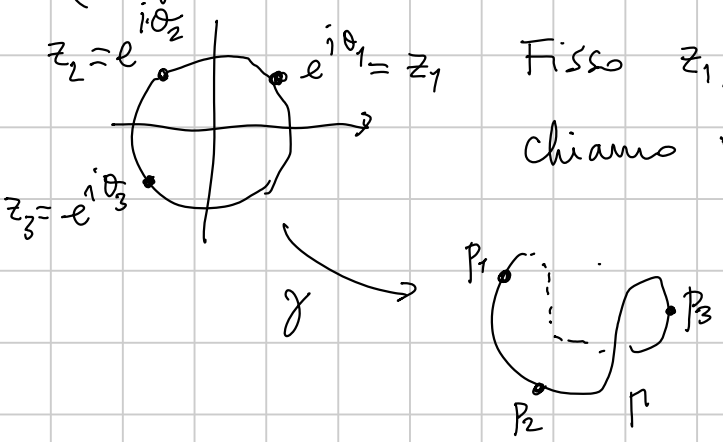
nel limite



Idea: bloccare tre punti di Γ e prendere solo parametrizzazioni che fissano tali punti.

Si evita così il problema sopra evidenziato causa della mancanza di w-chiusura di C_Γ.

Si introduce una condizione dei tre punti: Γ è definita mediante una parametrizz. fissata
$\gamma : S^1 = \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua e iniettiva
(definisce anche l'orientazione di Γ).



Fisso $z_1, z_2, z_3 \in S^1$ distinti
Chiamo $p_j = \gamma(z_j)$ $j = 1,2,3$

$$C_\Gamma^* \underset{def}{=} \{ u \in C_\Gamma : \underbrace{u(z_j) = p_j \quad j=1,2,3}_{\text{condizione dei tre punti}} \}$$

classe di minimiz. ridotta

Studio $\inf_{C_\Gamma^*} E$

Prima mi assicuro che tale problema sia equivalente al problema $\inf_{C_\Gamma} E$.

Lemma Se $\bar{u} \in C_\Gamma^*$ t.c. $E(\bar{u}) = \inf_{C_\Gamma^*} E$ allora $E(\bar{u}) = \inf_{C_\Gamma} E$.

dim. Prendo una generica $u \in C_\Gamma$.
In generale u non rispetta $u(z_j) = p_j$ $j=1,2,3$.
$\forall j = 1,2,3$ sia $w_j \in \partial\Omega$ t.c. $u(w_j) = p_j$
Per semplicità supponiamo i w_j tutti distinti.
Tali w_j esistono perché $u(\partial\Omega) = \Gamma$ e sono tutti distinti perché lo sono i punti p_j.
Cerco una trasf. conforme g di Ω in sé tale che

t.c. $g(z_j) = w_j \quad j = 1,2,3$.

Una volta trovata, considero $\tilde{u} = u \circ g$

Costruzione di g: compongo due trasf. di Möbius

$\exists\, g_1 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ trasf. di Möbius t.c.

$g_1(w_1) = 0 \quad g_1(w_2) = 1 \quad g_1(w_3) = \infty$

$\exists\, g_2 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ analoga t.c.

$g_2(z_1) = 0 \quad g_2(z_2) = 1 \quad g_2(z_3) = \infty$.

g_k è del tipo $g_k(z) = \dfrac{a_k + b_k z}{c_k + d_k z}$ con $a_k d_k \neq c_k b_k$. $(k = 1,2)$.

Posso trovare esplicitamente g_1^{-1}

Definisco $g = g_1^{-1} \circ g_2$

Risulta che g è una trasf. conforme di Ω in sé

$g(\partial\Omega) = \partial\Omega$ e $g(z_j) = w_j$.

La funzione $\tilde{u} = u \circ g$ verifica:

$\tilde{u} \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$\displaystyle\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$

$\tilde{u}(z_j) = u(g(z_j)) = u(w_j) = p_j \quad j = 1,2,3.$

$\tilde{u}|_{\partial\Omega}$ è una parametrizzazione di Γ

$\Longrightarrow \tilde{u} \in C^*_\Gamma$ e $E(\tilde{u}) = E(u)$.

Dunque $E(u) = E(\tilde{u}) \geq E(\bar{u})$

poiché $\bar{u} \in C^*_\Gamma$ è punto di min di E in C^*_Γ

Ciò vale $\forall u \in C_\Gamma$. $\Longrightarrow \inf_{C_\Gamma} E \geq E(\bar{u})$

Ma anche $\bar{u} \in C_\Gamma \supset C^*_\Gamma \Longrightarrow E(\bar{u}) \geq \inf_{C_\Gamma} E$

$\Longrightarrow E(\bar{u}) = \inf_{C_\Gamma} E = \min_{C_\Gamma} E$. □

~~Oss (dettaglio tecnico) Se non fosse w_j tutti distinti~~

~~$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, u_\varepsilon \in C_\Gamma$ t.c. $E(u_\varepsilon) \leq E(u) + \varepsilon$ e $u_\varepsilon^{-1}(p_j)$~~

sono distinti. Si arriva a trovare
$E(\bar{u}) \le \inf_{C^*_\Gamma} E + \varepsilon$ - Poi si usa l'arbitrarietà di ε per concludere.

Step 4 Studio del pb. $\inf_{C^*_\Gamma} E$

Lemma $\exists\, \bar{u} \in C^*_\Gamma$ t.c. $E(\bar{u}) = \inf_{C^*_\Gamma} E$.

Dim. Sia $(u_n) \subset C^*_\Gamma$ una succ. minimizzante cioè $E(u_n) \longrightarrow \inf_{C^*_\Gamma} E$.

So che $u_n \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ t.c.
$u_n|_{\partial\Omega}$ parametriz. debolm. monotona di Γ
$u_n(z_j) = p_j \quad j = 1,2,3.$

Sostituisco (u_n) con una nuova succ. minimiz. migliore — In particolare $\forall n\ \exists\, v_n$ sol. di

$$(P_n)\begin{cases} \Delta v = 0 & \Omega \\ v = u_n & \partial\Omega \end{cases}$$

da risolvere componente per componente.

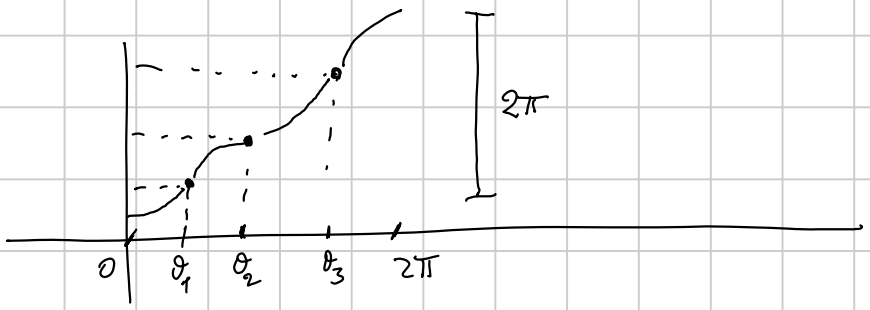
$\forall n\ \exists!\ v_n \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ soluz. di (P_n)
Inoltre per il principio di Dirichlet $\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \le \int_\Omega |\nabla u_n|^2$
$v_n|_{\partial\Omega} = u_n|_{\partial\Omega}$ parametriz. debole di Γ
In particolare $v_n(z_j) = p_j \quad j = 1,2,3.$
Dunque $v_n \in C^*_\Gamma$ e $E(v_n) \le E(u_n)$
Anche $E(v_n) \longrightarrow \inf_{C^*_\Gamma} E$.

In conclusione (v_n) è una succ minimizzante costituita da funzioni armoniche in Ω
Basta controllare $v_n|_{\partial\Omega}$ per dedurne un buon controllo su v_n in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sia in $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.

$v_n|_{\partial\Omega}$ è una param. debole di Γ nel senso che

$$v_n(e^{i\theta}) = \gamma\left(e^{i\varphi_n(\theta)}\right) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

per un'opportuna $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, debolm. crescente, $\varphi_n(\theta_j) = \theta_j$ $(j=1,2,3)$, $\varphi_n(\theta + 2\pi) = \varphi_n(\theta) + 2\pi$.



La dim prosegue secondo il seguente schema:

(A) A meno di sottosucc. $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ unif. in $[0, 2\pi]$

Dunque φ è continua e crescente (debolm.) e t.c. $\varphi(\theta_j) = \theta_j$ $(j=1,2,3)$.

Definisco ora $\overline{\gamma}(e^{i\theta}) = \gamma(e^{i\varphi(\theta)})$ e $\overline{v} =$ estensione armonica di $\overline{\gamma}$ in Ω cioè $\overline{v}$

Soluz. di $\begin{cases} \Delta \overline{v} = 0 & \text{in } \Omega \\ \overline{v} = \overline{\gamma} & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ componente per componente

Obiettivo: provare che $\overline{v}$ è punto di min.

Detta $\gamma_n(e^{i\theta}) = \gamma(e^{i\varphi_n(\theta)})$ si ha

(B) $\gamma_n \longrightarrow \overline{\gamma}$ unif. in $\partial\Omega$

(C) $\begin{cases} v_n \longrightarrow \overline{v} & \text{unif. in } \overline{\Omega} \\ \nabla v_n \longrightarrow \nabla \overline{v} & \text{puntualm. in } \Omega. \end{cases}$

(D) $\overline{v} \in C_\Gamma^*$ e $E(\overline{v}) = \inf_{C_\Gamma^*} E$

(E) $\overline{v} \in C_\Gamma$ e $A(\overline{v}) = \inf_{C_\Gamma} A$

Per il momento diamo per buono (A) (è più delicato tecnicamente) e completiamo il resto.

(A) $\Rightarrow$ (B) $\quad \varphi_n \longrightarrow \varphi$ unif. in $[0, 2\pi]$

$\Rightarrow e^{i\varphi_n} \longrightarrow e^{i\varphi}$ unif. in $[0, 2\pi]$

$\Rightarrow \gamma \cdot e^{i\varphi_n} \longrightarrow \gamma \cdot e^{i\varphi}$ unif. in $[0, 2\pi]$

perché γ è C^1 a tratti (basterebbe γ lipschitziana, perché C^1 a tratti $\Rightarrow$ Lipschitz).

$\iff \gamma_n \longrightarrow \overline{\gamma}$ unif. in $\partial\Omega$.

(B) $\Rightarrow$ (C) si usa l'armonicità di v_n.

(C.1) $v_n \longrightarrow \overline{v}$ unif. in $\overline{\Omega}$?

Si usa il principio del max per le funzioni armoniche:

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e t.c. $\Delta u = 0$ in Ω (qui Ω può essere dominio limitato N-dim e u ha valori reali) allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

$$\Longrightarrow \quad \min_{\partial\Omega} u \le u(z) \le \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall z \in \Omega$$

$$\Longrightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} |u| \le \max_{\partial\Omega} |u|$$

Applico a $u = v_n^i - \overline{v}^i$ = i-esima componente di $v_n - \overline{v}$

$$\Longrightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} |v_n^i - \overline{v}^i| \le \max_{\partial\Omega} |v_n^i - \overline{v}^i|$$

$$\Longrightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} \|v_n - \overline{v}\| \le \max_{\partial\Omega} \|v_n - \overline{v}\| = \|\gamma_n - \overline{\gamma}\|_\infty$$

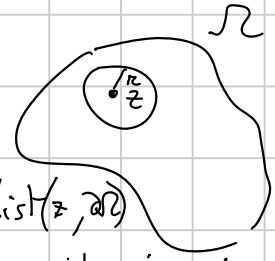
$$\Longrightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}} \|v_n - \overline{v}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(B)

(C.2) $\nabla v_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \nabla \overline{v}(z) \quad \forall z \in \Omega \qquad z = (x, y)$

Uso questa proprietà: se $u: \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica in Ω allora $\forall B_r(z) \subset\subset \Omega$

$$|\nabla u(z)| \le \frac{1}{|B_r(z)|} \int_{\partial B_r(z)} |u| \, d\sigma$$



$0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$

Applico a $u = v_n^i - \bar{v}^i$ con Ω disco unitario in $\mathbb{R}^2$

Sono in dim 2, $|B_r(z)| = \pi r^2$

Fisso $z \in \Omega$ e fisso $r \in (0, \operatorname{dist}(z, \partial\Omega))$.

$$|\nabla v_n^i(z) - \nabla \bar{v}^i(z)| \le \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(z)} |v_n^i - \bar{v}^i| \, ds$$

$$\le \frac{1}{\pi r^2} \|v_n^i - \bar{v}^i\|_\infty \underbrace{|\partial B_r(z)|}_{2\pi r} \le \frac{2}{r} \|v_n - \bar{v}\|_\infty$$

$$\Longrightarrow |\nabla v_n(z) - \nabla \bar{v}(z)| \le \frac{2}{r} \underbrace{\max_{w \in \bar{\Omega}} \|v_n(w) - \bar{v}(w)\|}_{\downarrow\ (C.1)\ 0}$$

$\Longrightarrow$ (C.2).

(C) $\Longrightarrow$ (D)

Da (C.1) segue che $\bar{v} \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ e $\bar{v}|_{\partial\Omega}$ parametriz. debole di Γ e verifica $\bar{v}(z_j) = p_j \quad (j = 1, 2, 3)$.

Da (C.2) e da Fatou

$$\int_\Omega |\nabla \bar{v}|^2 \le \liminf \int_\Omega |\nabla v_n|^2 = \liminf 2E(v_n) = \underbrace{\lim 2E(v_n)}_{\text{costante finita}}.$$

$|\nabla \bar{v}| \in L^2(\Omega)$

$\bar{v} \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \Longrightarrow \bar{v} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

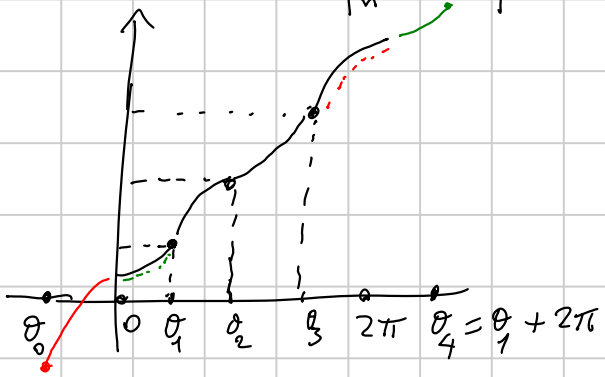
$\Longrightarrow \bar{v} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Inoltre ho che $E(\bar{v}) \le \lim E(v_n) = \inf E$ e anche $\bar{v} \in C^*_\Gamma$ - Dunque $E(\bar{v}) = \min_{C^*_\Gamma} E$.

(D) $\Longrightarrow$ (E) Segue dai lemmi già visti.

Resta da provare

(A) per una sottosucc. $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ unif. in $[0, 2\pi]$.



La successione (φ_n) è equilimitata

$$\theta_0 = \varphi_n(\theta_0) \leq \varphi_n(\theta) \leq \varphi_n(\theta_4) = \theta_4$$

($\theta \geq \theta_0$, $\theta \leq \theta_4$)

Dunque $\theta_0 \leq \varphi_n(\theta) \leq \theta_4 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \ \forall n$

costanti indipendenti da θ e da n

Se (φ_n) fosse anche equicontinua, si potrebbe applicare Ascoli-Arzelà (in $C([0, 2\pi])$) per concludere (A).

Qui seguo un'altra strada, usando il

Teorema di selezione di Helly

È data una successione di funzioni

$f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ogni f_n è crescente (non è richiesta la continuità).

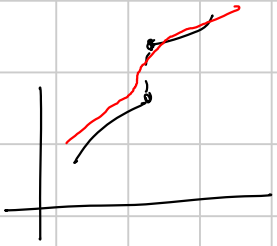
Supponiamo che $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha \leq f_n(t) \leq \beta \quad \forall t \in [a, b] \ \forall n$$

Allora $\exists f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exists (f_{n_k})$ sottosucc. di (f_n) t.c. $f_{n_k}(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(t) \quad \forall t \in [a, b]$.

Inoltre se f è continua in $[a, b]$ allora $\sup_{[a,b]} |f_{n_k} - f| \longrightarrow 0$ cioè si ha conv. unif. in $[a, b]$

In generale non è detto che f sia continua



Per il teorema di Helly $\exists\, \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$
debolm. crescente e t.c. a meno di sottosucc.

$$\varphi_n(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\theta) \qquad \forall\, \theta \in [0, 2\pi].$$

La converg. puntuale garantisce $\varphi \nearrow$
e $\varphi(\theta_j) = \theta_j \quad j = 1, 2, 3$.
Manca ancora la converg. unif.
Si recupera provando che φ è continua.

Il teorema di Helly si può trovare su
W. Rudin — Principi di Analisi matematica
pag. 166 (es. 13)