Metodi variazionali – Lezione 12

Titolo nota 21/03/2020

Correzione (Osservazione) nella dim del 1° Lemma della lez. 11

Si fissa $u \in C_\Gamma$. $\exists\ w_1, w_2, w_3 \in \partial\Omega$ t.c. $u(w_j) = p_j$, $j = 1,2,3$

"Per semplicità supponiamo i w_j tutti distinti". NON È CORRETTA

È sempre vero perché $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_1$

$u^{-1}(p_j) \cap u^{-1}(p_k) = \emptyset$ se $j \neq k$.

$\Longrightarrow w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1$.

Eventualmente può succedere che $u^{-1}(p_j)$ non sia composto da un solo elemento.

L'osservazione macassiva viene a cadere.

Resta da dimostrare un ultimo passo

(A) $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ uniforme

Basta verificare che φ è continua (cfr. il Teorema di Helly).

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ v_n \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, t.c.

- v_n armonica in Ω $\left(\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\right.$ $\begin{cases} v_n \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ \Delta v_n = 0 \text{ in } \Omega \end{cases}$

- $v_n|_{\partial\Omega}$ parametrizz. debole di Γ cioè (γ: fissata parametriz. di Γ)

$$v_n(e^{i\theta}) = \gamma\left(e^{i\varphi_n(\theta)}\right)$$ per una certa $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $\nearrow$, t.c.

$\varphi_n(\theta_j) = \theta_j$ $(j = 1,2,3)$

$\varphi_n(\theta + 2\pi) = \varphi_n(\theta) + 2\pi$

- $v_n \in C_p^*$
- $E(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{C_p^*} E$ - in particolare

$\exists\, C > 0$ t.c. $E(v_n) \le C \quad \forall n$.

Dal teorema di Helly $\exists\, \varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. (a meno di una sottosuccessione) si ha

$$\varphi(\theta) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta) \quad \forall\, \theta \in [0, 2\pi].$$

Tale φ si estende su $\mathbb{R}$ mediante

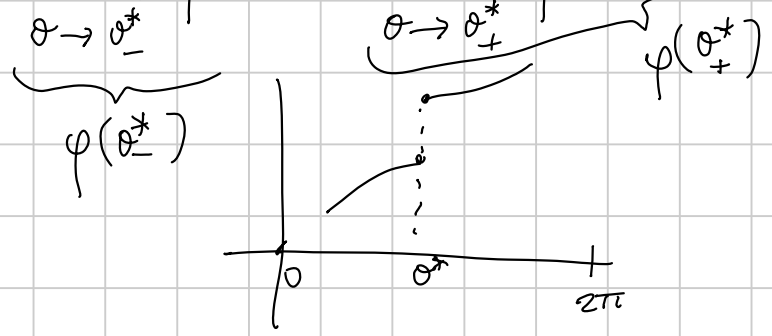
$$\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) + 2\pi \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

Inoltre φ ↗ e verifica

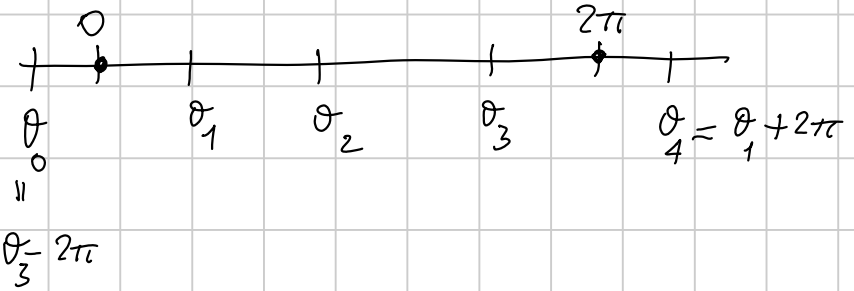
$$\varphi(\theta_j) = \theta_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Si vuole provare che φ è continua.

Per assurdo non lo sia. Dunque $\exists\, \theta^* \in [0, 2\pi)$ t.c. $\lim_{\theta\to\theta^*_-} \varphi(\theta) < \lim_{\theta\to\theta^*_+} \varphi(\theta)$



$0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$



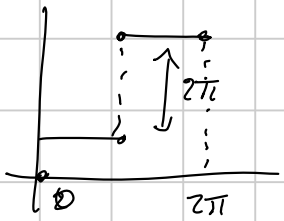
$\exists\, j \in \{1, 2, 3\}$ t.c. $\theta_{j-1} < \theta^* < \theta_{j+1}$

vale che $\forall\, \theta \in (\theta_{j-1}, \theta^*) \quad \forall\, \theta' \in (\theta^*, \theta_{j+1})$

$$\theta_{j-1} = \varphi(\theta_{j-1}) \le \varphi(\theta) \le \varphi(\theta^*_-) < \varphi(\theta^*_+) \le \varphi(\theta') \le \varphi(\theta_{j+1}) = \theta_{j+1}$$

Il salto $\varphi(\theta') - \varphi(\theta) \le \theta_{j+1} - \theta_{j-1} < 2\pi$

È esclusa la situazione

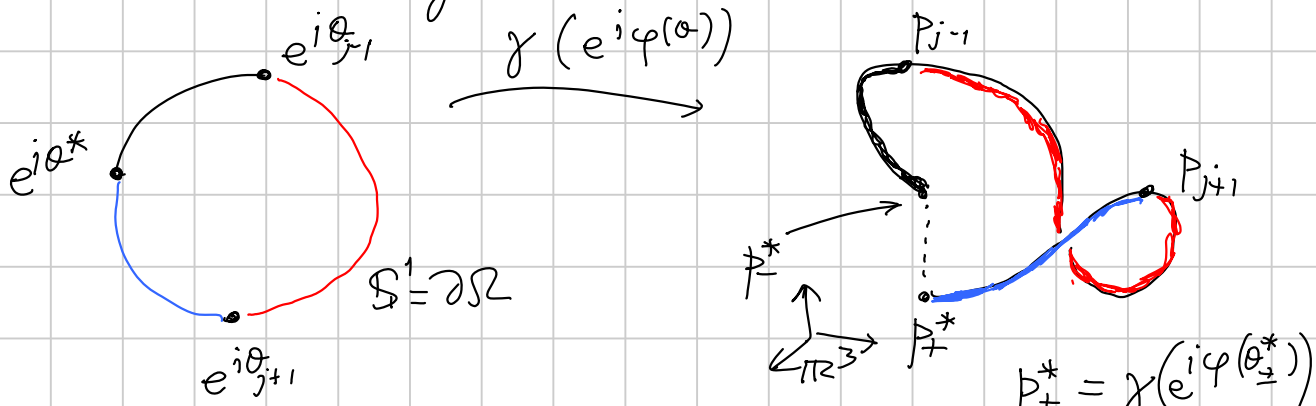


In tale situazione risulterebbe

$\overline{\gamma}(e^{i\theta}) = \gamma(e^{i\varphi(\theta)}) = \text{costante}$.

(era il problema emerso nel fatto che C_Γ non fosse chiuso debolmente).

Ora entra in gioco la condizione dei tre punti.



Introduco le curve in $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma_- = \{ \gamma(e^{i\varphi(\theta)}) : \theta \in [\theta_{j-1}, \theta^*) \}$$

$$\Gamma_+ = \{ \gamma(e^{i\varphi(\theta)}) : \theta \in (\theta^*, \theta_{j+1}] \}$$

γ omeomorfismo

φ non è continua in θ^* $(\Rightarrow P_-^* \neq P_+^*)$

$P_j \notin \overline{\Gamma}_- \cap \overline{\Gamma}_+$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(\Gamma_-, \Gamma_+) > 0$ $\quad \left(\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} |a-b|\right)$.

Chiamo $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Gamma_-, \Gamma_+)$, $I_- = [\theta_{j-1}, \theta^*)$, $I_+ = (\theta^*, \theta_{j+1}]$

Dunque

$$|\gamma(e^{i\varphi(\theta)}) - \gamma(e^{i\varphi(\theta')})| \ge 2\varepsilon_0 \quad \forall \theta \in I_- \ \forall \theta' \in I_+$$

Passo da φ a φ_n con n grande (usando la convergenza puntuale $\varphi(\theta) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta)$ $\forall \theta$).

È vero che $\forall \theta \in I_-, \forall \theta' \in I_+$ $\exists\, \bar{n} = \bar{n}(\theta, \theta')$ t.c.

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad |\gamma(e^{i\varphi_n(\theta)}) - \gamma(e^{i\varphi_n\theta'})| \geq \tfrac{3}{2}\varepsilon_0$$

Non è vero che $\bar{n}$ è indipendente da $\theta \in I_-$ e $\theta' \in I_+$

Infatti le curve $\Gamma_n^{\pm} = \{\gamma(e^{i\varphi_n(\theta)}) : \theta \in I_\pm\}$

si attaccano in $\gamma(e^{i\varphi_n(\theta^*)})$ (perché φ_n è continua)

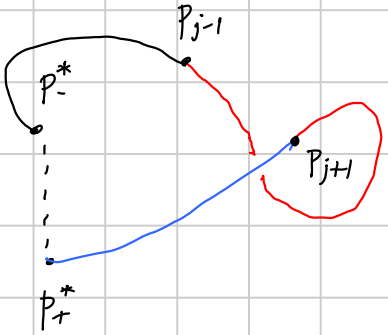
$\Rightarrow$ $\operatorname{dist}(\Gamma_n^-, \Gamma_n^+) = 0$.

Per avere distanza positiva devo togliere un intorno di θ^*. Con un argomento di compattezza, vale che

$\forall \theta^- \in I_-$, $\forall \theta^+ \in I_+$ $\exists n_0 = n_0(\theta^-, \theta^+)$ t.c.

$\forall n \geq n_0$ $\forall \theta \in [\theta_{j-1}, \theta^-]$ $\forall \theta' \in [\theta^+, \theta_{j+1}]$

$$|\gamma(e^{i\varphi_n(\theta)}) - \gamma(e^{i\varphi_n(\theta')})| \geq \varepsilon_0.$$



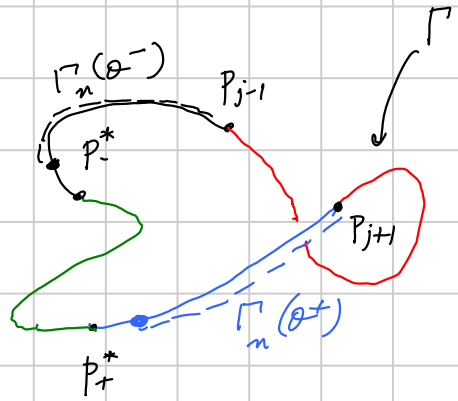


immagine di $e^{i\theta} \mapsto \gamma(e^{i\varphi(\theta)})$

$\uparrow$ S^1 $\qquad$ $\uparrow$ Γ

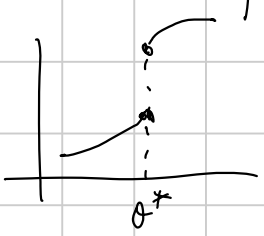
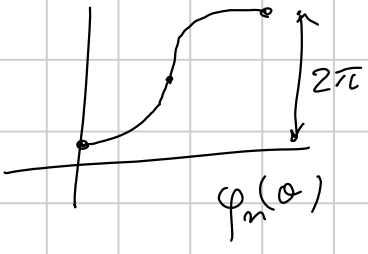


immagine di $e^{i\theta} \mapsto \gamma(e^{i\varphi_n(\theta)})$

$\uparrow$ S^1



Fissati $\theta^- \in I_-$ e $\theta^+ \in I_+$ chiamo

$$\Gamma_n(\theta^-) = \{\gamma(e^{i\varphi_n(\theta)}) : \quad \theta \in [\theta_{j-1}, \theta^-]\}$$
$$\Gamma_n(\theta^+) = \{\gamma(e^{i\varphi_n(\theta)}) : \quad \theta \in [\theta^+, \theta_{j+1}]\}.$$

$$\operatorname{dist}(\Gamma_n(\theta^-), \Gamma_n(\theta^+)) \geq \varepsilon_0 \qquad \forall n \geq n_0.$$

Si usa ora il seguente risultato

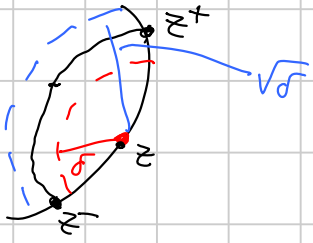
Lemma (Courant–Lebesgue) — Ω = disco unitario

$\forall \delta \in (0,1)$ $\forall u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ $\forall z \in \partial\Omega$

$\exists r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ $r = r(u,z)$ t.c.

$$|u(z^-) - u(z^+)|^2 \le \frac{6\pi}{|\log \delta|} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\, dy$$

dove $\{z^-, z^+\} = \partial\Omega \cap \partial B_r(z)$



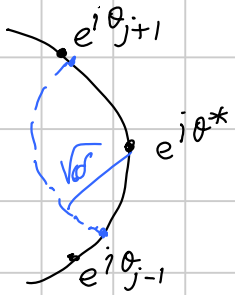
N.B. $\frac{6\pi}{|\log \delta|} \longrightarrow 0$ per $\delta \to 0$.

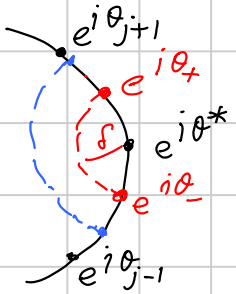
Procedo con la dim. Devo scegliere $\delta \in (0,1)$ opportunamente piccolo. Osservo che $\theta^*, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}$ sono già dati e conseguentemente anche $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Gamma_-, \Gamma_+) > 0$ — inoltre $\exists C > 0$ t.c.

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx\, dy \le C \quad \forall n.$$

Scelgo $\delta \in (0,1)$ t.c.

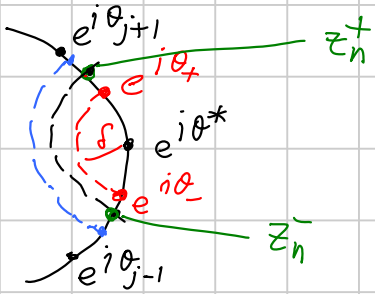
$$\sqrt{\frac{12\pi C}{|\log \delta|}} < \varepsilon_0 \qquad e \qquad \sqrt{\delta} \le |e^{i\theta_{j\pm1}} - e^{i\theta^*}|$$





Applico Courant–Lebesgue con $z = e^{i\theta^*}$ e $u = v_n$

$\exists r_n \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ t.c. $|v_n(z_n^-) - v_n(z_n^+)|^2 \le \frac{6\pi}{|\log \delta|} \int_\Omega |\nabla v_n|^2$



$z_n^+ = e^{i\theta_n^+}$ $\quad \theta_n^+ \in [\theta_+, \theta_{j+1}]$

$z_n^- = e^{i\theta_n^-}$ $\quad \theta_n^- \in [\theta_{j-1}, \theta_-]$

ora $\theta_\pm$ sono fissati in base a δ.

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad n_0 = n_0(\theta_-, \theta_+) = n_0(\delta)$ t.c.

$\operatorname{dist}\left(\Gamma_n(\theta_-), \Gamma_n(\theta_+)\right) \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \geq n_0.$

Prendo $n \geq n_0$ e osservo che $v_n(z_n^\pm) \in \Gamma_n(\theta_\pm)$

$v_n(z_n^\pm) = \gamma\left(e^{i\varphi_n(\theta_n^\pm)}\right)$

Da una parte $\left|v_n(z^-) - v_n(z^+)\right|^2 \leq \dfrac{6\pi C}{|\log\delta|}$

D'altra parte $|v_n(z^-) - v_n(z^+)| \geq \varepsilon_0.$

$\Longrightarrow \quad \varepsilon_0 \leq \sqrt{\dfrac{6\pi C}{|\log\delta|}} < \sqrt{\dfrac{12\pi C}{|\log\delta|}} < \varepsilon_0 \quad \lightning.$

Dunque φ non ha punti di discontinuità.

$\Longrightarrow \varphi \in C([0, 2\pi])$, anzi $\varphi \in C(\mathbb{R})$ etc. $\square$

Per una dim di Courant-Lebesgue (e di Helly) cfr. dispense.

Si è provato

<u>Teorema</u> Fissata una curva di Jordan Γ di classe C^1 a tratti $\exists\, u \in C_\Gamma$ t.c. $A(u) = \inf_{C_\Gamma} A$

Tale u risulta armonica in Ω - In particolare $u \in C^\infty$.

Vale anche che $A(u) = E(u)$. Infatti

$$\inf_{C_\Gamma} A = A(u) \leq E(u) = \inf_{C_\Gamma^*} E = \inf_{C_\Gamma} E = \inf_{C_\Gamma} A$$

$$\Longrightarrow \quad A(u) = E(u) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |u_x| = |u_y| \\ u_x \cdot u_y = 0 \end{cases} \quad \text{q.o. in } \Omega$$

$$\underset{u \in C^1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} |u_x(x,y)| = |u_y(x,y)| \\ u_x(x,y) \cdot u_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Si può anche provare che $u_x(x,y) \wedge u_y(x,y) \neq 0 \quad \forall x, y \in \Omega$

$$\Longrightarrow \forall (x,y) \in \Omega \quad \exists\, \vec{n}(x,y) = \frac{u_x \wedge u_y}{|u_x \wedge u_y|}(x,y)$$

Dunque u è una parametrizzazione <u>regolare</u> e <u>conforme</u>

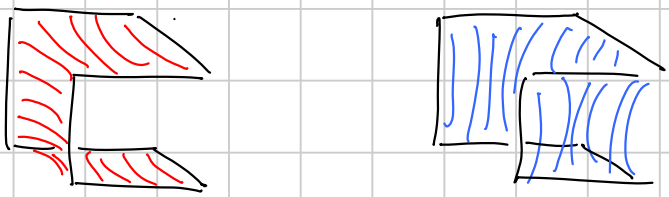
Proposizione La superficie parametrizzata da u ha curvatura media nulla.

Def. Le superfici con curvatura media nulla si dicono **superfici minime**

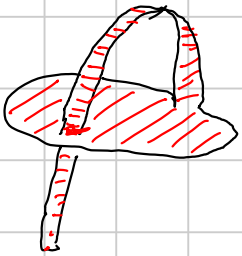
N.B. Esistono superfici minime che possono non essere punti di minimo dell'area.

Ulteriori osservazioni si ha che $u|_{\partial\Omega} = \gamma(e^{i\varphi})$ con φ strettamente crescente. Dunque $u|_{\partial\Omega}$ è una parametriz. vera di Γ, cioè è un omeomorf. di S^1 su Γ.

In generale il pb. non ha unicità di soluz:



La superficie di area minima può avere autointersez. cioè non è iniettiva (non "embedded").



dimostro la proposizione

curvatura media $H = \dfrac{\mathcal{E}n - 2\mathcal{F}m + \mathcal{G}l}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}$

dove $\mathcal{E} = |u_x|^2$ $\mathcal{F} = u_x \cdot u_y$ $\mathcal{G} = |u_y|^2$ coefficienti della 1ª forma fondam.

$L = u_{xx} \cdot \vec{n} \quad M = u_{xy} \cdot \vec{n} \quad N = u_{yy} \cdot \vec{n}$

coefficienti della 2ª forma fondam.

So che $F = 0 \quad E = G$.

$$EN - \underbrace{2FM}_{0} + GL = E(N + L) = E(u_{xx} \cdot \vec{n} + u_{yy} \cdot \vec{n})$$
$$= E(\underbrace{\Delta u}_{0} \cdot \vec{n}) = 0$$

$\Longrightarrow H = 0$ □

Altri riferimenti bibliografici:

Struwe Variational Methods

Dacorogna Intro to the Calc. of Var.

Dierkes - Hildebrandt - Sauvigny Minimal Surfaces

Colding - Minicozzi - A course in Min. Surf.'s