Metodi variazionali – Lezione 13

Titolo nota 24/03/2020

Problemi ellittici lineari

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione data

L operatore differenziale del second'ordine ellittico lineare (ad es. $L = -\Delta$ cioè $Lu = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$)

$\lambda \in \mathbb{R}$

Si studia

$$(D) \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

problema di Dirichlet

oppure

$$(N) \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

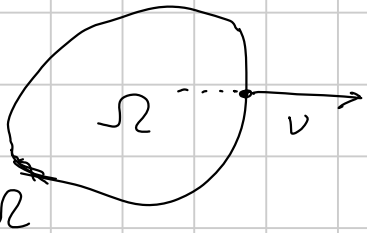
problema di Neumann

va bene solo per $L = -\Delta$ come nell'esempio

Per il problema di Neumann

$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ = derivata normale esterna di u in $x \in \partial\Omega$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{u(x+\varepsilon\nu) - u(x)}{\varepsilon}$$



Per garantire che $\exists\, \nu(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ serve Ω regolare, ad es. $\partial\Omega \in C^1$

Definizione Un operatore differenziale lineare del 2° ordine uniformemente ellittico è un operatore della forma

$$Lu = -\operatorname{div}[A(x)\nabla u] + q(x)u$$

dove $q \in L^\infty(\Omega)$ e $A(x) = [a_{ij}(x)]_{1 \le i,j \le N}$ con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ che verificano:

(i) $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$

(ii) $\exists \alpha > 0$ t.c. $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ per q.o. $x \in \Omega$

In notazione compatta $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$

$\Rightarrow$ $A(x)$ è una matrice simmetrica e definita positiva.

L'azione di L su $u : \Omega \to \mathbb{R}$ va intesa in senso opportuno, secondo le nozioni di derivata classica (o forte) o di derivata debole, a seconda di quanto si chiede a u.

Oss. L è lineare cioè $L(\beta u_1 + u_2) = \beta L u_1 + L u_2$

Se $A(x) = I$, $Lu = -\operatorname{div}(\nabla u) + q(x)u = -\Delta u + q(x)u$

(operatori di Schrödinger con potenziale $q(x)$).

Tra questi, prendendo $q \equiv 0$, si ottiene $L = -\Delta$.

Se $a_{ij} \in C^1$ e preso $u \in C^2$ si ha che

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{derivate del } 2^\circ \text{ ord.}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}}_{\text{derivate del } 1^\circ \text{ ord.}} \quad \text{dove } b_j(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}$$

Ci concentriamo sul pb. di Dirichlet

$$(D) \quad \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Ω, f, λ, L sono dati

u incognita

$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u$

operatore unif. ellittico con coefficienti in $L^\infty(\Omega)$.

Nozioni di soluzione di (D).

Def Supponiamo $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $q \in C(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$.

Una soluz. classica o soluzione forte di (D) è una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che verifica (D) puntualm. cioè $Lu(x) = \lambda u(x) + f(x) \quad \forall x \in \Omega$

↑ con le derivate in senso classico

e $u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$.

Def. (Nessuna ipotesi di regolarità su a_{ij} né su q)
Una soluz. debole di (D) è una funzione
$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ t.c.

$$(*) \quad \int_\Omega \underbrace{\left(A(x)\nabla u \cdot \nabla h + q(x) u h\right)}_{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j}} dx = \int_\Omega (\lambda u + f) h \, dx \qquad \forall h \in C_c^\infty(\Omega).$$

↑ derivate deboli di u

(ricordo che $W_0^{1,2}(\Omega)$ = chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$)

(*) è la versione debole di $Lu = \lambda u + f$ in Ω

Il fatto che $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ costituisce la formulazione debole della condizione al bordo $u = 0$ su $\partial\Omega$.

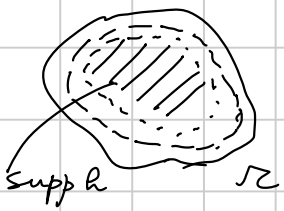
Chiediamo $f \in L^2(\Omega)$ – ciò dà un senso a (*).
In tal caso (*) vale $\forall h \in C_c^\infty(\Omega) \iff$ (*) vale $\forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$
(perché $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$).

Se $\partial\Omega \in C^1$ e

Osservazione Se $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ è una soluz. classica di (D) e $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty$ allora anche u è sol. debole.

Infatti: $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$

$$0 = \int_\Omega \underbrace{(-Lu + \lambda u + f)}_{\parallel 0} h \, dx =$$



$$= \int_\Omega \operatorname{div}[A(x)\nabla u] h \, dx + \int_\Omega (-q(x)u + \lambda u + f) h \, dx$$

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} h\, A(x)\nabla u \cdot \nu \, d\sigma}_{\text{"0 perché } h=0 \text{ in un intorno di } \partial\Omega} - \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla h \, dx + \int (\dots) h \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (A(x)\nabla u \cdot \nabla h + q(x) u h)\, dx = \int_\Omega (\lambda u + f) h \, dx .$$

cioè u verifica $(*)$.

Noto anche che $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ segue da

$u \in L^2(\Omega)$ $\qquad \int_\Omega u^2 dx \le \left(\max_\Omega |u(x)|^2\right) |\Omega| < \infty$

$|\nabla u| \in L^2(\Omega)$

Da ciò segue $u \in W^{1,2}(\Omega)$

Da un teorema (cfr. thm. IX.17 Brezis) quando $\partial\Omega \in C^1$ $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ si ha che

$$\underbrace{u(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega}_{\text{vero se } u \text{ è sol. classica}} \iff u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Esaminiamo dapprima il problema omogeneo (cioè con $f = 0$)

$(P)_\lambda$ problema agli autovalori $\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(P)_\lambda$ è risolto da $u = 0$ (sol. banale).

Def. Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $(P)_\lambda$ ha soluz. debole $\neq 0$ si chiama autovalore di L. Le corrispondenti soluzioni non nulle si chiamano autofunzioni. Se λ è un autovalore l'insieme $\{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : u$ sol. debole di $(P)_\lambda\}$ (inclusa $u = 0$) è uno spazio vettoriale detto autospazio relativo a λ. La sua dimensione algebrica si chiama molteplicità dell'autovalore λ. Un autovalore si dice semplice se ha molteplicità 1.

(di decomposizione spettrale)

Teorema Dato un dominio limitato Ω in $\mathbb{R}^N$ e dato un operatore uniformemente ellittico L, esistono una succ. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e una succ. $(\varphi_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$:

1) $\lambda_n \le \lambda_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lambda_n \longrightarrow \infty$ per $n \to \infty$
2) ogni λ_n è autovalore di L e φ_n corrispondente autofunzione
3) ogni autovalore di L è uno dei λ_n.
4) $\{\varphi_n\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$ cioè
$$\int_\Omega \varphi_n \varphi_m \, dx = \delta_{nm} \quad \text{e} \quad \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = L^2(\Omega).$$
5) Se in più $q(x) \ge 0$ q.o. allora $\lambda_1 > 0$.

Osservazione Può succedere che $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ t.c.
$$\lambda_n < \underbrace{\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{n+k}}_{\lambda \text{ autovalore di molteplicità } k} < \lambda_{n+k+1}$$
l'autospazio di λ è $\left\{ \sum_{i=n+1}^{n+k} \alpha_i \varphi_i \;:\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ n+1 \le i \le n+k \right\}$.

Dimostrazione $Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u$

i) $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$
ii) $\exists \alpha > 0$ t.c. $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha |\xi|^2$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, per q.o. $x \in \Omega$

$a_{ij}, q \in L^\infty$ — Supponiamo $q(x) \ge 0$ per q.o. x.

Ci si può sempre ricondurre a tale situazione facendo così: considero $\tilde{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{q}(x)u$
dove $\tilde{q}(x) = q(x) + \|q\|_\infty$ — Siccome $-\|q\|_\infty \le q(x) \le \|q\|_\infty$ per q.o. $x \in \Omega$, segue che $\tilde{q}(x) \ge 0$ q.o.
L'eq. $Lu = \lambda u$ equivale a $\tilde{L}u = \tilde{\lambda}u$ con $\tilde{\lambda} = \lambda - \|q\|_\infty$. Cioè
λ autovalore di L con autofunzione φ $\iff$ $\lambda - \|q\|_\infty$ autovalore di $\tilde{L}$ con autofunzione φ.

Dunque basta condurre il caso $q(x) \geq 0$ per q.o. $x \in \Omega$

Strumenti utili:

(A) disug. di Poincaré in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\exists\, C > 0 \quad \text{t.c.} \quad \int_\Omega u^2\,dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Corollario $\|\nabla u\|_{L^2}$ è una norma in $W_0^{1,2}(\Omega)$ equivalente alla norma $\|u\|^2_{W^{1,2}} = \|u\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2}$

(B) teorema di Rellich:

$$I : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \qquad I(u) = u$$

I è un operatore lineare, continuo (da Poincaré) e compatto.

Si dice anche $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ con immersione compatta.

(C) Teorema di Hilbert-Schmidt

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T : H \to H$ un operatore lineare compatto e autoaggiunto. Allora esistono insiemi al più numerabili $\{\mu_n^-\}_{n\in I^-}, \{\mu_n^+\}_{n\in I^+} \subset \mathbb{R}$ e corrispondenti insiemi $\{u_n^-\}_{n\in I^-}, \{u_n^+\}_{n\in I} \subset H$ t.c.

1) $\mu_1^- \leq \mu_2^- \leq \ldots < 0 < \ldots \leq \mu_2^+ \leq \mu_1^+$
se $\#(I^+) = \infty$ allora $\mu_n^+ \to 0$ per $n \to \infty$.

2) $\mu_n^\pm$ autovalori con $u_n^\pm$ relativi autovettori di T

$$T u_n^\pm = \mu_n^\pm u_n^\pm$$

3) ogni autovalore non nullo di T è uno dei μ_n^- o dei μ_n^+

4) $\{u_n^-\} \cup \{u_n^+\}$ è un sistema ortonormale e $H = H_- \oplus H_0 \oplus H_+$ dove $H_- = \overline{\text{span}\{u_n^-\}_{n\in I^-}}$, $H_+ = \overline{\text{span}\{u_n^+\}_{n\in I^+}}$, $H_0 = \ker T$

Procedo con la dim. Applico Hilbert-Schmidt con $H = L^2(\Omega)$ $\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega uv\,dx$.

Devo costruire l'operatore T.

Lemma (costruzione dell'operatore risolvente)

Studio il pb. $(P)\begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

$\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sol. debole di (P).

Inoltre posto $R(f) = u$ = unica sol. debole di (P) si ha che $R : L^2(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ è un operatore lineare e continuo (R = operatore risolvente)

$$L^2(\Omega) \xrightarrow[R]{} W_0^{1,2}(\Omega) \xrightarrow[I]{} L^2(\Omega)$$

Definisco $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ $T = I \circ R$

T è un operatore lineare compatto (perché composizione di continuo con compatto, per Rellich).

Dimostro che T è autoaggiunto e che T è un operatore positivo.

T autoaggiunto

Prendi $f, g \in L^2(\Omega)$ chiamo $u = R(f)$ e $v = R(g)$

$u = Rf \iff u$ sol. debole di $\begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \int_\Omega [A(x)\nabla u \cdot \nabla h + q(x)\,u\,h]\,dx = \int_\Omega f h\,dx \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

$$v = Rg \iff \begin{cases} v \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \int_\Omega [A(x)\nabla v \cdot \nabla h + q(x)\,v\,h]\,dx = \int_\Omega g h\,dx \end{cases}$$

In particolare $\int_\Omega [A(x)\nabla u \cdot \nabla v + q(x)\,u\,v]\,dx = \int_\Omega f v\,dx \quad (1)$

e $\int_\Omega [A(x)\nabla v \cdot \nabla u + q(x) v u]\,dx = \int_\Omega g u\,dx$. (2)

Essendo $A(x)$ simmetrica I° membro di (2) $= I^\circ$ membro di (1)

Dunque $\int_\Omega fv\,dx = \int_\Omega gu\,dx$ cioè

$\langle f, Rg\rangle_{L^2} = \langle g, Rf\rangle_{L^2}$ cioè $\langle f, Tg\rangle_{L^2} = \langle g, Tf\rangle_{L^2}$
cioè T è autoaggiunto.

<u>T operatore positivo</u> cioè $\langle Tf, f\rangle_{L^2} \geq 0 \quad \forall f \in L^2(\Omega)$
$= 0 \iff f = 0$

$\langle T(f), f\rangle_{L^2} = \langle R(f), f\rangle_{L^2} = \int u f\,dx = \int_\Omega [A(x)\nabla u\cdot\nabla u + q(x)u^2]\,dx$
$u = R(f)$ in (1) $v = u$

$\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq 0$
$q \geq 0$ q.o.
$A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2$
Se $= 0$ allora $\|\nabla u\|_{L^2} = 0 \implies u = 0 \implies f = Lu = 0$
norma in $W^{1,2}_0(\Omega)$

Posso applicare il teorema di Hilbert-Schmidt.

Osservo che μ autovalore di $T \implies \mu > 0$.
Infatti se f è autovettore allora $f \neq 0$ e
$Tf = \mu f \implies \mu \|f\|^2_{L^2} = \mu\langle f, f\rangle_{L^2} = \langle Tf, f\rangle_{L^2} > 0$ ($f \neq 0$)
$\implies \mu > 0$. <u>Dunque</u> $\{\mu_n^-\} = \emptyset$ e $\ker T = \{0\}$.

$\implies H = \overline{\text{span}\{u_n^+\}_{n\in I^+}}$ Deve essere $I^+ = \mathbb{N}$

giacché $H = L^2(\Omega)$ spazio ∞-dim separabile.
$\implies \mu_n^+ \longrightarrow 0$. Infine $Tu_n^+ = \mu_n^+ u_n^+ \iff$

$\iff \begin{cases} Ru_n^+ = \mu_n^+ u_n^+ \\ u_n^+ \in W^{1,2}_0(\Omega) \end{cases} \iff \begin{cases} u_n^+ = L(\mu_n^+ u_n^+) \text{ in } \Omega \\ u_n^+ = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$ in senso debole

Chiamo $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n^+}$ e $\varphi_n = u_n^+$ ho che

$$\begin{cases} L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \text{in } \Omega \\ \varphi_n = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

sol. debole.

T operatore positivo

λ_n sono ordinati $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ e $\lambda_n \to \infty$.

$\{\varphi_n\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$.